УПРАВЛЕНИЕ ФИНАНСАМИ

ОПТИМИЗАЦИЯ МОДЕЛЬНЫХ ФОНДОВЫХ ПОРТФЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Недосекин А.О., к.т.н., член гильдии Инвестиционных и финансовых аналитиков России, консультант

Компания Сименс Бизнес Сервисиз

Введение

В условиях набирающей обороты пенсионной реформы становится актуальным вопрос профессионального управления накопительными инвестициями. Такое доверительное управление, согласно законодательству, препоручается управляющим инвестиционным компаниям. Подробно об инвестиционных аспектах пенсионной реформы мы говорили в [1].

И значит, перед управляющими компаниями во весь рост встает проблема научного управления портфельными инвестициями, которая включает в себя:

A. Выбор перечня модельных классов, в рамках которых будет проводиться инвестирование, и их конструктивное описание. Под модельными классами (asset classes) мы здесь понимаем совокупность ценных бумаг, сгруппированных по определенному классификационному признаку (функциональному, отраслевому, региональному и т.п.). Примеры модельных классов: бумаги с фиксированным доходом, акции иностранных государств, акции российских нефтяных компаний, облигации зарубежных корпораций и т.п.

B. Определение оптимальной долевой пропорции между модельными классами в структуре модельного портфеля (asset allocation). Под модельным портфелем мы понимаем совокупность модельных классов, суммарная доля которых в портфеле составляет 100%.

C. Определение состава бумаг, наполняющих каждый из выбранных модельных классов.

D. Определение стратегии и тактики хеджирования портфеля.

В настоящей работе мы коснемся только задач A и B, как они решаются в мировой практике, и какие есть предпосылки для их решения в российских условиях. При этом мы используем результаты теории нечетких множеств применительно к фондовому менеджменту. Работа содержит систематическое изложение базовых формализмов теории нечетких множеств, а также расчетный пример портфельной оптимизации в расплывчатых условиях, на примере двух американских фондовых индексов.

1. ВЫБОР МОДЕЛЬНЫХ КЛАССОВ

Сначала коснемся общих принципов модельного портфолио-менеджмента, разработанных в США в середине 70-х годов, американского опыта подбора модельных классов.

Прежде всего, все ценные бумаги подразделяются по их региональной принадлежности на бумаги, выпущенные в США (**Domestic**) и бумаги, эмиттированные за рубежом (**International**).

Затем в модельном классе **Domestic** выделяются следующие субклассы:

- Взаимные фонды краткосрочных обязательств (Cash), которые наполнены бумагами с фиксированным доходом со сроком погашения от трех месяцев до года;
- Взаимные фонды государственных средне- и долгосрочных обязательств (Domestic Govt Bonds);
- Взаимные фонды корпоративных облигаций (Domestic Corp Bonds);
- Взаимные фонды на акциях с большой (от $10B, где B — миллиард) капитализацией (Domestic Large Cap);
- Взаимные фонды на акциях со средней (от $1B до $10B) капитализацией (Domestic Middle Cap);
- Взаимные фонды на акциях с небольшой, по тамошним меркам (от $0.1B до $1B), капитализацией (Domestic Small Cap).

В классе **International** выделяются следующие подклассы:

- Рынок ценных бумаг развитых стран (Западная Европа, Скандинавия и т.д.).
- Рынок бумаг развивающихся стран (Восточная Европа, Южная Азия, Ближний Восток и т.д.).

Такая первичная классификация является общеупотребительной. Далее классификацию можно продолжать. В рамках взаимных фондов можно провести отраслевую классификацию, в рамках госбумаг с фиксированным доходом – разделение на правительственные и муниципальные, в рамках зарубежных стран – классификацию на бумаги с фиксированным доходом и бумаги с нефиксированным доходом, и так далее. Все зависит от инвестиционных предпочтений потенциального инвестора, от его представлений о диверсификации.

2. ИНДЕКСИРОВАНИЕ

Для того, чтобы прогнозировать поведение своего модельного портфеля во времени, необходимо сопоставить каждому модельному классу **индекс,** характеризующий историческое поведение совокупности бумаг данного модельного класса.

Например, характерными соответствиями класса и индекса (для условий США) являются:

- Cash — *3 Month T-Bills Index* [2] – индекс доходности трехмесячных облигаций казначейства США;
- Domestic Govt Bonds — Lehman Brothers Govt Bond Index [3];
- Domestic Large Cap – S&P 500 Index [4].

Индекс можно рассматривать как сконструированный специальным образом регулярно ребалансируемый фондовый портфель, который характеризуется своей текущей рыночной оценкой. Исследуя историческое поведение индекса **(перфоманс),** можно делать прогностические выводы об **ожидаемой доходности** вложений в этот портфель и о **волатильности** (колеблемости) вложений. Также, рассматривая совместно ряд индексов, можно делать оценку их **взаимной ковариации**, строя ковариационную матрицу.

Таким образом, делая заключение об общих закономерностях поведения сегмента рынка, можно заключить, что в некоторой части эти выводы будут касаться и отдельных бумаг, наполняющих данный модельный класс. Во всяком случае, можно с большой долей уверенности говорить, что бумаги данного класса будут по доходности распределяться вблизи модельного значения **(бенчмарка**) и сильно коррелировать друг с другом. То есть совокупное поведение этого набора бумаг будет сильно походить на поведение индекса модельного класса, и в этом суть модельного портфельного выбора.

Анализируя динамику индекса за продолжительный период, можно делать предварительные заключения о характере рынка бумаг выбранного модельного класса. Тренд индекса показывает нам характер рынка: по доходности — «бычий» (растущий) или «медвежий» (падающий); с точки зрения риска — нейтральный (характеризующийся низкой колеблемостью) или волатильный (колеблемый). Все собранные выводы дают определенные основания для того, чтобы инвестор мог применять те или иные деривативные стратегии для увеличения доходности или снижения риска (хеджирования) своих модельных портфелей.

Ведущими агенствами США, разработавшими в свое время популярные фондовые индексы и поддерживающими их, являются Moody”s, Standard & Poor”s, Morgan Stanley, Salomon Smith Barney, Bloomberg и другие.

3. РОССИЙСКАЯ СПЕЦИФИКА

Десять лет существования рынка ценных бумаг – это **ничтожный** срок, как с точки зрения формирования рынка, так и с точки зрения анализа статистики этого рынка. И как расценивать накопленную куцую статистику? Здесь больше вопросов, чем ответов. Поглядев на перфоманс индекса биржи РТС, можно просто растеряться (см. рис. 1).

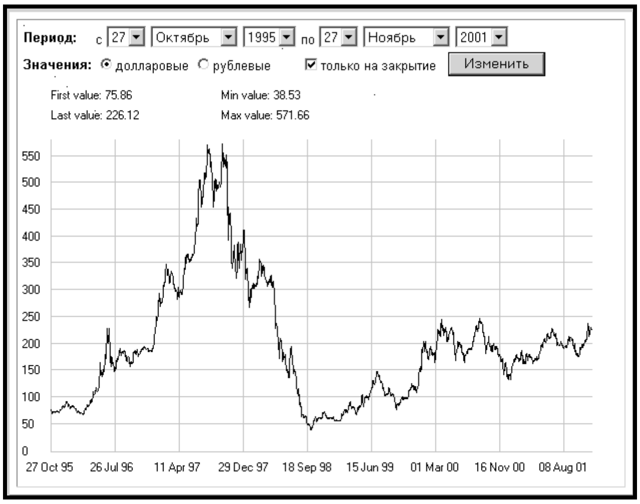

Рис. 1. Индекс РТС за прошедшие 5 лет

Сегодня мы можем говорить о **четырех** модельных классах российских ценных бумаг, куда в основном направляются фондовые инвестиции:

- Государственные ценные бумаги и облигации субъектов РФ;
- Корпоративные облигации и векселя;
- Акции десятка наиболее продвинутых компаний («голубых фишек» местного значения).
- Корпоративные акции второго эшелона.

Постепенно оживает торговля фьючерсами и опционами на акции, однако инвестиции в производные ценные бумаги мы здесь не рассматриваем как модельные. Также мы не рассматриваем в качестве фондовых инвестиции в мультивалютные портфели и в депозитные сертификаты банков, хотя в портфелях инвесторов эти инструменты могут присутствовать наряду с перечисленными выше фондовыми активами.

Что касается индексов, то здесь — непаханое поле для работы биржевых аналитиков. **Не существует (!)** публичных индексов для ценных бумаг с фиксированным доходом. В качестве индекса корпоративных акций первого эшелона можно рассматривать индексы РТС [5] (валютный и технический), индекс ММВБ-10 [6], а также композитный индекс РБК[7] — с поправкой на то, что акции РАО «Газпром» не входят в оценку индексов РТС и ММВБ. А что до акций второго эшелона, то объем торгов по ним незначителен, и должного внимания этому сегменту рынка (его индексированию, к примеру) не уделяется.

Вся эта скудость неприятно контрастирует с изобилием, представленном на сайте Казахстанской фондовой биржи KASE [8]. Все фондовые индексы биржи (более двух десятков) разбиты на ряд групп, а именно:

- индексы внешнего валютного долга Казахстана;
- индексы внутреннего долга Казахстана;
- индексы текущих ставок по сделкам «репо»;
- индексы ставок межбанковского рынка депозитов;
- индексы негосударственных облигаций;
- индексы рынка акций.

Такое пристальное внимание к рыночным индикаторам можно объяснить только одним – бурными темпами пенсионной реформы в Казахстане, когда на рынок капиталов выходят институциональные инвесторы – негосударственные пенсионные фонды, с суммарным объемом предложения денег свыше 1 млрд. долл (подробно я писал об этом в [1]). Эти инвесторы, нуждаясь в полноценной информации для управления своими фондовыми портфелями, подталкивают KASE к максимальному предложению аналитических материалов и инструментов для анализа рынка в рамках финансового портала биржи.

Сегодня Казахстан обгоняет Россию примерно на 3-4 года по развитости фондового рынка, хотя Россия в свое время опережала Казахстан в этих вопросах. Так что время упущено, и необходимо в кратчайшие сроки наверстывать отставание, используя не только мировой опыт, но и опыт наших ближайших соседей.

4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В РАСПЛЫВЧАТЫХ УСЛОВИЯХ

4.1. Общие замечания

На первый взгляд кажется, что нет смысла придумывать велосипед и следует просто обратиться к мировой практике научного протфолио-менеджмента, в основе которого лежат труды нобелевских лауреатов Г.Марковица и У.Шарпа (подходы этих авторов собраны в популярном объемном труде [9]).

Однако надо сразу отметить, что изыскания Марковица и Шарпа состоялись на рынке, обладающем солидной предысторией. Уже существовали фондовые индексы Доу-Джонса и S&P 500, можно было принять допущение о том, что индексы как сумма большого числа случайных величин обладают статистической природой и описывают статистически однородные объекты – рыночные сегменты с неизменной стохастической природой. И из этих допущений вытекает, что существуют устойчивые в статистическом смысле портфельные решения, которые максимизируют среднеожидаемую доходность модельных портфелей при фиксированной ожидаемой волатильности портфеля.

Можно сказать, что теория Марковица хорошо работает на временных отрезках между экономическими кризисами, на участках подъема экономики, когда наблюдается ее устойчивый рост. В условиях же крахов и рецессий крах терпит и теория Марковица. Например: инвестируя в акции высокотехнологичных компаний, можно было бы, руководствуясь подходом максимизации дохода, сразу же набить этими акциями весь модельный портфель, вытесняя из портфеля «вялые» облигации. Но как только индекс NASDAQ рухнул, все инвесторы сразу стали вспоминать, что облигации, дающие хоть и низкий, но стабильный доход, положительно отличаются от бумаг, которые имеют свойство перегреваться, а потом в одно мгновение теряют в весе, возвращаясь к ценам десятилетней давности.

Российский рынок еще не претерпевал серьезных рецессий, потому что и сам рынок по возрасту еще молод – российскому рынку всего **16 лет**, господа, а Амстердамской фондовой бирже скоро уж **400 лет** – почувствуйте разницу! – да и нечему особенно рецессировать. Сначала надо развиться до каких-то рубежей, «перегреться» (как сделали это в свое время страны Южной Азии) — а уж затем, под влиянием каких-то неблагоприятных внешних условий (например, под градом атак Сороса на национальную валюту), терять завоеванные рубежи, девальвировать рубль, стагнировать, снижать ставку рефинансирования Центробанка и т.д. Можно преспокойно еще лет 10 не забивать себе голову вопросами цикличности российской экономики, а обратить внимание на то, что происходит на развитых рынках.

Давайте приглядимся к индексу S&P 500, который безо всяких натяжек можно считать национальным индексом американской экономики (рис. 2). Ясно, что кривая рис. 2 не может выражать поведение статистически однородного объекта. Существуют словно бы два объекта анализа. Один – это рынок американских акций до 2001 года, характеризующийся устойчивым низковолатильным ростом прямо по экспоненциальной формуле Винера (см., например, [10]), «бычий» рынок. А есть рынок «после», «медвежий», или волатильный, растерявшийся, ищущий дна и новых экономических ориентиров. У этих двух означенных рынков нет и не может быть единой статистики.

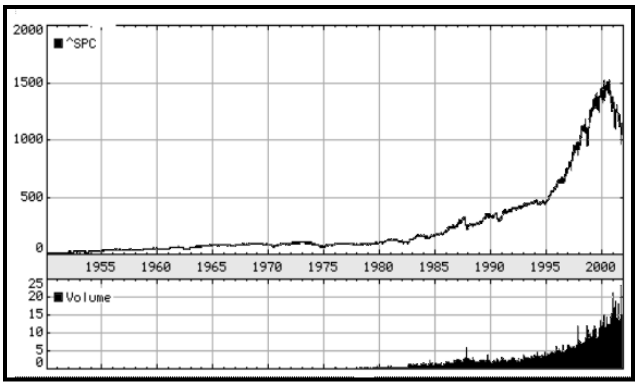

Рис. 2. Индекс S&P 500 с 1955 по 2001 год

Тем не менее для прогнозирования перфоманса индекса нет никаких других данных, кроме неоднородной предыстории «до» и после». **Как эту предысторию использовать для прогноза**, вот вопрос.

И здесь может оказать существенную помощь теория нечетких множеств, результаты которой мы уже применяли для анализа фондового рынка в работах [11] – [14], в том числе и для задач портфельной оптимизации. Чтобы рассказать, как мы видим возможность портфельной оптимизации в условиях «дурной» неопределенности, нам необходимо описать базовые формализмы теории нечетких множеств, которые мы намерены здесь использовать. В упомянутых работах часть формализмов теории нечетких мнодеств введена, однако хочется повторить этот труд, упомянув еще ряд формализмов, которые в обозначенных работах не вводились, а без этого последующее изложение невозможно.

4.2. Понятие квазистатистики

Прежде чем вводить определение квазистатистики, целесообразно определиться с исходным термином «статистика». Этот термин многозначен и имеет огромное количество определений. Я привожу часть из них, цитируя [15].

«Цель статистики должна состоять в исследовании закономерностей во взаимосвязях и отношениях, выделении абсолютного в относительных явлениях, в исследовании постоянства среди непостоянного и узнавания во вновь найденном уже открытого закона» (J. E. Worl. Eriaute-rungen zur Theorie der Statistik).

«Слово <статистика> происходит от слова «государство» (state пли Staat) и означает группу людей, живущих в общественном союзе; оно включает все характеристики их состояния» (Encyclopaedia Britannica. 7th ed.).

«Статистика — это наука, функцией которой является сбор и упорядочивание данных, относящихся к физическому, социальному, политическому, финансовому, интеллектуальному и моральному состоянию и ресурсам государства или народа» (New American Encyclopaedia).

«Статистика — методический индуктивный прием для нахождения и объяснения механизмов, действующих в человеческом обществе и природе, т. е. для вывода и объяснения законов, по которым эти механизмы функционируют, и для обнаружения и исследования причинной связи, которая имеется между отдельными феноменами природы и человеческого общества; а именно, такой прием, который ведет к точному количественному определению на основе систематических массовых наблюдений над этими феноменами» (A. Wagner. Statistik. Bluntschli Brater"s Deutsches Staatsworterbuch).

«Статистика — это описание любого класса фактов, выраженных числами». (H. C. Adams. Statistics. Johnson"s Universal Cyclopaedia)

«Статистика есть; 1. Толкуемое как единственное число. В современном употреблении — раздел исследований, имеющий в качестве объекта сбор и обработку числовых фактов или данных относительно либо сферы человеческой деятельности, либо явлений природы. 2. Толкуемое во множественном числе. Числовые факты или данные, собранные и расклассифицированные» (New Oxford Dictionary).

«Математическая статистика — раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. При этом статистическими данными называются сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками» (БСЭ, т. 26, 2-е изд., А, Н, Колмогоров. Математическая статистика).

«Основным понятием математической статистики является выборка или совокупность наблюдений какого-либо количественного показателя» (Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы математике-статистической теории обработки наблюдений).

«В наше время принято считать, что математическая статистика есть наука, изучающая теорию принятия решений в условиях неопределенности. Это определение математической статистики выкристаллизовывалось в результате многих лет ее развития. Достоинство этого определения состоит в том, что оно в сжатой и ясной форме излагает научное существо статистики » (Г. Чернов, Л. Мозес. Элементарная теория статистических решений. 1962).

«Статистику иногда определяют как искусство и науку количественной обработки наблюдений, подверженных изменениям» (E. V. Lewis. Statistical Analysis. Ideas and Methods).

«Как известно, статистику часто определяют как науку о методах исследования закономерностей массовых процессов. Для математической статистики это общее определение можно модифицировать следующим образом: математическая статистика есть наука о методах умозаключения, о свойствах соответствующей генеральной совокупности на основе наблюдений над репрезентативной выборочной совокупностью, причем данные наблюдений отбираются из генеральной совокупности в случайном порядке. Таким образом, основная задача математической статистики — разработка методов, позволяющих обобщать результаты наблюдений» (3. Павловский. Введение в математическую статистику).

Во всех перечисленных определениях есть *общее зерно*, которое, собственно, и относится к статистике в самом общем смысле слова, и это зерно в следующем. Мы имеем некий набор наблюдений по одному объекту или по совокупности объектов. Причем мы предполагаем, что за случайной выборкой наблюдений из гипотетической их *генеральной совокупности* кроется некий фундаментальный **закон распределения**, который сохранит свою силу еще на определенный период времени в будущем, что позволит нам прогнозировать тренд будущих наблюдений и расчетный диапазон отклонений этих наблюдений от расчетных ожидаемых трендовых значений.

Если мы договорились, что все наблюдения совершались в неизменных однотипных внешних условиях и/или наблюдались объекты с одинаковыми свойствами по факту, например, их появления по одной и той же причине, то мы оцениваем и подтверждаем искомый закон распределения частотным методом. Разбивая весь допустимый диапазон наблюдаемого параметра на ряд равных интервалов, мы можем подсчитать, сколько наблюдений попало в каждый выбранный интервал, то есть построить *гистограмму.* Известными методами мы можем перейти от гистограммы к *плотности вероятностного распределения,* параметры которого можно оптимальным образом подобрать. Таким образом, идентификация статистического закона завершена.

Если же мы имеем дело с «дурной» неопределенностью, когда у нас нет достаточного количества наблюдений, чтобы вполне корректно подтвердить тот или иной закон распределения, или мы наблюдаем объекты, которые, строго говоря, нельзя назвать однородными, тогда классической статистической выборки нет.

В то же время мы, даже не имея достаточного числа наблюдений, склонны подразумевать, что за ними стоит проявление некоторого закона. Мы не можем оценить параметры этого закона вполне точно, но мы можем прийти к определенному соглашению о виде этого закона и о диапазоне разброса ключевых параметров, входящих в его математическое описание. И вот здесь уместно ввести понятие квазистатистики.

Квазистатистика – эта выборка наблюдений из их генеральной совокупности, которая считается недостаточной для идентификации вероятностного закона распределения с точно определенными параметрами, но признается достаточной для того, чтобы с той или иной субъективной степенью достоверности обосновать закон наблюдений в вероятностной или любой иной форме, причем параметры этого закона будут заданы по специальным правилам, чтобы удовлетворить требуемой достоверности идентификации закона наблюдений.

Такое определение квазистатистики дает расширительное понимание вероятностного закона, когда он имеет не только частотный, но и субъективно-аксиологический смысл. Здесь намечены контуры синтеза вероятности в классическом смысле — и вероятности, понимаемой как структурная характеристика познавательной активности эксперта-исследователя.

Также это определение намечает широкое поле для компромисса в том, что считать достаточным объемом выборки, а что – нет. Например, эксперт, оценивая финансовое положение предприятий машиностроительной отрасли, понимает, что каждое предприятие отрасли уникально, занимает свою рыночную нишу и т.д., и поэтому классической статистики нет, даже если выборка захватывает сотни предприятий. Тем не менее, эксперт, исследуя выборку какого-то определенного параметра, подмечает, что для большинства работающих предприятий значения данного параметра группируются внутри некоторого расчетного диапазона. И эта закономерность дает эксперту основания утверждать, что имеет место закон распределения, и далее эксперт может подыскивать этому закону вероятностную или, к примеру, нечетко-множественную форму.

Аналогичные рассуждения можно провести, если эксперт наблюдает один параметр единичного предприятия, но во времени. Ясно, что в этом случае статистическая однородность наблюдений отсутствует, поскольку со временем непрерывно меняется рыночное окружение фирмы, условия ее хозяйствования, производственные факторы и т.д. Тем не менее, эксперт, оценивая *некоторое достаточно приличное количество* наблюдений, может сказать, что вот это состояние параметра *типично* для фирмы, а вот это – *из* *ряда вон*. Таким образом, эксперт высказывается о законе распределения параметра таким образом, что классифицирует все наблюдения нечетким, лингвистическим способом, и это уже само по себе есть факт генерации немаловажной для принятия решений информации. И, раз закон распределения сформулирован, то эксперт имел дело с квазистатистикой.

Понятие квазистатистики, введенное здесь, дает широкий простор для применения нечетких описаний для моделирования законов, по которым проявляется та или иная совокупность наблюдений. Строго говоря, не постулируя квазистатистики, нельзя вполне обоснованно с научной точки зрения моделировать неоднородные и ограниченные по объему наблюдения процессы, протекающие на фондовом рынке и в целом в экономике.

4.3. Носитель

Носитель U – это универсальное множество, к которому относятся все результаты наблюдений в рамках оцениваемой квазистатистики. Например, если мы наблюдаем возраст занятых в определенных отраслях экономики, то носитель – это отрезок вещественной оси [16, 70], где единицей измерения выступают годы жизни человека.

4.4. Нечеткое множество

*Нечеткое множество **A*** – это множество значений носителя, такое, что каждому значению носителя сопоставлена степень принадлежности этого значения множеству **A**. Например: буквы латинского алфавита ***X, Y, Z*** безусловно принадлежат множеству **Alphabet= = *{A, B, C, X, Y, Z}*,** и с этой точки зрения множество **Alphabet –** четкое. Но если анализировать множество **«Оптимальный возраст работника»**, то возраст 50 лет принадлежит этому нечеткому множеству только с некоторой долей условности μ, которую называют функцией принадлежности.

4.5. Функция принадлежности

Функция принадлежности $\mu_A(u)$ – это функция, областью определения которой является носитель U, $u \in U$, а областью значений – единичный интервал [0,1]. Чем выше $\mu_A(u)$, тем выше оценивается степень принадлежности элемента носителя u нечеткому множеству A. Например [16], на рис. 3 представлена функция принадлежности нечеткого множества **«Оптимальный возраст работающего»,** полученная на основании опроса ряда экспертов.

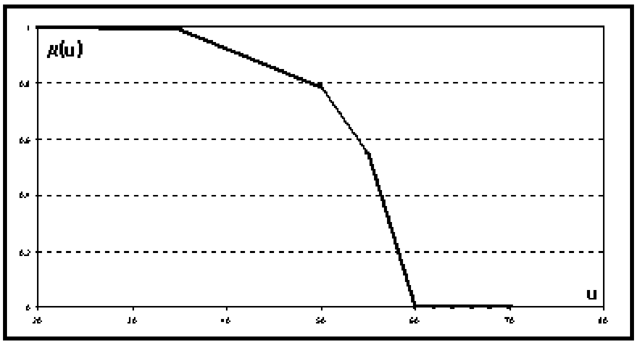

Рис. 3. Функция принадлежности нечеткого подмножества «Оптимальный возраст работника»

Видно что возраст от 20 до 35 оценивается экспертами как бесспорно оптимальный, а от 60 и выше – как бесспорно неоптимальный. В диапазоне от 35 до 60 эксперты проявляют неуверенность в своей классификации, и структура этой неуверенности как раз и передается графиком функции принадлежности.

4.6. Лингвистическая переменная

Заде **[17]** определяет лингвистическую переменную так:

$$\Omega = \langle \omega, T(\omega), U, G, M \rangle, \qquad (1)$$

где

ω — название переменной;

T – терм-множество значений, т.е. совокупность ее лингвистических значений;

U – носитель;

G – синтаксическое правило, порождающее термы множества T;

M – семантическое правило, которое каждому лингвистическому значению ω ставит в соответствие его смысл $M(\omega)$, причем $M(\omega)$ обозначает нечеткое подмножество носителя U.

К примеру, зададим лингвистическую переменную Ω **= «Возраст работника».** Определим синтаксическое правило G как определение «оптимальный», налагаемое на переменную Ω**.** Тогда полное терм-множество значений T = **{** T_1 = Оптимальный возраст работника, T_2 = Неоптимальный возраст работника **}.** Носителем U выступает отрезок [20, 70], измеряемый в годах человеческой жизни. И на этом носителе определены две функции принадлежности: для значения T_1 — $\mu_{T1}(u)$, она изображена на рис. 3, для T_1 — $\mu_{T2}(u)$, причем первая из них отвечает нечеткому подмножеству M_1, а вторая – M_2. Таким образом, конструктивное описание лингвистической переменной завершено.

4.7. Операции над нечеткими подмножествами

Для классических множеств вводятся операции:

- **пересечение множеств** – операция над множествами ***A*** и ***B***, результатом которой является множество ***C = A ∩ B***, которое содержит только те элементы, которые принадлежат и множеству ***A***, и множеству ***B***;
- **объединение множеств** — операция над множествами ***A*** и ***B***, результатом которой является множество ***C = A ∪ B***, которое содержит те элементы, которые принадлежат множеству ***A***, или множеству ***B***, или обоим множествам;
- **отрицание множеств** — операция над множеством **A**, результатом которой является множество **C** = ¬ **A**, которое содержит все элементы, которые принадлежат универсальному множеству, но не принадлежат множеству **A**.

Заде предложил набор аналогичных операций над нечеткими множествами через операции с функциями принадлежности этих множеств. Так, если множество ***A*** задано функцией $\mu_A(u)$, а множество ***B*** задано функцией $\mu_B(u)$, то результатом операций является множество ***C*** с функцией принадлежности $\mu_C(u)$, причем:

если $C = A \cap B$, *то* $\mu_C(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u))$; **(2)**

если $C = A \cup B$, *то* $\mu_C(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u))$; **(3)**

если $C = \neg A$, *то* $\mu_C(u) = 1-\mu_A(u)$. **(4)**

4.8. Нечеткие числа и операции над ними

Нечеткое число – это нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющее *нормальную* и *выпуклую* функцию принадлежности, то есть такую, что:

а) существует такое значение носителя, в котором функция принадлежности равна единице, а также

б) при отступлении от своего максимума влево или вправо функция принадлежности убывает.

Рассмотрим два типа нечетких чисел, которые нам понадобятся для дальнейшего.

4.8.1. Трапециевидные (трапезоидные) нечеткие числа

Исследуем некоторую квазистатистику и зададим лингвистическую переменную Ω = **«Значение параметра *U*»**, где ***U*** – множество значений носителя квазистатистики. Выделим два терм-множества значений: T_1 = «***U*** у лежит *в диапазоне примерно* от ***a*** до ***b***» с нечетким подмножеством M_1 и безымянное значение T_2 с нечетким подмножеством M_2, причем выполняется $M_2 = \neg M_1$. Тогда функция принадлежности $\mu_{T1}(u)$ имеет трапезоидный вид, как показано на рис. 4.

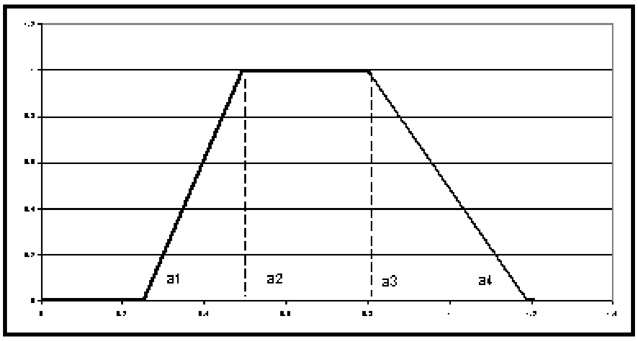

Рис. 4. Функция принадлежности трапециевидного числа

Поскольку границы интервала заданы нечетко, то разумно ввести абсциссы вершин трапеции следующим образом:

$$a = (a_1+a_2)/2, \quad в = (в_1+в_2)/2, \qquad (5)$$

при этом отстояние вершин a_1, a_2 и $в_1$, $в_2$ соответственно друг от друга обуславливается тем, какую семантику мы вкладываем в понятие *«примерно»*: чем больше разброс квазистатистики, тем боковые ребра трапеции являются более пологими. В предельном случае понятие «примерно» вырождается в понятие *«где угодно»*.

Если мы оцениваем параметр качественно, например, высказавшись: «Это значение параметра является *средним*», - необходимо ввести уточняющее высказывание типа: «*Среднее* значение – это *примерно* от ***a*** до ***b***», - которое есть предмет экспертной оценки (нечеткой классификации), и тогда можно использовать для моделирования нечетких классификаций трапезоидные числа. На самом деле, это самый естественной способ неуверенной классификации.

4.8.2. Треугольные нечеткие числа

Теперь для той же лингвистической переменной зададим терм-множество T_1={U *приблизительно равно* a}. Ясно, что $a \pm \delta \approx a$, причем по мере убывания δ до нуля степень уверенности в оценке растет до единицы. Это, с точки зрения функции принадлежности, придает последней треугольный вид (рис. 2.4), причем степень приближения характеризуется экспертом.

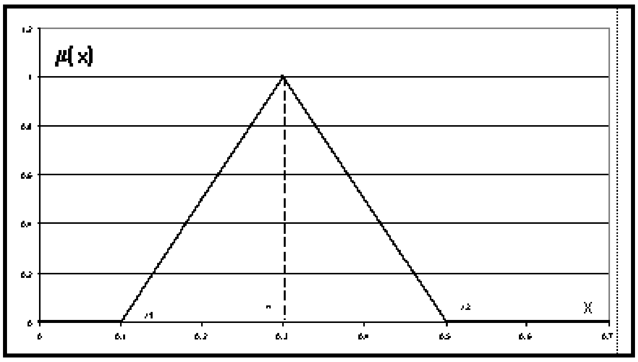

Рис. 5. Функция принадлежности треугольного нечеткого числа

Треугольные числа – это самый часто используемый на практике тип нечетких чисел, причем чаще всего — в качестве прогнозных значений параметра.

4.8.3. Операции над нечеткими числами

Целый раздел теории нечетких множеств – мягкие вычисления (нечеткая арифметика) — вводит набор операций над нечеткими числами. Эти операции вводятся через операции над функциями принадлежности на основе так называемого **сегментного принципа**.

Определим *уровень принадлежности* α как ординату функции принадлежности нечеткого числа. Тогда пересечение функции принадлежности с нечетким числом дает пару значений, которые принято называть *границами интервала достоверности*.

Зададимся фиксированным уровнем принадлежности α и определим соответствующие ему интервалы достоверности по двум нечетким числам $\underline{A}$ и $\underline{B}$: $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$, соответственно. Тогда основные операции с нечеткими числами сводятся к операциям с их интервалами достоверности. А операции с интервалами, в свою очередь, выражаются через операции с действительными числами — границами интервалов:

- операция "сложения":
  $[a_1, a_2]\ (+)\ [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$, **(6)**

  операция "вычитания":
  $[a_1, a_2]\ (-)\ [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$, **(7)**
- операция "умножения":
  $[a_1, a_2]\ (\times)\ [b_1, b_2] = [a_1 \times b_1, a_2 \times b_2]$, **(8)**
- операция "деления":
  $[a_1, a_2]\ (/)\ [b_1, b_2] = [a_1 / b_2, a_2 / b_1]$, **(9)**
- операция "возведения в степень":
  $[a_1, a_2]\ (\wedge)\ i = [a_1^i, a_2^i]$. **(10)**

Из существа операций с трапезоидными числами можно сделать ряд важных утверждений (без доказательства):

- действительное число есть частный случай треугольного нечеткого числа;
- сумма треугольных чисел есть треугольное число;

- треугольное (трапезоидное) число, умноженное на действительное число, есть треугольное (трапезоидное) число;
- сумма трапезоидных чисел есть трапезоидное число;
- сумма треугольного и трапезоидного чисел есть трапезоидное число.

Анализируя свойства нелинейных операций с нечеткими числами (например, деления), исследователи приходят к выводу, что форма функций принадлежности результирующих нечетких чисел часто близка к треугольной. Это позволяет аппроксимировать результат, приводя его к треугольному виду. И, если приводимость налицо, тогда *операции с треугольными числами сводятся к операциям с абсциссами вершин их функций принадлежности.*

То есть, если мы вводим описание треугольного числа набором абсцисс вершин (a, b, c), то можно записать:

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) \equiv (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \quad (11)$$

Это – самое распространенное правило мягких вычислений.

4.9. Нечеткие последовательности, нечеткие прямоугольные матрицы, нечеткие функции и операции над ними

Нечеткая последовательность – это пронумерованное счетное множество нечетких чисел.

Нечеткая прямоугольная матрица – это дважды индексированное конечное множество нечетких чисел, причем первый индекс пробегает ***M*** строк, а второй — ***N*** столбцов. При этом, как и в случае матриц действительных чисел, операции над нечеткими прямоугольными матрицами сводятся к операциям над нечеткими компонентами этих матриц. Например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \otimes b_{11} \oplus a_{12} \otimes b_{21} & a_{11} \otimes b_{12} \oplus a_{12} \otimes b_{22} \\ a_{21} \otimes b_{11} \oplus a_{22} \otimes b_{21} & a_{21} \otimes b_{12} \oplus a_{22} \otimes b_{22} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где все операции над нечеткими числами производятся так, как они введены параграфом выше.

Поле нечетких чисел – это несчетное множество нечетких чисел.

Нечеткая функция – это взаимно однозначное соответствие двух полей нечетких чисел. В наших приложениях область определения нечеткой функции является осью действительных чисел, то есть вырожденным случаем поля нечетких чисел, когда их треугольные функции принадлежности вырождаются в точку с координатами ***(a, 1)***.

Нечеткую функцию уместно назвать по типу тех чисел, которые характеризуют область ее значений. Если поле значений – это поле треугольных чисел, то и саму функцию уместно назвать *треугольной*.

Например [18], прогноз продаж компании (нарастающим итогом) задан тремя функциями вещественной переменной: $f_1(T)$ – оптимистичный прогноз, $f_2(T)$ – пессимистичный прогноз, $f_3(T)$ – среднеожидаемые значения продаж, где ***T*** – время прогноза. Тогда лингвистическая переменная **«Прогноз продаж в момент T»** есть треугольное число ($f_1(T), f_2(T), f_3(T)$), а все прогнозное поле есть треугольная нечеткая функция (рис. 2.5), имеющая вид криволинейной полосы.

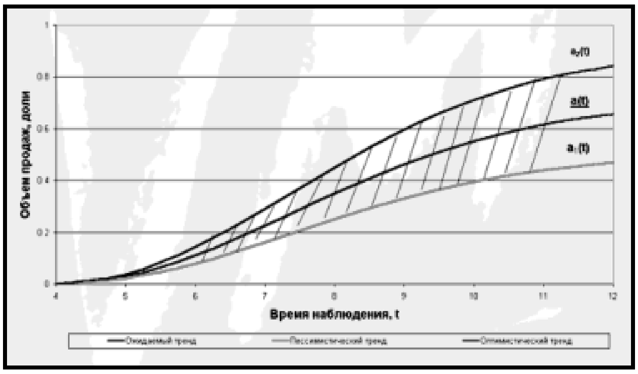

Рис. 6. Нечеткий прогноз продаж

Рассмотрим ряд операций над треугольными нечеткими функциями (утверждения приводятся без доказательства):

- **сложение**: сумма (разность) треугольных функций есть треугольная функция;
- **умножение на число** переводит треугольную функцию в треугольную функцию;
- **дифференцирование (интегрирование)** треугольной нечеткой функции проводится по правилам вещественного дифференцирования (интегрирования):

$$\frac{d}{dT}\,(f_1(T), f_2(T), f_3(T)) = \Big(\frac{d}{dT} f_1(T),\ \frac{d}{dT} f_2(T),$$

$$\frac{d}{dT} f_3(T) \Big), \quad (13)$$

$$\int (f_1(T), f_2(T), f_3(T))\, dT = \Big(\int f_1(T)dT,\ \int f_2(T)\, dT,$$

$$\int f_3(T)\, dT \Big), \quad (14)$$

- функция, зависящая от нечеткого параметра, является нечеткой.

4.10. Вероятностное распределение с нечеткими параметрами

Пусть имеется квазистатистика и ее гистограмма, и пусть одна из возможных плотностей вероятностной функции распределения, приближающая квазистатистику, обозначается нами как $p(u, \aleph)$, где u – значение носителя, $u \in U$, $\aleph = (x_1,\ldots, x_N)$ — вектор параметров распределения размерностью ***N***.

Произведем гипотетический эксперимент. Оценим вид функции распределения $p(\bullet)$, производя вариацию всех параметров вектора $\aleph$. При этом зададимся критерием правдоподобия нашего распределения – унимодальной гладкой функцией без изломов и разрывов (например, квадратичной многомерной параболой) — и пронормируем значение критерия. Например, если максимум правдоподобия имеет значение ***L***, то вектор параметров $\aleph$ приобретает значение, которое мы будем называть *контрольной точкой,* или *точкой ожидания* с координатами $(x_{1L},\ldots, x_{NL})$. Мы можем производить нормирование правдоподобия, задавшись некоторым процентом максимума правдоподобия, ниже которого наши вероятностные гипотезы бракуются. Тогда всем правдоподобным вероятностным гипотезам отвечает множество векторов $\aleph'$, которое в ***N***-мерном фазовом пространстве представляет собой выпуклую область с нелинейными границами.

Впишем в эту область ***N***-мерный параллелепипед максимального объема, грани которого сориентированы параллельно фазовым осям. Тогда этот параллелепипед представляет собой усечение $\aleph''$ и может быть описан набором интервальных диапазонов по каждой компоненте

$$\aleph'''' = (x_{11}, x_{12}; x_{21}, x_{22}; \dots x_{N1}, x_{N2}) \in \aleph''. \qquad (15)$$

Назовем $\aleph''''$ *зоной предельного правдоподобия*. Разумеется, контрольная точка попадает в эту зону , то есть выполняется

$$x_{11} \le x_{1L} \le x_{12}, \dots, x_{N1} \le x_{NL} \le x_{N2}, \qquad (16)$$

что вытекает из унимодальности и гладкости критерия правдоподобия.

Тогда мы можем рассматривать числа (x_{i1}, x_{iL}, x_{i2}) как треугольные нечеткие параметры плотности распределения, которая и сама в этом случае имеет вид нечеткой функции. А зона предельного правдоподобия тогда есть не что иное, как *нечеткий вектор*.

Мы видим, что полученное вероятностное распределение имеет не только частотный, но и субъективный смысл, так как зона предельного правдоподобия зависит от того, как мы бракуем вероятностные гипотезы. Представляется, что такое описание всецело отвечает природе квазистатистики, как мы ее здесь вводим. Чем хуже условия для выдвижения правдоподобных вероятностных гипотез, чем тяжелее обосновывать такое правдоподобие, — тем большее значение занимает фактор экспертной оценки. То вероятностное описание, что мы имеем в итоге, — это гибрид, который обещает быть плодотворным.

В качестве примера можно рассмотреть нормальный закон распределения с нечетким среднеквадратическим отклонением (рис. 7). Эта нечеткая функция не имеет полосового вида. И тут замое время заметить, что *функция с треугольными нечеткими параметрами в общем случае сама не является треугольной и к треугольному виду не приводится.*

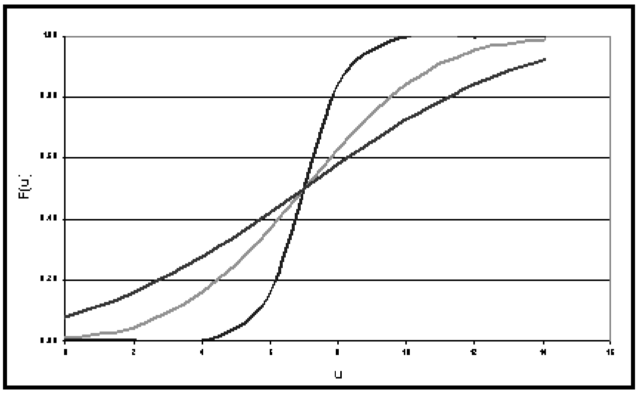

Рис. 7. Нормальный закон распределения с нечетким среднеквадратическим отклонением

Зато выполняется нормировочное условие:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(u, \aleph'')du = 1, \qquad (17)$$

где правая часть представляет собой нечеткое число с вырожденной в точку функцией принадлежности. Интеграл же, не определенный для нечетких функций общего вида, представляет здесь предел сумм:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(u, \aleph'')du = \lim_{\Delta u \to 0} \sum_{(\Delta u)} (p(u, \aleph'') + p(u + \Delta u, \aleph''))\frac{\Delta u}{2}. \qquad (18)$$

Приложим все сказанное к нечеткой оценке параметров доходности и риска фондового индекса. Пусть у нас есть квазистатистика доходностей $(r_1, \dots r_N)$ мощности ***N*** и соответствующая ей гистограмма $(\nu_1, \dots, \nu_M)$ мощности ***M***. Для этой квазистатистики мы подбираем двупараметрическое нормальное распределение $\varphi(\bullet)$ с матожиданием μ и дисперсией σ, руководствуясь критерием правдоподобия:

$$F(\mu, \sigma) = -\sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\nu_i}{\Delta r} - \varphi(r_i, \mu, \sigma)\right)^2 \to \max, \qquad (19)$$

где

r_i – отвечающее ***i***-му столбцу гистограммы расчетное значение доходности,

Δr – уровень дискретизации гистограммы.

Задача (19) – это задача нелинейной оптимизации, которое имеет решение:

$$F_0 = \max_{(\mu, \sigma)} F(\mu, \sigma), \qquad (20)$$

причем μ_0, σ_0 – аргументы максимума $F(\mu,\sigma)$, представляющие *собой контрольную точку*.

Выберем уровень отсечения $F_1 < F_0$ и признаем все вероятностные гипотезы правдоподобными, если соответствующий критерий правдоподобия лежит в диапазоне от F_1 до F_0. Тогда всем правдоподобным вероятностным гипотезам отвечает множество векторов $\aleph''$, которое в двумерном фазовом пространстве представляет собой выпуклую область с нелинейными границами.

Впишем в эту область прямоугольник максимальной площади, грани которого сориентированы параллельно фазовым осям. Тогда этот прямоугольник – зона предельного правдоподобия — представляет собой усечение $\aleph''$ и может быть описан набором интервальных диапазонов по каждой компоненте

$$\aleph'''' = (\mu_{min}, \mu_{max}; \sigma_{min}, \sigma_{max}) \in \aleph''. \qquad (21)$$

Разумеется, контрольная точка попадает в эту зону, то есть выполняется

$$\mu_{min} < \mu_0 < \mu_{max}, \ \sigma_{min} < \sigma_0 < \sigma_{max}, \qquad (22)$$

что вытекает из унимодальности и гладкости функции правдоподобия.

Тогда мы можем рассматривать числа

$\mu = (\mu_{min}, \mu_0, \mu_{max})$, $\sigma = (\sigma_{min}, \sigma_0, \sigma_{max})$,

как треугольные нечеткие параметры плотности распределения $\varphi(\bullet)$, которая и сама в этом случае имеет вид нечеткой функции.

Все сказанное проще понять на нижеследующем **расчетном примере**.

По результатам 7-летних помесячных наблюдений за индексом 30-летних правительственных облигаций США [19] сформирована квазистатистика мощностью N=84 отсчета, представленная в диапазоне

4 ÷ +15 процентов годовых следующей гистограммой с уровнем дискретизации 2% годовых мощностью ***M***=10 интервалов (см. табл. 1).

Оценить нечеткие параметры нормального распределения доходности.

Решение расчетного примера

Решением задачи нелинейной оптимизации (20) является F_0 = -0.306 при μ_0 = 6.1% годовых, σ_0 = 0.7% годовых. При этих значениях соотношение экспериментальной и теоретической плотности распределения представлено на рис. 8.

Сразу обращаем внимание читателя на то, что теоретическая плотность в нашем случае никоим образом не является аппроксимацией экспериментального ряда. Это было бы нелепо уже хотя бы потому, что экспериментальный ряд указывает на **бимодальный** вид распределения. Наша логика состоит в ином. Мы говорим о том, что квазистатистика собрана на изначально неоднородных, «дурных» исходных данных, и мы ищем такое распределение, которому эта квазистатистика наилучшим образом отвечала, если бы была статистикой в классическом смысле слова, в предположении винеровского случайного процесса.

Зададимся уровнем отсечения F_1 = -0.41. В табл. 2 сведены значения критерия правдоподобия, и в ней курсивом выделены значения, удовлетворяющие выбранному нами критерию правдоподобия.

Таблица 1

РАСЧЕТНЫЙ ПРИМЕР

Расчетная доходность r_i,% годовых (правый край интервала)	Число попавших в интервал отсчетов квазистатистики n_i	Экспериментальная плотность распределения
5	2	0.119
5.2	4	0.238
5.4	3	0.179
5.6	7	0.417
5.8	11	0.655
6	12	0.714
6.2	10	0.595
6.4	4	0.238
6.6	5	0.298
6.8	10	0.595
7	8	0.476
7.2	2	0.119
7.4	1	0.060
7.6	2	0.119
7.8	1	0.060
8	2	0.119

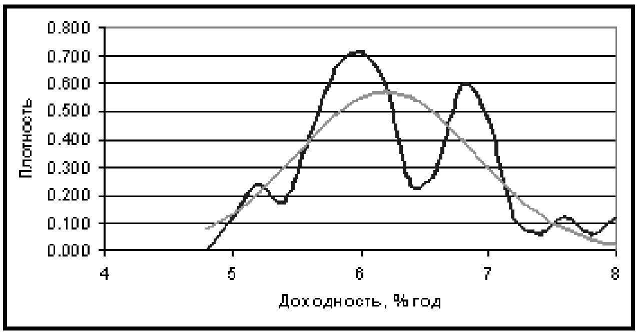

Рис. 8. Соотношение теоретической и экспериментальной плотностей распределения

И тогда координаты зоны предельного правдоподобия, исходя из таблицы 2:

$$\aleph'''' = (6.0, 6.2;\ 0.6, 0.8), \qquad (23)$$

и

μ = (6.0, 6.1, 6.2), σ = (0.6, 0.7, 0.8) – искомая нечеткая оценка параметров распределения.

4.11. Нечеткие знания

Назовем **формальным знанием** высказывание естественного языка, обладающее следующей структурой:

$$\textit{если } (A_1\Psi_1 A_2\Psi_2 \dots A_{N-1}\Psi_{N-1}A_N), \textit{ то } B, \qquad (24)$$

где

{A_i}, B – *атомарные высказывания (предикаты)*,

Ψ_i – *логические связки* вида И/ИЛИ,

N – *размерность условия*, причем атомарные высказывания – это

$$a\Theta X, \qquad (25)$$

где

a – *определяемый объект* (*аргумент*),

Θ — *логическая связка принадлежности* вида ЕСТЬ/НЕ ЕСТЬ,

X – *обобщение (класс объектов).*

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

μ	-F(μ,σ) × 1000 при σ =				
	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
5.8	826	658	579	0.551	556
6	544	*404*	*366*	*381*	422
6.2	535	*353*	*306*	*326*	*378*
6.4	747	493	*403*	*396*	430
6.6	1108	792	640	581	571

Также соблюдается *правило очередности* в рассмотрении фразы для понимания: сначала все связки И применяются к двум смежным предикатам, а затем все связки ИЛИ применяются к результатам предшествующих операций.

Например, классический вывод: «Если Сократ человек, а человек смертен, то и Сократ смертен», - можно преобразовать к структуре формального знания по следующим правилам:

- вводится два класса объектов X_1 = «Человек (Люди)» и X_2 = «Смертный (-ая, -ое)»;
- рассматриваются два аргумента: a_1 = «Сократ», a_2 = «Человек» = X_1.

Тогда наше знание имеет формулу:

$$\textit{если } a_1 \textit{ есть } X_1 \textit{ и } (a_2 = X_1) \textit{ есть } X_2$$
$$\textit{то } a_1 \textit{ есть } X_2. \qquad (26)$$

Очень часто в структуре знаний классы объектов являются нечеткими понятиями. Также высказывающиеся лица могут делать выводы, содержащие элементы неуверенности, оценочности. Это заставляет нас переходить от знаний в классическом понимании к знаниям нечетким.

Введем следующий набор лингвистических переменных со своим терм-множеством значений:

Θ = Отношение принадлежности = {Принадлежит, Скорее всего принадлежит, Вероятно принадлежит,...., Вероятно не принадлежит, Скорее всего не принадлежит, Не принадлежит} (27)

Δ = Отношение следования = {Следует, Скорее всего следует, Вероятно следует,...., Вероятно не следует, Скорее всего не следует, Не следует } (28)

AND/OR = *Отношение связи* ***= {И/ИЛИ, Скорее всего И/ИЛИ, Вероятно И/ИЛИ,....}*** (29)

Вводя эти переменные, мы предполагаем, что они содержат произвольное число оттеночных значений, ранжированных по силе (слабости) в определенном порядке. Носителем этих переменных может выступать единичный интервал.

Тогда под **нечетким знанием** можно понимать следующий формализм:

$$\textit{если } (a_1\Theta_1X_1\ \Psi_1\ a_2\Theta_2X_2\ \Psi_2 \dots a_N\Theta_NX_N)\ \Delta\ a_{N+1}\Theta_{N+1}X_{N+1}, \quad (30)$$

где

a_i, X_i –значения своих лингвистических переменных;

Θ_i –значение переменной принадлежности из Θ;

Ψ_1 –значение переменной связи из **AND/OR;**

Δ — терм-значение переменной следования из Δ.

Характерным примером нечеткого знания является высказывание типа: «Если *ожидаемое в ближайшей перспективе* отношение цены акции к доходам по ней *порядка* 10, и (*хотя и не обязательно*) капитализация этой компании *на уровне* 10 млрд. долларов, то, *скорее всего*, эти акции следует покупать». Курсивом обозначены все оценки, которые делают это знание нечетким.

Поскольку нечеткое знание определяется через лингвистические переменные, то и операции нечеткого логического вывода можно количественно определить на базе операций с соответствующими функциями принадлежности. Однако детальное рассмотрение этого вопроса мы опускаем.

С некоторых пор нечеткие знания начали активно применяться для выработки брокерских рекомендаций по приобретению (удержанию, продаже) ценных бумаг. Например, монография [20] рассматривает вопрос о целесообразности инвестирования в фондовые активы в зависимости от характера экономического окружения, причем параметры этого окружения являются нечеткими значениями. На сайте [21] автор вышеупомянутой монографии поддерживает бюллетень макроэкономических индикаторов и соответствующих условий инвестирования на тех или иных рынках.

На нечетких знаниях могут быть организованы специализированные экспертные системы, реализующие механизм нечетко-логического вывода. Простейший пример такого рода системы мы находим на сайте [22], где выработка опционной стратегии сопровождается нечеткой предварительной оценкой характера рынка. В этом смысле также представляет интерес работа [23].

4.12. Предварительные выводы

Теория нечетких множеств открывает новые возможности для интерпретации наблюдений, полученных опытным путем, потому что дает исследователю основания для анализа неоднородных и недостаточных выборок, которые классическая теория вероятности законно игнорирует.

Появляется простор для великого компромисса, когда исходная «дурная» неопределенность начинает работать на правах неопределенности канонической, но в модели попадают нечеткости, которые выражают степень субъективной уверенности эксперта в своей правоте. Тем самым неопределенность проходит структуризацию, получая формально описанную границу, отделяющую нашу уверенность от неуверенности, знание от незнания. Законы, выраженные в нечеткой или нечетко-вероятностной форме, являют собой синтез объективных и субъективных моделей. Таким образом, активность эксперта не игнорируется, а приобретает модельные формы.

Также надо отметить, что огромное количество вероятностных приложений в экономике опирается на наивные представления практиков о том, что их вероятностные гипотезы не требуют подтверждения правдоподобия. Если бы вопрос о подтверждении гипотез встал ребром и встал так, как это понимают классики математической статистики, то можно уверенно утверждать, что львиная доля вероятностных гипотез в экономике была бы забракована. Категория квазистатистики позволяет получить оценку правдоподобия в новом качестве, в новом смысле, с оттенком субъективного доверия эксперта к полученным им гипотезам.

5. НЕЧЕТКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ МОДЕЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД МАРКОВИЦА

Исторически первым методом оптимизации фондового портфеля был метод, предложенный Марковицем в [24]. Суть его в следующем.

Пусть портфель содержит N типов ценных бумаг (ЦБ), каждая из которых характеризуется пятью параметрами:

- начальной ценой W_{i0} одной бумаги перед помещением ее в портфель;
- числом бумаг ni в портфеле;
- начальными инвестициями S_{i0} в данный портфельный сегмент, причем

$$S_{i0} = W_{i0} \times n_i; \quad (31)$$

- среднеожидаемой доходностью бумаги r_i;
- ее стандартным отклонением σ_i от значения r_i.

Из перечисленных условий ясно, что случайная величина доходности бумаги имеет нормальное распределение с первым начальным моментом r_i и вторым центральным моментом σ_i. Это распределение необязательно должно быть нормальным, но из условий винеровского случайного процесса нормальность вытекает автоматически.

Сам портфель характеризуется:

- суммарным объемом портфельных инвестиций S;
- долевым ценовым распределением бумаг в портфеле $\{x_i\}$, причем для исходного портфеля выполняется

$$x_i = \frac{S_{i0}}{S}, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \quad i = 1,\dots, N; \quad (32)$$

- корреляционной матрицей $\{\rho_{ij}\}$, коэффициенты которой характеризуют связь между доходностями i-й и j-й бумаг. Если ρ_{ij} = -1, то это означает полную отрицательную корреляцию, если ρ_{ij} = 1 — имеет место полно положительная корреляция. Всегда выполняется ρ_{ii} = 1, так как ценная бумага полноположительно коррелирует сама с собой.

Таким образом, портфель описан системой статистически связанных случайных величин с нормальными законами распределения. Тогда, согласно теории случайных величин, ожидаемая доходность портфеля r находится по формуле:

$$r = \sum_{i=1}^{N} x_i \times r_i \quad (33)$$

а стандартное отклонение портфеля σ :

$$\sigma = (\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i \times x_j \times \rho_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j)^{\frac{1}{2}}. \qquad (34)$$

Задача управления таким портфелем имеет следующее описание: определить вектор $\{x_i\}$, максимизирующий целевую функцию r вида (33) при заданном ограничении на уровень риска σ, оцениваемый (34):

$$\{x_{opt}\} = \{x\} \mid r \to max, \ \ \sigma = const \le \sigma_M, \qquad (35)$$

где σ_M – риск бумаги с максимальной среднеожидаемой доходностью. Запись (35) есть не что иное, как классическая задача квадратичной оптимизации, которая может решаться любыми известными вычислительными методами.

Замечание. В подходе Марковица к портфельному выбору под риском понимается не риск неэффективности инвестиций, а степень колеблемости ожидаемого дохода по портфелю, причем как в меньшую, так и в большую сторону. Можно без труда перейти от задачи вида (35) к задаче, где в качестве ограничения вместо фиксированного стандартного отклонения выступает вероятность того, что портфельная доходность окажется ниже заранее обусловленного уровня.

Если задаваться различным уровнем ограничений по σ, решая задачу (35), то можно получить зависимость максимальной доходности от σ вида:

$$r_{max} = r_{max}(\sigma). \qquad (36)$$

Выражение (36), именуемое **эффективной границей** портфельного множества, в координатах «риск-доходность» является кусочно-параболической вогнутой функцией без разрывов. Правой точкой границы является точка, соответствующая тому случаю, когда в портфеле оказывается одна бумага с максимальной среднеожидаемой доходностью.

Подход Марковица, получивший широчайшее распространение в практике управления портфелями, тем не менее имеет ряд модельных допущений, плохо согласованных с реальностью описываемого объекта — фондового рынка. Прежде всего, это отсутствие стационарности ценовых процессов, что не позволяет описывать доходность бумаги случайной величиной с известными параметрами. То же относится и к корреляции.

Если же мы рассматриваем портфель из модельных классов, а ценовую предысторию индексов модельных классов — как квазистатистику, то нам следует моделировать эту квазистатистику многомерным нечетко-вероятностным распределением с параметрами в форме нечетких чисел. Тогда условия (33) – (35) **записываются в нечетко-множественной форме**, и задача квадратичной оптимизации также решается в этой форме. Решением задачи является эффективная граница в виде нечеткой функции полосового вида. Ее следует привести к треугольному виду по обычным правилам.

Каждому отрезку на эффективной границе, отвечающей абсциссе портфельного риска, соответствует нечеткий вектор оптимальных портфельных долей.

И, наконец, если нам заданы контрольные нормативы по доходности и риску (бенчмарк модельного портфеля), которые нам следует соблюсти в нашем портфеле, увеличивая доходность и одновременно снижая риск. Если бенчмарк попадает в полосу эффективной границы, то возникает дабл-риск (по факторам доходности и волатильности), что модельный портфель «не переиграет» бенчмарк. Этот риск можно оценить по методу из [12].

Итак, изложение модифицированного подхода Марковица завершено. Далее по тексту статьи мы считаем, что имеем дело с квазистатистикой модельных индексов в портфеле, которая моделируется нами посредством ***N***-мерного нечетко-вероятностного распределения. Оценив параметры этого распределения как нечеткие числа, мы решаем задачу квадратичной оптимизации в нечеткой постановке, получая эффективную границу в форме криволинейной полосы.

6. КОГДА ОТ КВАЗИСТАТИСТИКИ НАДО ОТКАЗЫВАТЬСЯ

Можно еще раз взглянуть на перфоманс индекса S&P500 (рис. 2), чтобы понять, какие у нас на самом деле трудности. Ясно, что квазистатистика до 2001 года нас не устраивает, т.к. она дает фотоснимок экономики США до рецессии. Если брать квазистатистику после 2001 года, то от инвестирования в американские акции надо отказываться как от инвенстиций в актив с **ожидаемо отрицательной** доходностью. То, что непригодно по частям, непригодно и в совокупности. И поэтому, скрепя сердце, мы вынуждены **отказаться** рассматривать пеформанс рис. 2 как квазистатистику.

Итак, условия анализа, кажется, приобрели максимум расплывчатости. Что же нам остается тогда? Нам остается наша экспертная познавательная активность и умение мыслить нечетко, в качественных терминах.

Давайте попробуем построить качественную экспертную модель перфоманса индекса S&P500, руководствуясь рядом макроэкономических соображений. Кое-что в этом отношении мы сделали в [11] еще в марте 2001 года, когда писалась работа.

Как отмечалось в [11], экономика США вступила в фазу рецессии, и уже год пребывает в этом состоянии (см. отчет Национального бюро экономических исследований США [25]). Прежде всего, это характеризуется резким снижением темпов роста промышленного производства и валового внутреннего продукта. Компании сокращают непрофильные расходы, и прежде всего это ударяет по рынкам программного обеспечения и интернет-технологий. Отсюда — волатильный рынок высокотехнологичных акций, характеризуемый индексом NASDAQ, потерявший за этот год порядка 20%.

Надо сказать, что инерция представлений о том, какая цена на акции является справедливой, очень велика. Поэтому темп снижения дивидендных выплат выше, чем темп снижения цен на акции, особенно для высококапитализированных компаний. Среднее значение фактора “цена-доходы” (P/E), измеряемое в целом по индексу S&P500, колеблется в пределах от 20 до 30 в течение последних 10 лет [26], но похоже, что для сегодняшних рецессионных условий значение 20 является наиболее перспективным. Причем это не должно быть достигнуто за счет роста дивидендных выплат (этого не будет), но исключительно за счет снижения цен на акции. Индекс S&P500 еще не нашел своего дна, и это дно, по нашим оценкам, составляет от 800 до 900, т.е. дном является уровень 1997 года. И думается, что этого дна индекс достигнет во втором-третьем кварталах 2002 года.

Почему я считаю для себя возможным делать прогнозы?

В [11] я предсказывал дно индекса NASDAQ на уровне 1 600-1 800, когда сам индекс пребывал еще на отметке 2 400. С тех пор NASDAQ падал на это дно дважды: в апреле и сентябре этого года. Полагаю, что это еще не предел, и пару разочков-то он еще шлепнется на дно жизни. Потому что **некуда ему пока расти**, вот в чем беда, а нынешний его уровень 1 940 (по состоянию на 28 ноября 2001 г.) – это переоценка значимости афганских побед. Любая неприятная макроновость типа сообщения об увеличении темпов роста безработицы в США может вернуть индекс NASDAQ туда, где ему, собственно, и место – в красный угол, вплоть до первых проблесков окончания рецессии, чего все ожидают в середине 2002 года. Но возможно, эти «все» очень и очень ошибаются в перспективах окончания тяжелых времен, и сама рецессия может продлиться гораздо дольше, чем ей отводится временем.

Итак, у меня есть определенный опыт сбывшихся предсказаний, основанный на том, что уже где-то 2 года я непрерывно наблюдаю американский фондовый рынок. Поэтому я беру на себя смелость высказываться и оценивать.

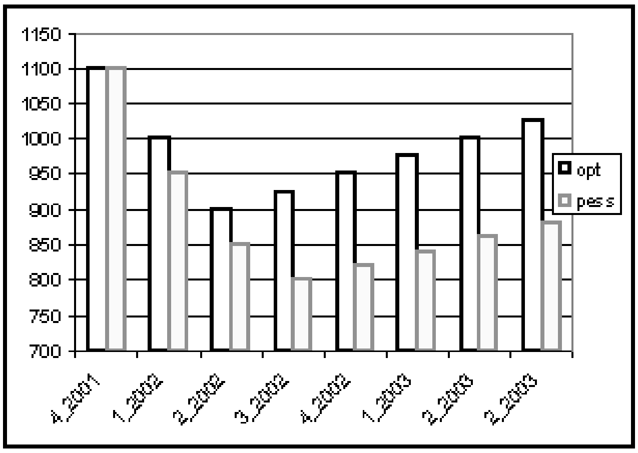

Рис. 8. Пессимистический и оптимистический прогнозы на индекс S&P500

Итак, мы прогнозируем дно S&P500 в середине 2002 года. Что будет потом? Как думается — медленный рост с повышенной волатильностью. В пересчете на ближайшие пять лет, если учесть, что в спокойные времена доходность по индексу в среднем составляла 15-20% годовых, то в пострецессионные годы надо говорить о **10-15%.** Что касается волатильности, то в дорецессионные времена она составляла 40-50% годовых. Полагаю, что оценка **20-30%** годовых для дисперсии доходности – это достоверно, с учетом сохранения пропорций между доходностью и волатильностью до и после начала рецессии.

Качественно прогноз индекса до середины 2003 года представлен на диаграмме рис. 8. Прогноз осуществлен поквартально, начиная с 4 квартала 2001 года.

То, что представлено на рис. 8, – это прогноз в виде нечеткой последовательности, составленной из треугольных нечетких чисел. В виде треугольных нечетких чисел выступают и прогнозы доходности и волатильности индекса. И, таким образом, в ходе портфельной оптимизации мы можем заменить оценки, полученные на основе квазистатистики, экспертными прогнозными оценками в той же форме.

7. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОСТЕЙШЕГО МОДЕЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ

Рассмотрим простейший пример американского модельного портфеля из двух модельных классов: правительственных долгосрочных облигаций (**Класс 1,** характеризующийся индексом LB Govt Bond) и высококапитализированных акций (**Класс 2,** характеризующийся индексом S&P500). Индекс долгосрочных правительственных облигаций мы оценили в разделе 4.10 настоящей работы, а индекс S&P500 мы прогнозировали только что. Сводные данные по обоим индексам приведены в таблице 3.

Таблица 3

СВОДНЫЕ ДАННЫЕ ПО ОБОИМ ИНДЕКСАМ

Номер модельного класса	Ожидаемая доходность $r_{1,2}$, % год			Ожидаемая волатильность $\sigma_{1,2}$, % год		
	мин	средн	макс	мин	средн	макс
1 Облигации	6.0	6.1	6.2	0.6	0.7	0.8
2 Акции	10	12.5	15	20	25	30

Нам следовало бы еще оценить корреляцию двух индексов. Но, как я покажу далее, в нашем случае этого не потребуется. Пока же для общности обозначим коэффициент корреляции ρ_{12}.

Надо сразу оговориться, что случай портфеля из двух компонент является **вырожденным** с точки зрения оптимизации. Здесь полное множество портфельных решений представляет собой участок в общем случае кривой линии на плоскости, и он же является эффективной границей. Так что в настоящем примере мы не столько решаем оптимизационную задачу, сколько ищем аналитический вид эффективной границы в координатах «риск-доходность».

Запишем (33) – (34) в частном виде:

$$r = x_1 \times r_1 + x_2 \times r_2 \qquad (37)$$

$$\sigma^2 = x_1^2 \times \sigma_1^2 + 2x_1 x_2 \times \sigma_1 \times \sigma_2 \times \rho_{12} + x_2^2 \times \sigma_2^2 \qquad (38)$$

$$x_2 = 1 - x_1. \qquad (39)$$

Все «постоянные» коэффициенты в (37) — (38) являются треугольными нечеткими числами. Можно было бы как-то отличить треугольные параметры от обычных скалярных, вводя специальную запись, но, честно говоря, мне не хочется загромождать формулы. И, поскольку в нашем случае $\sigma_2 >> \sigma_1$, то имеет место приближенное равенство:

$$\sigma = x_2 \times \sigma_2, \qquad (40)$$

и справедливо

$$r = \frac{r_2 - r_1}{\sigma_2} \times \sigma + r_1 \qquad (41)$$

- уравнение эффективной границы в виде полосы с прямолинейными границами (см. рис. 9).

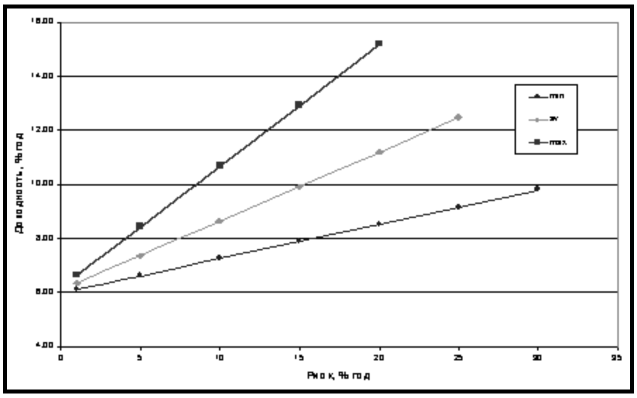

Рис. 9. Эффективная граница в виде полосы с линейными границами

Коэффициент пропорциональности в (41) есть не что иное, как хорошо известный в портфельном менеджменте показатель Шарпа **[27]** – отношение доходности индекса (за вычетом безрисковой составляющей доходности) к волатильности индекса. Только в нашем случае он имеет нечеткий вид, сводимый к треугольному по правилу:

$$\left(\frac{r_{2min} - r_{1max}}{\sigma_{2max}}, \frac{r_{2av} - r_{1av}}{\sigma_{2av}}, \frac{r_{2max} - r_{1min}}{\sigma_{2min}} \right). \qquad (42)$$

В табл. 4 сведены границы для модельного класса облигаций в структуре модельного портфеля для различных уровней риска.

Таблица 4

ГРАНИЦЫ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО КЛАССА ОБЛИГАЦИЙ

Риск портфеля,% год		1	5	10	15	20	25	30
Доля облигаций в портфеле	max	0.967	0.833	0.667	0.500	0.333	0.167	0.000
	av	0.960	0.800	0.600	0.400	0.200	0.000	0
	min	0.950	0.750	0.500	0.250	0.000	0	0
Разброс		0.067	0.083	0.167	0.250	0.333	0.167	0

По краям полосы разброс портфельных границ ниже, чем в середине. Это объясняется тем, что на краях полосы эффективной границы портфель обладает вполне определенным стилем: большей доходности отвечает модельный класс акций, а меньшему риску – модельный класс облигаций.

8. БЕНЧМАРК-РИСК

Инвестор, инвестируя деньги, всегда ставит перед собой определенную инвестиционную цель (например, накопить денег на обучение детей). Процесс такого накопления долгосрочен и требует поэтапного контроля доходности инвестиций. Например, инвестор поставил своей целью иметь доход не ниже 8% годовых с риском не выше 10%. Это и есть бенчмарк.

Поглядев на эффективную границу и заглянув в таблицу 4, инвестор формирует модельный портфель, заполняя его на 50% — 60% облигациями. Он ожидает разброс доходности, оцениваемый (41), от 7.27% до 10.7% годовых. Нижняя граница разброса лежит ниже бенчмарка, — значит, существуют ненулевые шансы не выполнить инвестиционный план.

Каковы эти шансы? На этот вопрос дает ответ метод из [12], где риск срыва плана (применительно к нашему случаю) оценивается формулой:

$$\delta = \frac{r^* - r_{min}}{r_{max} - r_{min}} \left(1 + \frac{r_{av} - r^*}{r^* - r_{min}} \ln \frac{r_{av} - r^*}{r_{av} - r_{min}}\right), \qquad (43)$$

где

r^*=8% — бенчмарк, (r_{min} = 7.27%, r_{av} = 8.66%, r_{max} = 10.70%) – параметры треугольного числа ожидаемой доходности модельного портфеля. И расчеты по (43) дают δ = 19.3%. Много это или мало? Все зависит от предпочтений инвестора. Возможно, ему покажется, что риск велик, и он сочтет свой финансовый план чрезмерно напряженным. В то же время надо обратить внимание на то, что бенчмарк ниже ожидаемого среднего, поэтому шансы на исполнение плана весьма велики.

9. РЕШЕНИЕ НЕЧЕТКО-ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Задача вида (35) является задачей квадратического программирования с нечеткими параметрами. Ее решением, как отмечалось, является полосовая эффективная граница. Чтобы уточнить параметры границы, можно воспользоваться следующим приближенным алгоритмом.

1. Сначала уточняется средняя линия полосы. Это делается обычным образом, например, методом угловых портфелей (см., например, [28]). При этом вся кривая разбивается на достаточно большое множество точек, и для каждой из них фиксируется портфельное распределение $\{x_i\}$, которой соответствует точка средней линии эффективной границы (σ_{av}, r_{av}).

2. Затем восстанавливаются верхняя и нижняя граница полосы в выделенных точках по формулам:

$$r_{min} = \sum_{i=1}^{N} x_i \times r_{imin}; \qquad (44)$$

$$r_{max} = \sum_{i=1}^{N} x_i \times r_{imax}; \qquad (45)$$

$$\sigma_{min} = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i \times x_j \times \rho_{ijmin} \times \sigma_{imin} \times \sigma_{jmin}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (46)$$

$$\sigma_{max} = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i \times x_j \times \rho_{ijmax} \times \sigma_{imax} \times \sigma_{jmax}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (47)$$

Таким образом, на верхней границе полосы мы устанавливаем две точки с координатами (σ_{min}, r_{max}) и (σ_{max}, r_{max}), и столько же на нижней границе — (σ_{min}, r_{min}) и (σ_{max}, r_{min}).

Заключение

Нам удалось проследить решение задачи портфельной оптимизации в нечеткой постановке, начиная с формирования блока исходных данных и заканчивая построением эффективной границы портфельного множества. Новыми с научной точки зрения являются следующие моменты работы:

- введение **квазистатистики** как конструктивного способа описания «дурной» неопределенности;
- обоснование вероятностных распределений с нечеткими параметрами;

- запись модифицированного метода Марковица в нечеткой постановке;
- исследование возможности отказа от использования квазистатистики и ее замещение экспертным прогнозом в виде треугольно-нечеткой функции.

В целом применение теории нечетких множеств к портфельному менеджменту в мировой науке пошло несколько иным путем, чем тот, который предпослал появление настоящей статьи. Во-первых, активизировалось применение нейронных сетей и иных методов искусственного интеллекта к портфельному выбору, о чем книга [23]. Также следует обратить внимание на труды ученых японской школы нечетких множеств, где доминирующим подходом к портфельному выбору является т.н. подход эволюционного программирования (см., в частности, [29]).

В то же время нам представляется, что еще не до конца исчерпан потенциал нечетких интерпретаций классических подходов к фондовому менеджменту (к примеру то, что в настоящей работе поименовано как модифицированный метод Марковица). И в этом смысле примечательны две публикации. Монография [30] обосновывает применение нечетких вероятностей к портфельному выбору, а в статье [31] выстраивается нечеткий прогноз доходности индекса облигаций. Моя статья написана как раз в русле этой вновь формирующейся традиции.

Перечень цитируемых источников

1. Недосекин А.О. Проблемы управления накопительными инвестициями Пенсионного Фонда Российской Федерации // Аудит и финансовый анализ, № 1, 2002.
2. На сайте http://www.indexfunds.com/data/IndexScreener.php?id=3_Month_T-Bill
3. На сайте http://www.lehman.com/fi/research.htm
4. На сайте http://finance.yahoo.com/q?s=^SPC&d=c&k=c1&a=v&p=s&t=my&l=off&z=m&q=l
5. На сайте http://www.rts.ru
6. На сайте http://www.micex.ru/stock/mmvb10.html
7. На сайте http://queen.rbc.ru/rbccomp/index.shtml
8. На сайте http://www.kase.kz
9. Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции. М.: Инфра-М, 1997.
10. На сайте http://www.cob.vt.edu/finance/faculty/dmc/Courses/TCHnotes/TN00-03.PDF
11. Недосекин А.О. Скоринг акций с использованием нечетких описаний // Аудит и финансовый анализ, №3, 2001.
12. Недосекин А.О. Применение теории нечетких множеств в задачах управления финансами // Аудит и финансовый анализ, № 2, 2000. – Также на сайте http://www.cfin.ru/press/afa/2000-2/08.shtml
13. Недосекин А.О., Заблоцкий С.Н. Подход к учету долговых обязательств в программах фондового менеджмента // Аудит и финансовый анализ, №1, 2001.
14. Недосекин А.О. Финансовый анализ эффективности инвестиций в опционы и их комбинации // Аудит и финансовый анализ, №2, 2001.
15. Налимов В.В. Вероятностная модель языка. О соотношении естественных и искусственных языков. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1979. с.272-295.
16. Кофман А., Хил Алуха Х. Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями, Минск: Вышэйшая школа, 1992.
17. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений, М.: Мир, 1976.
18. Недосекин А.О., Овсянко А.В. Нечетко-множественный подход в маркетинговых исследованиях //2000.-На сайте www.vmgroup.sp.ru.
19. На сайте: http://finance.yahoo.com/q?s=^TYX&d=t
20. Peray K. Investing in mutual funds using fuzzy logic. St. Lucie Press, USA, 1999.
21. На сайте http://ourworld.compuserve.com/homepages/peray/logicco.htm.
22. На сайте http://www.numa.com/derivs/ref/os-guide/os-00.htm
23. Trippi R.R., Lee J.K. Artificial Intelligence in Finance & Investing: State-of-the-Art Technologies for Securities Selection and Portfolio Management. Irwin Professional Publishing, 1995.
24. Markovitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. N.Y., Wiley, 1959
25. На сайте http://cycles-www.nber.org/cycles/november2001/recessnov.html
26. На сайте http://frwebgate.access.gpo.gov/cgi-bin/getdoc.cgi?dbname=economic_indicators&docid=31oc01.txt.pdf
27. На сайте http://www.stanford.edu/~wfsharpe/art/sr/sr.htm
28. Терпугов А.Ф.Математика рынка ценных бумаг. — Томск, ТГПУ, 2000.- 171 с.
29. Tu Van Le. Fuzzy evolutionary progranmming for portfolio selection in investment. IPMM”99, Second International Conference on Intelligent Processing and Manufacturing of Materials, Honolulu,July 1999, pp.675-680 — На сайте http://www.ise.canberra.edu.au/VanL/publics/papers/ipmm99.pdf
30. Tanaka H., Peijun Guo. Possibilistic Data Analysis for Operations Research // Studies in Fuzziness and Soft Computing Vol. 29, Physica-Verlag, 1999.
31. Ramaswamy, S. Portfolio selection using fuzzy decision theory. — На сайте http://www.bis.org/publ/work59.pdf

SIEMENS BUSINESS SERVICES
Недосекин Алексей Олегович,
Software Solutions Department Consultant