ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ФИНАНСАМИ

О ВЛИЯНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДОВ НА РЫНОЧНУЮ ЦЕНУ В РАМКАХ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ

Бегларян А. В., зам. начальника отдела АКБ «ИнтрастБанк», аспирант ЦЭМИ РАН

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассмотрена модель олигополии с иерархической структурой потребителей. Построена и исследована модель, в которой суммарная функция спроса определяется двумя группами потребителей со специфической структурой доходов: доходы одной группы состоят из выплат со стороны другой группы. Рассмотрены три рынка потребления для удовлетворения различных потребностей этих двух групп. Один рынок - общий для обеих групп. Этот рынок и является рынком изучаемой олигополии (он нас и интересует). Кроме того, каждая группа потребителей имеет еще по одному индивидуальному рынку потребления. В соответствии с этим и моделируется поведение этих групп. Строятся соответствующие функции полезности, и прослеживается динамика равновесной цены на рынке олигополии в зависимости от изменения функции спроса, которое является следствием изменения объема выплат со стороны одной группы другой. При определенных условиях выявляются некоторые особенности поведения донорской группы потребителей. В частности, оказывается, что существуют обстоятельства, при которых поведение донорской группы, предпочтительное для себя, оказывается таковым и для второй группы.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ

Рассматривается модель олигополии, в которой определяются не только равновесные цена и объемы производства, но и коэффициенты влияния участников на рыночную цену. При изучении олигополистического рынка в рамках классических моделей [1-3] помимо вопросов существования состояния равновесия и его вычисления основное внимание уделяется их сравнению с моделью совершенной конкуренции. В [4,5] последние были включены в единый класс моделей олигополии, в котором степень влияния каждого участника на ситуацию в целом описывается специальными параметрами (коэффициентами влияния). При задании этих коэффициентов экзогенно относительно модели режим производства, т.е. зависимость объемов выпусков от рыночной цены, не связан со структурой спроса. И хотя при деформации кривой спроса состояние равновесия меняется, моделирование возможных эффектов такой деформации в этих моделях ограничено. Сюда следует отнести, например, быстрое или даже скачкообразное изменение рыночной цены, сохранение цены при росте спроса (в некоторых пределах) и ряд других явлений.

Возможность моделирования подобных явлений возникает, если не считать коэффициенты влияния заранее заданными, а включить их определение в само понятие состояния равновесия наряду с равновесной ценой и объемами производства. Такая концепция равновесия предложена в [6,7]. Коэффициенты влияния там определяются на основе специальной процедуры, проверяющей их соответствие действительности. Процедура предполагает, что каждый участник модели наблюдает колебания рыночной цены в ответ на его собственные изменения выпуска и тем самым оценивает свое влияние. В рамках такой модели устанавливается существование состояния равновесия.

Опишем теперь модель [6,7]. Пусть имеется $n \geq 3$ производителей однородного продукта с функциями затрат $f_i(q_i)$, $i = 1, \ldots, n$ где q_i – объем выпуска производителя i. Потребительский спрос описывается функцией спроса $G(p)$, аргумент которой p – предлагаемая производителями цена продукта. От функции спроса требуется непрерывная дифференцируемость, за исключением конечного числа точек, в которых допускаются как разрывы производной, так и разрывы самой функции $G(p)$. В связи с этим под $G(p)$ будем подразумевать кривую, полученную из первоначального спроса соединением вертикальными отрезками концов в точке разрыва. При этом условимся, что на вертикальных отрезках кривой спроса $G'(p+0) = G'(p-0) = -\infty$ везде, кроме самой верхней и самой нижней точек. Тогда равновесие спроса и предложения для цены p будет выражаться равенством

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = G(p). \qquad (1.1)$$

В точках разрыва кривой спроса в (1.1) нужно подразумевать знак $\in$ вместо знака $=$.

Предположение 1. Функция спроса определена для цен $p \in (0, +\infty)$ и является невозрастающей непрерывно дифференцируемой кусочно функцией. В каждой из конечного числа точек разрыва существуют пределы слева и справа как самой функции (в силу монотонности), так и ее производной.

Предположение 2. Функции затрат $f_i(q_i)$ определены для $q_i \geq 0$, дважды непрерывно дифференцируемы, причем $f_i'(q_i) > 0$ и $f_i''(q_i) > 0$ $\forall q_i \geq 0$.

Поведение производителя i, т.е. выбор объема q_i, определяется стремлением максимизировать величину прибыли $pq_i - f_i(q_i)$, $q_i \geq 0$, в предположении, что своим выбором он может влиять на цену p. Гипотеза об этом влиянии может задаваться предполагаемой зависимостью цены p от объема q_i. Условие максимума первого порядка, которое и будет использоваться при описании состоянии равновесия, тогда имеет вид

$$p + q_i\left(\frac{\partial p}{\partial q_i}\right)^e - f_i'(q_i) = 0, \quad q_i > 0; \quad (\leq 0, q_i = 0) \qquad (1.2)$$

где $\left(\frac{\partial p}{\partial q_i}\right)^e$ – предполагаемая производителем производная цены по его выпуску.

Как видим для описания поведения участника важна не сама зависимость p от q_i, а ее производная

$\left(\frac{\partial p}{\partial q_i}\right)^e = -v_i$. Знак минус введен, чтобы иметь дело с положительными v_i.

Конечно, форма предполагаемой зависимости от q_i должна обеспечивать (хотя бы локальную) вогнутость ожидаемой прибыли производителя как функции его объема; в противном случае нельзя будет говорить о максимуме прибыли. Поскольку функции затрат $f_i(q_i)$ считаются выпуклыми, то достаточно вогнутости произведения pq_i. Например, можно предположить показатель v_i, называемый в дальнейшем коэффициентом влияния производителя i, неотрицательным и постоянным (для обстановки, в которой оценивается принятое решение q_i). Тогда предполагаемая локальная зависимость прибыли от объема производства η_i имеет вид $[p - v_i(\eta_i - q_i)]\eta_i - f_i(\eta_i)$, а условие максимума при $\eta_i = q_i$ описывается соотношениями

$$p = v_i q_i + f_i'(q_i),\ \ q_i > 0; \quad p \le 0,\ \ q_i = 0. \qquad (1.3)$$

Если бы гипотезы участников задавались по отношению к модели экзогенно, как в [4,5], то для величины v_i, вообще говоря, следовало допускать контекстную зависимость, т.е. она была бы функцией обстановки, в которой делается прогноз (объема производства участника q_i, цены p, а может быть, и объемов производства всех участников). В [6,7] же используется подход, где параметры прогноза для точки равновесия определяются одновременно с ценой и объемами производства q_i на основе специальной процедуры верификации. В этом случае коэффициенты влияния v_i являются числовыми параметрами, определяемыми только для состояния равновесия. Такое равновесие называется внутренним и описывается набором $(p, q_1, ..., q_n, v_1, ..., v_n)$.

Для изложения процедуры верификации технически необходимо второе понятие равновесия, называемое внешним, при котором коэффициенты влияния v_i считаются заданными экзогенно.

Определение. Набор $(p, q_1, ..., q_n)$ называется внешним состоянием равновесия для заданных коэффициентов влияния $v_1, ..., v_n$, если уравновешен рынок, т.е. соблюдено условие (1.1), и при всех i выполняются условия максимизации прибыли (1.2).

Предположение 3. Пусть при цене $p_0 = \max\{ f_i'(0) \mid 1 \le i \le n\}$ существует (единственный ввиду предположения о функциях затрат) объем производства q_i^0, при котором $p_0 = f_i'(q_i^0)$, причем $\sum q_i^0 < G(p_0 - 0)$. Это предположение гарантирует, что при любых v_i (1.1) и (1.3) совместно могут выполняться лишь при $p > p_0 \ge f_i'(0)$ и, следовательно, при положительности всех q_i.

Теорема 1. При выполнении вышеуказанных предположений для любых $v_i \ge 0,\ i = 1, ..., n$ существует и единственно внешнее равновесие $(p, q_1, ..., q_n)$, непрерывно зависящее от совокупности параметров $v_1, ..., v_n$.

Перейдем теперь к определению внутреннего равновесия. Для этого сначала будет описана процедура проверки истинности коэффициентов влияния v_i. Эта процедура использовалась в [6,7]. Предположим, что при некоторых $v_1, ..., v_n$ установилось (внешнее) равновесие $(p, q_1, ..., q_n)$. Один из производителей, скажем, с номером k, временно меняет характер своего поведения, отказываясь от максимизации предполагаемой прибыли, и совершает малые отклонения, от своего равновесного объема производства q_k. Считая вариации производителем k своего объема производства бесконечно малыми, можно принять, что, наблюдая соответствующие вариации равновесной цены, участник k получает левый и правый коэффициенты своего влияния.

Если точка равновесия $(p, G = \sum q_i)$ лежит на гладкой части кривой функции спроса, то эти производные совпадают и истинный коэффициент влияния также должен им равняться. Если же точка (p, G) угловая, то истинность коэффициента v_k признается, когда он лежит между правой и левой производными равновесной цены.

С учетом того, что на время проверки своего коэффициента влияния участник k выбыл из равновесной модели, в [7] приводится критерий истинности.

Критерий истинности. В состоянии внешнего равновесия $(p, q_1, ..., q_n)$ коэффициент влияния v_k признается истинным, если существует $r_k \in [G'(p-0), G'(p+0)]$ при $G'(p-0) \le G'(p+0)$, или $r_k \in [G'(p+0), G'(p-0)]$ при $G'(p+0) \le G'(p-0)$, для которого

$$v_k = \frac{1}{\left(\sum\limits_{i \ne k} \frac{1}{v_i + f_i'(q_i)} - r_k\right)}. \qquad (1.4)$$

При этом $G'(p-0)$ и $G'(p+0)$ вычисляются для точки графика функции спроса в точке $(p, G = \sum q_i)$. Если $r_k = -\infty$, то v_k должно равняться нулю.

Прежде чем давать определение внутреннего равновесия, отметим следующее. Если состояние равновесия соответствует точке гладкости графика функции спроса, то для всех k числа r_k должны оказаться одинаковыми. Если же это угловая точка, т.е. $G'(p-0) \ne G'(p+0)$, то критерий истинности допускает различные r_k. Такое положение можно считать естественным, если излом графика признается в точности соответствующим моделируемой ситуации. Если же изломы трактуются как удобная идеализация гладких кривых с быстро меняющимся наклоном, то нужно требовать равенства всех r_k, как это было в случае гладкой аппроксимации кривой спроса. Поэтому этот случай в определении внутреннего равновесия отмечается отдельно.

Определение. Набор $(p, q_1, ..., q_n, v_1, ..., v_n)$, где $v_i \ge 0,\ i = 1, ..., n$, называется внутренним равновесием, если для коэффициентов влияния набор

$(p, q_1, ..., q_n)$ является внешним равновесием и для всех k выполнен критерий истинности. Если при этом все r_k в (1.4) одинаковые, то внутреннее равновесие называется сильным.

Теорема 2. При выполнении предположений 1-3 существует сильное внутреннее равновесие.

2. ГРУППЫ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Как уже отмечено выше, рассматриваются две группы потребителей, которые в дальнейшем будут называться, соответственно, "богатыми" и "бедными". Спрос $G(p)$ на рынке олигополии будет формироваться из потреблений обеих групп населения. Каждая группа потребителей имеет два вида потребления: внутреннее (по отношению к модели) и внешнее потребления. Внутренним потреблением будем называть потребление на рынке олигополии. Внешнее - это потребление на каком-то внешнем рынке, на котором установилась своя цена. Для бедных внешнее потребление является необходимым потреблением, т.е. "пища на каждый день". А внутреннее потребление - это роскошь, которую они могут позволить себе в той или иной степени в зависимости от равновесной цены, установившейся на рынке олигополии. Для богатых же внешнее потребление трактуется как роскошь, а внутреннее – как каждодневная необходимая пища. Таким образом, рынок необходимого потребления богатых и рынок роскоши бедных совпадают. Рынки внешних потреблений, конечно же, разные и цены на этих рынках сильно отличаются друг от друга.

Будем рассматривать некоторый временной период. К началу периода у богатых имеется некоторое количество денег M. Бедные же весь свой бюджет m получают от богатых за какие-нибудь оказанные им услуги. В рассматриваемой модели спрос формируется из оптимальных внутренних потреблении богатых и бедных, которые получаются путем максимизации их функций полезности. Интересно было бы найти ситуацию, когда богатым не выгодно сильно уменьшать выплату бедным.

Сначала рассмотрим пример, в котором оптимальный спрос получается классического вида, и на этом примере проследим динамику равновесной цены на рынке олигополии при вариации значения перетока денег m. Будет нащупано некоторое условие взаимоотношений между богатыми и бедными, при котором богатым выгодно передавать ненулевое количество денег бедным, причем, при определённом значении этой суммы богатые имеют максимум своей функции полезности. В этом примере не делается разделения на внутреннее и внешнее потребление.

Пример дает общее представление о модели с двумя группами потребителей (переток денег, динамика равновесной цены в зависимости от перетока денег, вычисление равновесной цены и т.д.).

Далее моделируется случай, когда спрос имеет более реалистичный характер. Для него и будут получены основные результаты.

Нам в дальнейшем понадобятся следующие формулы. Нетрудно видеть, что весь выпуск в олигополии будет равен (в случае функций затрат вида

$$f_i(q_i) = c_i q_i + a_i \frac{q_i^2}{2} + d_i, \quad a_i, c_i, d_i > 0)$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{p - c_i}{v_i + a_i}. \tag{2.1}$$

Критерий истинности имеет вид:

$$v_k = \frac{1}{\sum\limits_{i \neq k}^{n} \frac{1}{v_i + a_i} - r_k}. \tag{2.2}$$

Следовательно, условием равновесности цены p будут равенства

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{p - c_i}{v_i + a_i} = G(p); \\ v_k = \frac{1}{\sum\limits_{i \neq k}^{n} \frac{1}{v_i + a_i} - r_k}; \\ r_k \in [\min\{G'(p-0), G'(p+0)\}; \\ \max\{G'(p-0), G'(p+0)\}]. \end{cases}$$

3. КЛАССИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ

Пусть богатые изначально имеют у себя M единиц. Они отдают бедным сумму m за определенные услуги или по другим соображениям. Пусть x – потребление бедных на рынке олигополии, тогда $m - px$ – их затраты на внешнем рынке. Аналогично, если y – потребление богатых на рынке олигополии, то $M - m - px$ – их затраты на внешнем рынке. Здесь p – это цена на внутреннем рынке. Функция полезности бедных

$$\phi(x, m - px),$$

функция полезности богатых

$$\psi(y, M - m - py).$$

Оптимальное потребление каждой группы находится из условия максимизации соответствующей функции полезности по объёму потребления:

$$\begin{aligned} x^*(p; m) &= \arg\max_x \phi(x, m - px), \\ y^*(p; M - m) &= \arg\max_y \phi(y, M - m - py). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Соответственно, суммарный спрос равен

$$G(p; m, M) = x^*(p; m) + y^*(p; M - m).$$

Возьмем в качестве функций полезности следующие:

$$\phi(x, m - px) = \alpha_1 \ln x + \alpha_2 \ln(m - px),$$

и

$$\psi(y, M - m - py) = \beta_1 \ln y + \beta_3 \ln(M - m - py),$$

с условиями нормировки

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

$$\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1,$$

где параметры характеризуют:

α_1 – значение, которое придают бедные внутреннему потреблению,

α_2 – значение, которое придают бедные внешнему потреблению,

β_1 – значение, которое придают богатые внутреннему потреблению,

β_3 – значение, которое придают богатые внешнему потреблению.

2. GROUPS OF CONSUMERS

As it is already marked above, two groups of consumers, which further will refer to as, accordingly, "rich" and "poor" are considered. Demand $G(p)$ in the market oligopoly is will be formed from consumption both groups of the population. Each group of consumers has two kinds of consumption: internal (in relation to model) and external consumption. Internal consumption we shall name consumption in the market oligopoly. External is a consumption on any foreign market on which was established cost. For poor external consumption is necessary consumption, i.e. "food for each day". And internal consumption is luxury, which they presume to themselves to some extent on the equilibrium price, which have established in the market oligopoly. For rich external consumption is treated as luxury, and internal - as everyday necessary food. Thus, the market of necessary consumption rich and the market of luxury poor coincide. The markets of external consumptions, certainly, different and the prices in these markets strongly differ from each other.

Let's consider some time period. To the beginning of the period at rich there is some of money M . Poor all budget m receive from rich for any services rendered to it. In considered model demand is formed from optimum internal consumption rich and poor, which turn out, by maximization of their functions of utility. It would be interesting to find a situation when rich is not favorably strong to reduce payment poor.

All over again we shall consider an example in which optimum demand turns out a classical kind, and on this example we shall look after dynamics of the equilibrium price in the market oligopoly at a variation of value reflow money m . It will be groped some condition of mutual relation between rich and poor at which for rich is favorable to transfer nonzero quantity of money poor, and, at the certain value of this sum rich have a maximum of the function of utility. In this example it is not done divisions into internal and external consumption.

The example gives a common view about model with two groups of consumers (reflow money, dynamics of the equilibrium price depending on reflow money, calculation of the equilibrium price etc.).

Further the case when demand has more realistic character is modeled. For it the basic results also will be received.

Further the following formulas will be necessary for us. It is uneasy to see, that all issue in oligopoly will be equal. In case of functions of costs of a kind

$$f_i(q_i) = c_i q_i + a_i \frac{q_i^2}{2} + d_i, \quad a_i, c_i, d_i > 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{p - c_i}{v_i + a_i}. \qquad (2.1)$$

Criterion of the validity is equal to:

$$v_k = \frac{1}{\sum\limits_{i \neq k}^{n} \frac{1}{v_i + a_i} - r_k}. \qquad (2.2)$$

Hence, a condition balance the prices p There will be equality

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{p - c_i}{v_i + a_i} = G(p); \\ v_k = \frac{1}{\sum\limits_{i \neq k}^{n} \frac{1}{v_i + a_i} - r_k}; \\ r_k \in [\min\{ G'(p-0), G'(p+0)\}; \\ \max\{ G'(p-0), G'(p+0)\}]. \end{cases}$$

3. CLASSICAL VARIANT

Let rich initially have at itself M units. They give poor the sum m for the certain services or in other reasons. Let x - consumption poor in the market oligopoly, then $m - px$ - them costs on a foreign market. Similarly, if y - consumption rich in the market oligopoly, $M - m - px$ - them costs on a foreign market. Here p - it cost on a home market. Function of utility poor

$$\phi(x, m - px),$$

Function of utility rich

$$\psi(y, M - m - py).$$

Optimum consumption of each group is from a condition of maximization of the appropriate function of utility on volume of consumption:

$$x^*(p; m) = \arg \max_x \phi(x, m - px),$$

$$y^*(p; M - m) = \arg \max_y \phi(y, M - m - py). \qquad (3.1)$$

Accordingly, total demand is equal

$$G(p; m, M) = x^*(p; m) + y^*(p; M - m).$$

Let's take as functions of utility the following:

$$\phi(x, m - px) = \alpha_1 \ln x + \alpha_2 \ln(m - px),$$

and

$$\psi(y, M - m - py) = \beta_1 \ln y + \beta_3 \ln(M - m - py),$$

with conditions normalize

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

$$\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1,$$

where parameters characterize:

α_1 is value which give poor to internal consumption,

α_2 is value which give poor to external consumption,

β_1 is value which give rich to internal consumption,

β_3 is value which give rich to external consumption.

Then function of demand poor is equal to

$$x^*(p; m) = \frac{\alpha_1 m}{p},$$

and function of demand rich - a kind

$$y^*(p; M - m) = \frac{\beta_1 (M - m)}{p}.$$

For convenience we shall enter still a designation

$$\gamma = (\alpha_1 - \beta_1) m + \beta_1 M, \qquad (3.2)$$

so

$$G(p; m, M) = \frac{\gamma}{p}.$$

In model oligopoly we shall consider a case of the identical manufacturers having identical factors of influence and identical functions of costs, and

то согласно (3.4) с учетом неравенств $0 \le \alpha_1 < \beta_1 \le 1$ и $p'_m < 0$ имеем

$$\frac{d\Psi}{dm} \le -\frac{(\beta_1-\alpha_1)}{\gamma} + \frac{p'_\gamma(\beta_1-\alpha_1)}{p} =$$

$$= \frac{(\beta_1-\alpha_1)}{\gamma p}(\gamma p'_\gamma - p).$$

В свою очередь, согласно (2.3)

$$p'_\gamma = -\frac{F'_\gamma}{F'_p},$$

причем $F'_p > 0$, так как $p = p(m)$ является наибольшим корнем уравнения (3.3). Таким образом,

$$\frac{d\psi}{dm} \le -\frac{(\beta_1-\alpha_1)}{\gamma p F'_p}\left[\gamma F'_\gamma + pF'_p\right],$$

и нужно проверить, что выражение в квадратных скобках положительно. Согласно (3.3) имеем

$$\gamma F'_\gamma + pF'_p = \gamma F'_\gamma + pF'_p - 3F =$$

$$= (3n-2)ncp^2 - 2n^2c^2p + ((2n-1)p - 2nc)a\gamma.$$

Поскольку $p > c$, то с учетом (3.5)

$$\gamma F'_\gamma + pF'_p > (n-2)ncp^2 - ca\gamma > 0.$$

Таким образом, и в случае $\beta_1 > \alpha_1$, богатые также не заинтересованы в увеличении m (по сравнению с некоторым минимальным m_0, гарантирующим от социального взрыва).

Заметим, что этот вывод получен в случае, когда передача денег бедным не сопровождается дополнительной пользой для богатых.

Теперь введем в функцию полезности богатых дополнительное слагаемое $\beta_2 \ln g(m)$, где $g(m)$ – встречные блага, получаемые богатыми за деньги $m - m_0$. Параметр β_2 можно трактовать как показатель значения, которое придают богатые этим благам. На оптимальный спрос эта добавка не окажет никакого влияния, а в функции полезности появится слагаемое $\beta_2 \ln g(m)$. В качестве $g(m)$ можно взять, например,

$$g(m) = f(\phi(m) - \phi(m_0)),$$

где $\phi(m)$ – значение функции полезности бедных (подставлены $p(m)$ и $x(m)$), т.е.

$$\phi(m) = \ln\frac{(\alpha_1 m)^{\alpha_1}((1-\alpha_1)m)^{(1-\alpha_1)}}{p(m)^{\alpha_1}}.$$

Таким образом, $g(m)$ – это некоторая функция относительного приращения функции полезности бедных. Например, можно положить

$$\ln g(m) = \ln A + \phi(m) - \phi(m_0),$$

где A – некоторый множитель, выравнивающий единицы измерения. В этом случае окажется, что

$$\frac{d\psi}{dm} = \frac{\beta_2}{m} - \frac{1}{M-m} - (\beta_1 + \beta_2\alpha_1)\frac{p'_m}{p(m)},$$

так что при достаточно большом β_2 (т.е. при достаточной заинтересованности богатых в предлагаемых дополнительных благах) богатые будут заинтересованы в увеличении параметра m.

4. ВАРИАНТ С ДВУМЯ ТЕХНОЛОГИЯМИ

Теперь смоделируем в некотором смысле более реальный спрос, хотя в некоторых случаях он может оказаться и разрывным. Будем делать это следующим образом, сохранив все ранее введённые обозначения. Функции полезности богатых и бедных снова возьмем аддитивными, т.е.

$$\phi(z_1, z_2) = \phi_1(z_1) + \phi_2(z_2),$$
$$\psi(z_1, z_2) = \psi_1(z_1) + \psi_2(z_2), \qquad (4.1)$$

где $z_1 = x / y$, $z_2 = m - px / M - m - py$. При этом $\phi_1(z_1)$ – полезность, соответствующая внутреннему потреблению, $\phi_2(z_2)$ – полезность, соответствующая внешнему потреблению. Соответствующий смысл имеют $\psi_1(z_1)$ и $\psi_2(z_2)$.

Соответствующее оптимальное потребление бедных и богатых будет определяться из следующих условий:

$$\phi'_1(x) - p\phi'_2(m - px) = 0, \ \Rightarrow \ x^*(p; m);$$
$$\psi'_1(y) - p\psi'_2(M - m - py) = 0, \ \Rightarrow \ y^*(p; M, m). \qquad (4.2)$$

В качестве функций ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 и ψ_2 будем брать функции, производные которых имеют вид, показанный на рис. 1.

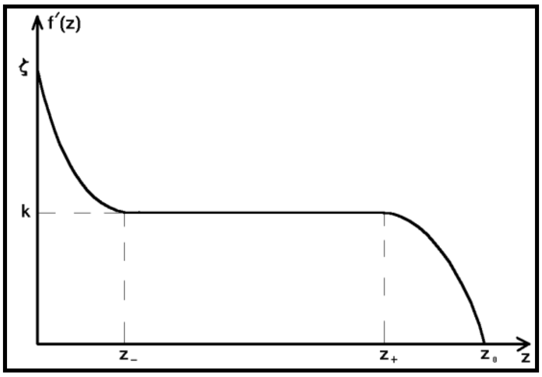

Рис. 1. Графический вид производной функций ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 и ψ_2

На участках $(0, z_-)$ и (z_+, z_0) производная функции полезности, например, квадратичная, а на участке (z_-, z_+) – постоянная. Точки z_-, z_+ и z_0 для функций $\phi_i, i = 1{,}2,$ будут обозначаться через x^i_-, x^i_+ и x^i_0, а для функций $\psi_i, i = 1{,}2,$ – соответственно через y^i_-, y^i_+ и y^i_0. Угловые коэффициенты k зоны линейности обозначены через k^i_x и k^i_y.

Для каждого p оптимальное потребление $x^*(p; m)$ получаем из условия (4.2), где вместо $\phi_1(z_1)$, $\phi_2(z_2)$ подставлены соответствующие функции полезности. Очевидно, что если в некоторой окрестности точек x и $m - p^1_* x$ функции $\phi'_1(x)$ и $\phi'_2(m - p^1_* x)$ постоянны, то оптимальное потребление $x^*(p^1_*; m)$ терпит разрыв (неоднозначно) и при этом $p^1_* = \frac{k^1_x}{k^2_x}$. Общий вид показан на рис. 2.

Т.о. для возникновения разрыва необходимо, чтобы участки постоянства функций $\phi_1'(x)$ и $\phi_2'(m - p_\bullet^1 x)$ пересекались. Участок постоянства первой функции:

$x_-^1 < x < x_+^1$,

второй функции:

$x_-^2 < m - p_\bullet^1 x < x_+^2$,

или

$$\frac{m - x_+^2}{p_\bullet^1} < x < \frac{m - x_-^2}{p_\bullet^1}.$$

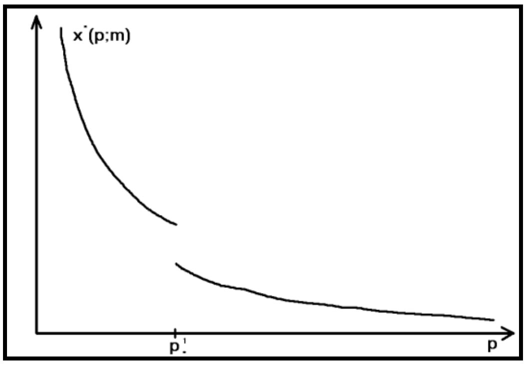

Рис. 2. Графический вид функции потребления с разрывом

Следовательно, условие наличия разрыва у функции потребления в точке $p_\bullet^1$ выглядит следующим образом:

$$x_+^1 > \frac{m - x_+^2}{p_\bullet^1}, \quad x_-^1 < \frac{m - x_-^2}{p_\bullet^1},$$

или

$x_-^1 p_\bullet^1 + x_-^2 < m < x_+^1 p_\bullet^1 + x_+^2$.

Когда m попадает в этот промежуток (очевидно непустой), то в точке $p_\bullet^1$ возникает разрыв функции $x^*(p)$.

Дадим теперь некоторые пояснения по поводу выбора вида функций полезности и смысла параметров. Графики соответствующих функций полезности будут выглядеть так, как показано на рис. 3.

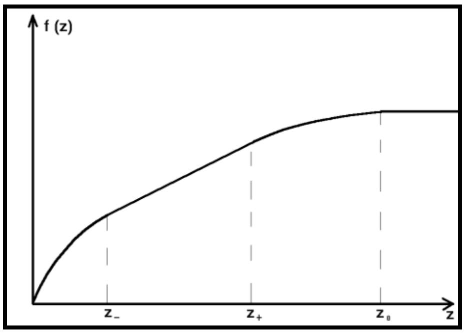

Рис. 3. Графический вид функций полезности

Самый левый участок на графике - это зона "утоления голода", второй участок - зона "еды с аппетитом" (пропорциональный рост функции полезности), третий участок - зона насыщения, самый правый участок – зона пресыщения (функция полезности постоянна). Параметры будем выбирать, руководствуясь тем, что насыщение во внутреннем потреблении бедных (роскошь) может наступать достаточно поздно, а зона "утоления голода" заканчиваться сравнительно рано.

Аналогично трактуется и функция полезности богатых. Правда, здесь уже трактовки внутреннего и внешнего потреблении меняются местами (соответственно и параметры). Потребление богатых получается аналогично и имеет разрыв при попадании значения $M - m$ в соответствующий интервал.

Теперь введем некоторые уточнения по поводу функций из (4.1). Нетрудно видеть, что функция $\phi_2(z_2)$ и $\psi_2(z_2)$ являются как бы "денежными", в то время как $\phi_1(z_1)$ и $\psi_1(z_1)$ – "товарные"; $\phi_2(z_2)$ и $\psi_2(z_2)$ – это ценность z_2 рублей на рынке еды бедных или роскоши богатых. Предполагая, что на рынке еды бедных установлена фиксированная цена p_0, можно перейти к товарной функции следующим образом:

$$\phi_2(z_2) := \phi_2\left(\frac{z_2}{p_0}\right).$$

Аналогично для богатых:

$$\psi_2(z_2) := \psi_2\left(\frac{z_2}{p_1}\right),$$

где p_1 – фиксированная цена на рынке роскоши богатых. Естественно считать $p_1 \gg p_0$. Напомним, что нас интересует рынок внутренних потреблении – рынок олигополии.

Очевидно, что такие изменения сказались бы только на значениях параметров: для бедных x_-^2 заменится на $x_-^2 p_0$, а x_+^2 на $x_+^2 p_0$, для богатых – y_-^2 на $y_-^2 p_1$, y_+^2 на $y_+^2 p_1$.

Суммарная функция спроса

$G(p; M, m) = x^*(p; m) + y^*(p; M - m)$

имеет график, вид которого показан на рис. 4.

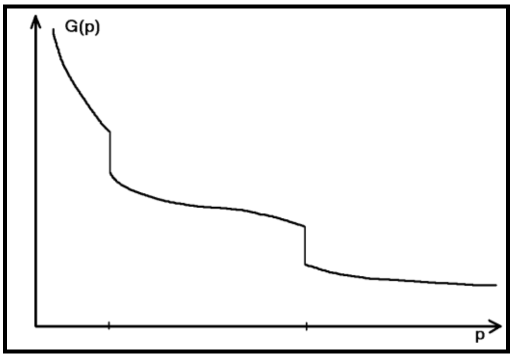

Рис. 4. Графический вид суммарной функции спроса

Скачки функции спроса появляются и исчезают в зависимости от значений m и $M - m$. В соответствии с рассматриваемой моделью, в месте разрыва участки соединяются вертикальной линией, и вся полученная кривая участвует в нахождении равновесия.

Заметим, что если учитывать численности обеих групп потребителей, то модель формально изменится следующим образом. Пусть n_1 – число бедных, n_2 – число богатых, m – бюджет одного бедного, M – исходная сумма одного богатого. Тогда $\frac{mn_1}{n_2}$ – выплата одного богатого бедным, $M - \frac{mn_1}{n_2}$ – бюджет одного богатого.

Оптимальное потребление одного потребителя будет, соответственно,

$$x^*(p;m) = arg\ max\left(\phi_1(x) + \phi_2\left(\frac{m - px}{p_0}\right)\right)$$

и

$$y^*(p;M-m) = arg\ max\left(\psi_1(y) + \psi_2\left(\frac{M - m - py}{p_1}\right)\right).$$

А суммарный спрос выразится формулой

$$G(p;M,m) = n_1x^*(p;m) + n_2y^*(p;M-m).$$

Теперь, имея спрос, можно говорить о равновесной цене, выбрав способ производства(функцию затрат). Как и раньше рассматриваются идентичные производители с одинаковыми коэффициентами влияния и одинаковыми функциями затрат. Вид функции затрат приведен на рис. 5.

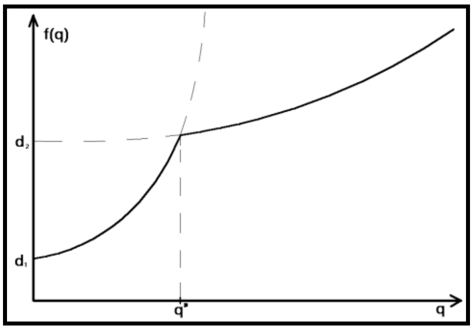

Рис. 5. Графический вид функции затрат

Таким образом, $f(q)$ определяется двумя технологиями:

$$f(q) = min\ \{f_1(q),\ f_2(q)\}.$$

При объеме выпуска меньшем, чем q^* продукт целесообразно производить по первой технологии с функцией затрат $f_1(q)$; при увеличении объема выпуска и переходе его значения через q^* происходит переход на вторую технологию с функцией затрат $f_2(q)$. Можно дать следующее объяснение этой ситуации. Первая технология действует при малых объемах выпуска, так как она очень "трудоемкая", требует больших затрат на выпуск единицы товара, и функция затрат быстро растет при увеличении объема выпуска. В то же время первая технология требует малых затрат на техническое обслуживание, объем которого не зависит от размера выпуска. Вторая технология действует при относительно больших объемах выпуска, не требует больших затрат на единицу продукции. Функция затрат здесь уже растет относительно медленно. Однако, вторая технология требует дорогого постоянного технического обслуживания.

Заметим, что спрос при цене p и объем производства одного производителя в нашем случае связаны между собой формулой

$$q = \frac{G(p)}{n}.$$

На графике $G(p)$ соответствующее значение $G(\bar{p}) = nq^*$ отметим горизонтальной прямой. И, если при цене p получаем спрос $G(p) > G(\bar{p})$, то равновесная цена должна вычисляться исходя из второй технологии, в противном случае – из первой.

Могут быть различные варианты расположения скачков функции спроса по отношению к пограничной цене $\bar{p}$ (см. рис. 6).

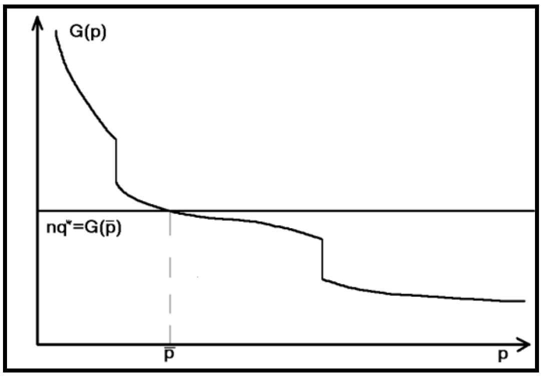

Рис. 6. Возможные варианты расположения скачков функции спроса по отношению к пограничной цене $\bar{p}$

При заданной функции спроса равновесное значение цены p^* определяется так же как и в разделе 2: предложение должно совпасть со спросом и коэффициенты влияния должны подтверждаться процедурой верификации. Однако теперь точка равновесия может быть не единственной.

Введем понятие устойчивости равновесной точки. Точка равновесия p^* называется устойчивой точкой равновесия, если при отходе от нее в любую сторону $(p^* - \delta,\ p^* + \delta)$ рынок снова возвращается в эту точку. Формально это будет выглядеть следующим образом. Рассмотрим точку $p^* - \delta$. Так как она не равновесная, то при найденных в этой точке v и r оказывается $r \neq G'(p^* - \delta)$, если точка $p^* - \delta$ – точка непрерывности кривой спроса и $r \notin [min\{\ G^+, G^-\},\ max\{\ G^+, G^-\}]$ – в противном случае. Вычислим теперь

$$\text{€} = \frac{1}{\frac{n-1}{v+a} - G^+(p^* - \delta)}.$$

Если $\text{€} > v$ – это значит, что производитель недооценил свое влияние на рынок, т.е. можно увеличить предполагаемое v. При этом цена двигается вправо к p^*. Аналогично и в точке $p^* + \delta$. Только здесь мы двигаемся влево когда $\text{€} < v$. Если ситуация похожа на вышеописанную, то точка p^* называется устойчивой точкой равновесия. Если хотя бы с одной стороны, вычислив соответствующий €, мы вынуждены двигаться в противоположную от точки равновесия сторону, то эта точка - неустойчивая точка равновесия.

Напомним, что функции $f_1(q)$ и $f_2(q)$ в рассматриваемой модели имеют вид

$$f(q) = a\frac{q^2}{2} + cq + d, \quad a, c, d > 0.$$

А суммарная функция предложения, при фиксированном v каждой из функций спроса имеет вид

$$Q(p) = \frac{p - c}{v + a}n.$$

Таким образом, $Q(p)$ – прямая в плоскости (p, Q). Когда меняется v, меняется и наклон функции предложения. Поэтому равновесные точки для каждой функции спроса могут появляться в ограниченном секторе. Ограничителями являются прямые $Q(p)$ при $v = 0$ (т.е. $r = -\infty$) (случай совершенной конкуренции) и $v = v_{max}$ ($r = 0$) (максимальное влияние производителя).

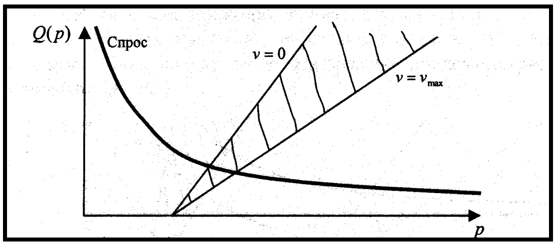

Рис. 7. Область расположения равновесных точек функций спроса

При при $v = 0$ ($r = -\infty$) прямая спроса имеет уравнение

$$Q(p) = \frac{(p - c)n}{a},$$

при $r = 0$, согласно (1.4)

$$v = \frac{a}{n - 2}, \quad Q(p) = \frac{(p - c)n}{a}\frac{n - 2}{n - 1}.$$

Вершинная точка на оси p, очевидно, будет $c = f'(0)$.

В нашем случае таких секторов будет два, поскольку функция затрат строится из двух частей, и каждая часть задает свой сектор. Причем сектор, соответствующий первой технологии, будет лежать правее сектора, соответствующего второй технологии, и наклон его к оси p будет большим.

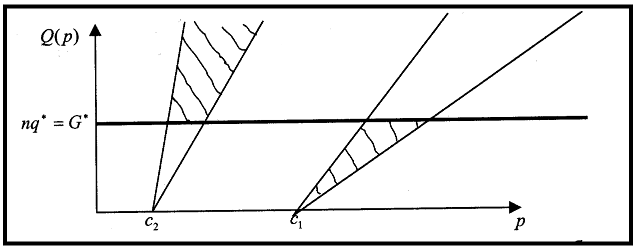

Рис. 8. Характер расположения равновесных точек при использовании двух технологий

Суммируя вышесказанное, заключаем, что при использовании первой технологии (объем производства каждого участника меньше q^*) равновесные точки могут появляться в ограниченном секторе, причем в той его части, которая лежит ниже прямой G^*. При использовании второй технологии равновесные точки могут появляться в другом ограниченном секторе, причем в верхней относительно прямой G^* его части (см. рис. 8).

Следовательно, появление и исчезновение равновесных точек будет зависеть от того, как проходит кривая спроса. Поскольку, спрос меняется в зависимости от m, то можно говорить, что динамика равновесных точек зависит от m. На рис. 9 продемонстрированы три основных случая.

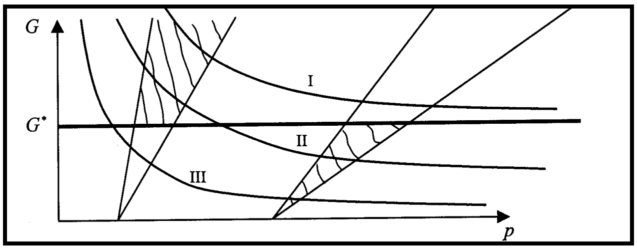

Рис. 9. Характер зависимости появления равновесных точек от m - бюджет бедных

В первом случае равновесные точки могут быть только при использовании второй технологии, когда большой спрос и, соответственно, большой выпуск. Во втором случае равновесные точки могут существовать при обоих видах производства. В третьем случае – при применении первой технологии при малых объемах выпуска.

Для параметра m получаются границы, при переходе через которые происходит переход от одного случая к другому. Когда m увеличивается, кривая спроса поднимается вверх. Пусть мы находимся в состоянии II. При увеличении параметра m и переходе его через некоторое значение m^* происходит переключение в состояние I. При уменьшении параметра и прохождении его через другое значение m_* происходит переключение в состояние III. В каждом секторе для каждого состояния получаются равновесные точки. Причем, в каждом секторе получается устойчивая равновесная точка. Одна неустойчивая точка получится в момент переключения с одной технологии на другую. С нее мы быстро скатываемся на вторую технологию, если к ней мы подошли справа (по первой технологии), и на первую, если подошли слева (по второй технологии).

Замечание. Если в каком-либо секторе кривая спроса имеет ступеньку, то здесь появляется дополнительно "транзитный" участок, состоящий из устойчивой точки на вершине ступеньки и неустойчивой внизу ступеньки (когда m входит в соответствующий интервал). Итак, если параметр m будем трактовать как управление, то можем проследить следующую картину динамики рынка. График, приведенный на рис. 10, поможет нам в этом. На этом рисунке точками обозначены равновесные состояния для различных положений кривой спроса.

Допустим, рынок находится в состоянии II. Управляющий параметр при этом находится в пределах

$$m_* < m < m^*.$$

В этом состоянии существуют две устойчивые равновесные точки $p_*(m)$ и $p^*(m)$, причем $p_*(m) < p^*(m)$. Пусть текущей равновесной ценой на рынке является $p^*(m)$. При увеличении m рынок "плавно" претерпевает небольшие изменения (цена

$p^*(m)$ двигается потихоньку вправо или влево в зависимости от знака $p'(m)$). Когда управляющий параметр переходит значение m^*, равновесная цена $p^*(m)$ исчезает, и рынок вынужден перескочить в состояние I, когда текущей ценой на рынке становится $p_*(m)$. Система перешла в другое состояние с другим спросом и предложением и другой технологией выпуска. При дальнейшем увеличении m, состояние системы будет меняться плавно. Если теперь будем уменьшать m, то, при переходе его значения через m^*, появится равновесная точка $p^*(m)$, но рынок будет оставаться в устойчивой равновесной точке $p_*(m)$. Когда, при дальнейшем уменьшении, m перейдет значение m_*, исчезнет точка $p_*(m)$ как равновесная, и рынок перескочит в состояние III. Текущей ценой на рынке будет $p^*(m)$.

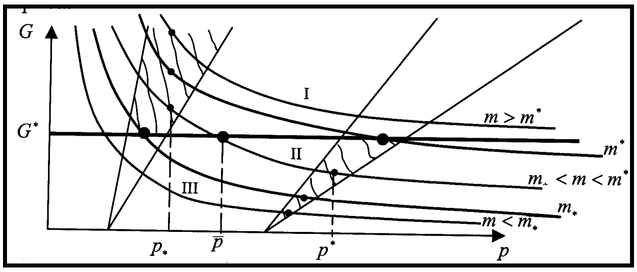

Рис. 10. Характер динамики рынка (появления/исчезновения равновесных точек) в зависимости от изменения спроса

Таким образом, поведение цены на рынке в зависимости от управляющего параметра m напоминает известную в теории управления петлю гистерезиса. Система, при этом, называется инертной. Инертность понимается в том смысле, что при переходе системы из одного состояния в другое, для возвращения ее в исходное состояние недостаточно «провести» управляющий параметр в обратном направлении через значение, при котором произошел первый переход системы.

Заметим, что неустойчивая точка, двигаясь с точкой переключения, при переходе управляющим параметром значения m^* в сторону увеличения, как бы «поглощает» устойчивую точку $p^*(m)$.

Аналогично и с точкой $p_*(m)$.

Вышесказанное демонстрирует рис. 11.

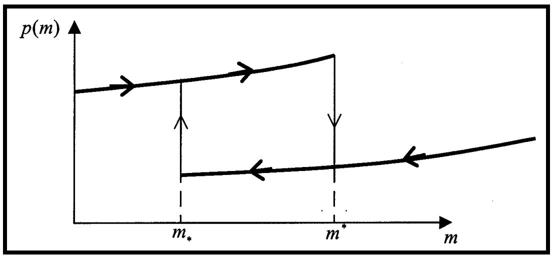

Рис. 11. Иллюстрация изменения равновесных цен и перескока при изменении спроса

В общем случае на участках плавного изменения функция $p(m)$ может быть и немонотонной.

Заметим, что в ситуации II с ценой $p^*(m)$, богатые, увеличивая выплаты бедным, могут добиться падения цены на рынке. Она скачком станет равной $p_*(m)$, а функция полезности богатых скачком увеличится.

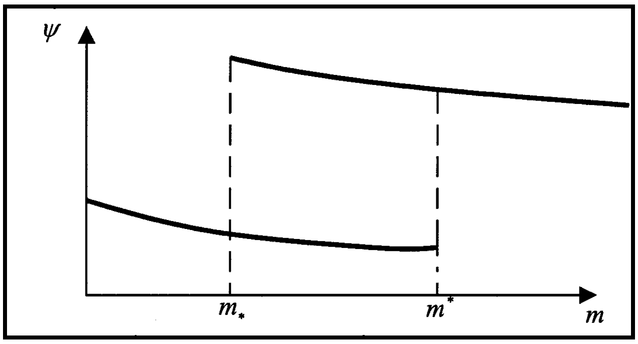

Рис. 12. Иллюстрация того, как скачкообразно увеличивается функция полезности богатых

Таким образом, богатым без всякого дополнительного стимула со стороны бедных (в форме услуг) может быть выгодно некоторый период времени увеличить выплаты бедным. Впрочем, добившись снижения цены, богатые снова будут заинтересованы уменьшить выплаты.

Литература

1. Ruffin R. J. Cournot Oligopoly and Competitive Behaviour // Rev. Econ. Studies. 1971. V. 38 (4). № 116.
2. Sherali H. D., Soyster A. L., Murphy F. N. Stackelberg – Nash – Cournot Equilibria: Characterizations and Computations // Oper. Res. 1983. V 31. № 2.
3. Novshek W. On the Existence of Cournot Equilibrium // Rev. Econ. Studies. 1985. V. 52 (1). № 168.
4. Булавский В. А., Калашников В. В. Метод однопараметрической прогонки для исследования состояния равновесия // Экономика и мат. методы. 1994.
5. Булавский В. А., Калашников В. В. Равновесия в обобщенных моделях Курно и Штакельберга // Экономика и мат. методы. 1995. Т. 32. Вып. 3.
6. Булавский В. А. Один мысленный эксперимент в рамках обобщенной модели Курно // Экономика и мат. методы. 1996. Т. 32. Вып. 2.
7. Булавский В. А. Структура спроса и равновесие в модели олигополии // Экономика и мат. методы. 1997. Т. 33. Вып. 3.

Бегларян Андраник Владимирович