

О НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТРАНСПОРТНЫХ ПЕРЕВОЗОК

Хачатрян Н.К., аспирант

Центральный экономико-математический институт РАН

Перейти на Главное МЕНЮ

ВВЕДЕНИЕ

Транспорту принадлежит особая роль в экономике страны, он связывает воедино все отрасли экономики, обеспечивая перемещение сырья, полуфабрикатов и готовой продукции. Среди проблем, связанных с работой транспорта, центральное место занимают задачи планирования и организации грузоперевозок. В данной статье рассматриваются некоторые модели организации транспортных перевозок, осуществляемых на большие расстояния. При движении на большие расстояния, грузопоток проходит через определенные промежуточные станции. С целью бесперебойного движения грузопотока для таких грузоперевозок необходимо определять технологии, согласно которым происходит движение грузопотока. Определить технологии можно разными способами, однако, во всех случаях необходимо учитывать пропускную способность станций. Данная характеристика станции зависит от инфраструктурных возможностей станции и может задаваться по-разному. Например, один из способов задать пропускную способность станции – это принять во внимание следующее правило: на станции одновременно не может находиться больше определенного объема грузов. Данный способ задания пропускной способности используется в наших моделях. Для быстрого продвижения грузопотока необходимо максимально задействовать инфраструктурные возможности станции. Данный факт также необходимо учитывать при определении технологии. Важнейшим звеном грузоперевозок является система контроля. В качестве наблюдаемой характеристики системы контроля может быть использовано следующее балансовое соотношение: равенство объемов грузопотоков на соседних станциях с определенной (единой для всех станций) разницей во времени. Именно такую систему контроля мы будем рассматривать в дальнейшем.

Итак, мы предполагаем, что имеется протяженный участок пути с большим количеством промежуточных станций, через которые проходит грузопоток. Движение грузопотока происходит в одном направлении. Кроме того, предполагается, что между двумя соседними станциями существует межстанционный перегонный путь, где временно может храниться часть грузов. Считаем, что емкость перегонных путей не ограничена. Работа всех станций состоит из приема и отправки грузов. На произвольную промежуточную станцию грузопоток может поступить как с предыдущей станции, так и с перегонного пути. Точно также, с произвольной промежуточной станции грузопоток может быть отправлен либо на следующую станцию, либо на следующий перегонный путь. Движение грузопотока осуществляется посредством двух технологий. Первая технология основана на установленных правилах взаимодействия соседних станций. Она строится по следующему правилу: произвольная станция согласно технологии отправляет грузопоток на следующую станцию, если объем грузов на данной станции больше объема грузов на следующей станции. Интенсивность отправки пропорциональна разности объемов грузов между станциями. Соответственно, произвольная станция согласно технологии принимает грузопоток с предыдущей станции, если объем грузов на данной станции меньше объема грузов на предыдущей станции. Интенсивность приема также пропорциональна разности объемов грузов между станциями. Станции наделены инфраструктурными возможностями и обладают определенной пропускной способностью. Технология, описанная выше, не гарантирует бесперебойного продвижения грузопотока (в связи с ограни-

ченной пропускной способностью станций). Кроме того, данная технология не обеспечивает оптимального использования инфраструктурных возможностей станций. Для устранения этих недостатков применяется и вторая технология. Данная технология основана на взаимодействии каждой из станций с перегонным путем, расположенным до этой станции и с перегонным путем, расположенным после этой станции. Она позволяет каждой из станций по возможности принимать грузопоток также и с перегонного пути (для оптимального использования инфраструктурных возможностей) и при необходимости отправлять грузопоток на перегонный путь. Наша задача – изучить возможность организации грузопотока с заданной системой контроля.

1. МОДЕЛЬ ТРАНСНАЦИОНАЛЬНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПЕРЕВОЗОК

Рассматривается модель транснациональных транспортных перевозок. Имеется протяженный участок пути с большим количеством промежуточных станций, через которые проходит грузопоток. Движение происходит в одном направлении (см. рис. 1).

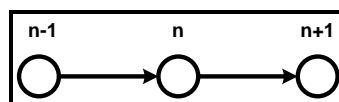


Рис. 1. Направление движения

Так как в этом разделе мы рассматриваем транснациональные перевозки, то предполагаем, что множество промежуточных станций является бесконечным в обе стороны (произвольная станция является промежуточной). Опишем технологии, с помощью которых осуществляется движение грузопотока.

Первая технология. Обозначим через $z_n(t)$ объем грузов, находящихся на станции с номером n в момент времени t . Для каждой станции с номером n существуют правила взаимодействия с предыдущей $(n-1)$ -й станцией и последующей $(n+1)$ -й станцией. Согласно правилу взаимодействия с предыдущей станцией, произвольная станция с номером n обязана принимать груз с $(n-1)$ -й станции с интенсивностью пропорциональной разности объемов грузов $(n-1)$ -й и n -й станций и равной $\alpha(z_{n-1} - z_n)$, если объем грузов на n -й станции меньше объема грузов на $(n-1)$ -й станции. В противном случае, если объем грузов на n -й больше объема грузов на $(n+1)$ -й станции, то станция с номером n отправляет груз на $(n+1)$ -ю станцию с интенсивностью $\alpha(z_{n-1} - z_n)$. Если же объем грузов на n -й станции меньше объема грузов на $(n+1)$ -й станции то станция с номером n отправляет груз на перегонный путь с интенсивностью $\alpha(z_{n-1} - z_n)$. Согласно правилу взаимодействия с последующей станцией, произвольная станция с номером n обязана отправлять груз на $(n+1)$ -ю станцию с интенсивностью, пропорциональной разности объемов грузов n -й и $(n+1)$ -й станций и равной $\beta(z_n - z_{n+1})$, если объем грузов на n -й станции больше объема грузов на $(n+1)$ -й станции. В противном случае, если объем грузов на n -й станции меньше объема грузов на $(n-1)$ -й станции то станция с номером n принимает груз с $(n-1)$ -й станции с интенсивностью $\beta(z_n - z_{n+1})$. Если же объем грузов на

n -й станции больше объема грузов на $(n-1)$ -й станции то станция с номером n принимает грузопоток с перегонного пути с интенсивностью $\beta(z_n - z_{n+1})$. Нормативы α и β определяют правила взаимодействия с предыдущей и последующей станциями.

Вторая технология. Помимо взаимодействия с предыдущей и последующей станциями, произвольная станция с номером n дополнительно принимает грузопоток с перегонного пути, расположенного между $(n-1)$ -ой и n -ой станциями и отправляет грузопоток на перегонный путь, расположенный между n -ой и $(n+1)$ -ой станциями. Чтобы максимально использовать инфраструктурные возможности станций, при объеме грузов не превышающего заданного пропускной способностью значения, интенсивность приема с перегонного пути должна превышать интенсивность отправки на перегонный путь. Результирующая интенсивность (разность между интенсивностью приема и интенсивностью отправки) имеет вид, показанный на рис. 2.

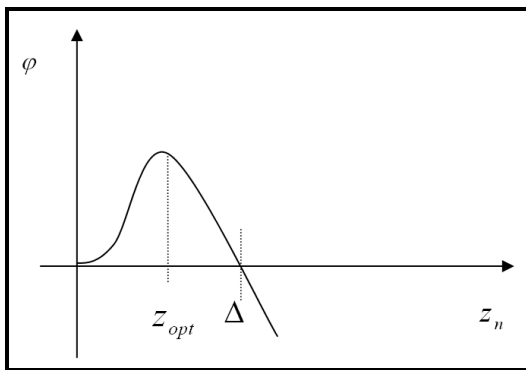


Рис. 2. Результирующая интенсивность

При объемах груза, не превышающих некоторого значения (на графике z_{opt}) мы можем увеличивать рост интенсивности приема над интенсивностью отправки. Дальнейшее увеличение объема грузов ($z_n > z_{opt}$) приводит к уменьшению роста интенсивности приема над интенсивностью отправки вплоть до его обнуления ($z_n = \Delta$). При большом объеме грузов ($z_n > \Delta$) необходима разгрузка станций. В этом случае интенсивность отправки должна превышать интенсивность приема.

Таким образом, с учетом работы первой и второй технологий прием и отправка грузов для n -й станции будет описываться следующим уравнением:

$$\dot{z}_n(t) = \alpha(z_{n-1} - z_n) - \beta(z_n - z_{n+1}) + \varphi(z_n), \quad n \in Z, \quad t \in [0, +\infty) \quad (1)$$

Для грузоперевозок необходимо иметь действующую систему контроля. В качестве наблюдаемой характеристики системы контроля может быть использовано следующее балансовое соотношение: равенство объемов грузопотоков на соседних станциях с определенной (единой для всех станций) разницей во времени. Формально такое условие можно описать в следующем виде: существует число $\tau > 0$, не зависящее от t и n , такое что при всех $n \in Z$ и $t \in [0, +\infty)$ выполнено равенство:

$$z_n(t) = z_{n+1}(t + \tau) \quad (2)$$

Решения системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющие условию (2), называются решениями типа бегущей волны. Константа τ характеризует периоды сравниваемых (контрольных) замеров объемов грузопотока на соседних станциях. Ее мы будем называть периодом бегущей волны. Окончательно, наша модель, описывающая процесс грузоперевозок и их систему контроля, задается счетной системой дифференциальных уравнений и условием, задающим бегущую волну:

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - (\alpha + \beta) z_n + \beta z_{n+1} + \varphi(z_n), \quad n \in Z, \quad t \in [0, +\infty); \quad (3)$$

$$z_n(t) = z_{n+1}(t + \tau), \quad n \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \quad (4)$$

Нас интересует следующий вопрос: можно ли при заданном начальном объеме грузопотока на произвольной станции организовать контролируемый грузопоток? Какими при этом могут быть режимы контроля грузопотоков, т.е. значения периода замера объемов грузопотока τ ? В связи с этим, для системы (3)-(4) было исследовано множество возможных изменений параметра τ , при которых существует решение (существует установившийся грузопоток с заданной системой контроля). В результате этого исследования была показана возможность организации контролируемого грузопотока. Соответствующая система контроля основана на периодических замерах объемов грузопотока. Для периода таких замеров получены границы его изменений.

2. МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНЫХ ПЕРЕВОЗОК С НАЧАЛЬНОЙ СТАНЦИЕЙ ОТПРАВКИ ГРУЗОВ

В первом параграфе была рассмотрена идеализированная модель транспортных перевозок, где предполагалось, что множество промежуточных станций бесконечно как в правую, так и в левую стороны (произвольная станция является промежуточной). В данном параграфе мы рассмотрим модель транспортных перевозок с выделенной начальной станцией отправки грузов, которая более адекватно описывает реальные грузоперевозки. Итак, рассмотрим модель транспортных перевозок с выделенной начальной станцией отправки грузов $n=0$ и большим количеством промежуточных станций ($n=1, 2, \dots$). В течение определенного промежутка времени грузопоток поступает на начальную станцию с постоянной интенсивностью v . Если через $\psi(t)$ обозначить текущую интенсивность подачи грузопотока на начальную станцию, то формально такое предположение запишется в следующем виде: $\psi(t) \equiv v, t \in [0, \bar{t}]$. Точное определение константы \bar{t} будет дано позже. Для промежуточных станций технологии, которыми осуществляется движение грузопотока такие же, как и первой модели. Опишем технологии, используемые на начальной станции.

Первая технология. Для начальной станции ($n=0$) существует правило взаимодействия с последующей станцией ($n=1$). Согласно этому правилу, начальная станция обязана отправлять груз на следующую станцию ($n=1$) с интенсивностью, пропорциональной

разности объемов грузов 0 -й и 1 -й станций и равной $\beta(z_0 - z_1)$, если объем грузов на 0 -й станции больше объема грузов на 1 -й станции. В противном случае, на начальную станцию дополнительно поступает грузопоток с интенсивностью $\beta(z_0 - z_1)$.

Функция, описывающая вторую технологию для 0 -й станции, имеет следующий вид

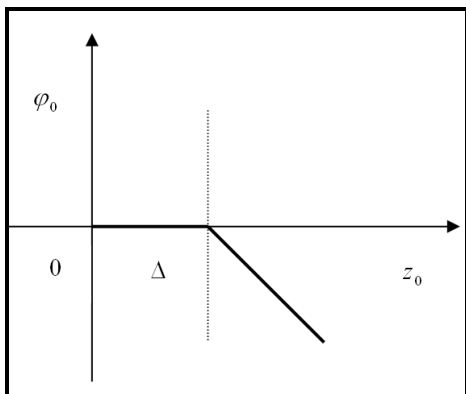


Рис. 3. Функция, описывающая вторую технологию для 0 -й станции

При небольшом объеме грузов на 0 -й станции ($z_0 < \Delta$) используется только первая технология. При объеме грузов, превышающем значение, определяемое пропускной способностью станции ($z_0 > \Delta$), мы подключаем и вторую технологию. Отметим, что для 0 -й станции вторая технология используется исключительно для разгрузки станции.

Так же как и в первой модели, в качестве наблюдаемой характеристики системы контроля используется следующее балансовое соотношение: равенство объемов грузопотоков на соседних станциях с определенной (единой для всех станций) разницей во времени. Число \bar{t} (промежуток времени, в течение которого грузопоток поступает на начальную станцию с постоянной интенсивностью) есть

период бегущей волны т.е. $\bar{t} = \tau$.

Таким образом, такая модель транспортных перевозок описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_0(t) = \psi(t) - \beta(z_0 - z_1) + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty) \quad (5)$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - (\alpha + \beta)z_n + \beta z_{n+1} + \varphi(z_n),$$

$$n \in 1, 2, \dots, t \in [0, +\infty); \quad (6)$$

$$z_n(t) = z_{n+1}(t + \tau), \quad n \in 0, 1, 2, \dots, t \in [0, +\infty). \quad (7)$$

где

$$\psi(t) \equiv v, \quad t \in [0, \tau].$$

Нас интересует следующий вопрос: можно ли при заданном начальном объеме грузопотока на начальной станции организовать контролируемый грузопоток? Какими при этом могут быть режимы контроля грузопотоков, т.е. значения периодов замеров τ объемов грузопотока? В связи с этим для системы (5)-(7) исследуется множество возможных изменений параметра τ (период бегущей волны), а также множество функций $\psi(t)$ (интенсивность подачи грузопотока на

начальную станцию), при которых существует решение (существует установившийся грузопоток с заданной системой контроля).

В результате этого исследования была определена интенсивность подачи грузопотока на начальную станцию, при которой можно организовать контролируемый грузопоток. Соответствующая система контроля основана на периодических замерах объемов грузопотока. Для периода таких замеров получены границы его изменений.

3. МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНЫХ ПЕРЕВОЗОК С НАЧАЛЬНОЙ СТАНЦИЕЙ ПРИЕМА И КОНЕЧНОЙ СТАНЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГРУЗОВ

В первом параграфе была рассмотрена идеализированная модель транспортных перевозок, где предполагалось, что множество промежуточных станций бесконечно как в правую, так и в левую стороны (произвольная станция является промежуточной). Во втором параграфе мы перешли от идеализированной модели транспортных перевозок к модели с выделенной начальной станцией отправки грузов, которая более адекватно описывает реальные грузоперевозки. В данном параграфе будет описана реальная модель грузоперевозок с начальной станцией отправки и конечной станцией распределения грузов. Итак, рассмотрим модель транспортных перевозок с начальной станцией приема грузов ($n=0$), конечным числом промежуточных станций ($n=1, 2, \dots, m$) и конечной станцией распределения грузов ($n=m+1$). Также как и во второй модели в начальный отрезок времени, равный периоду бегущей волны, грузопоток поступает на начальную станцию с постоянной интенсивностью v_1 , а с конечной станции распределяется с произвольной интенсивностью. На начальной и промежуточных станциях используются такие же технологии, как и в предыдущей модели. Опишем технологии, используемые на конечной станции.

Первая технология. Для конечной станции ($n=m+1$) существует правило взаимодействия с предыдущей станцией. Согласно этому правилу, конечная станция обязана принимать груз с m -ой станции с интенсивностью пропорциональной разности объемов грузов m -й и $m+1$ -й станций и равной

$\alpha(z_m - z_{m+1})$, если объем грузов на $m+1$ -й станции меньше объема грузов на m -й станции. В противном случае, с конечной станции дополнительно отправляется грузопоток с интенсивностью $\alpha(z_m - z_{m+1})$.

Вторая технология для конечной станции такая же, как и для промежуточных станций.

Таким образом, данная модель описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_0(t) = \psi_1(t) - \beta(z_0 - z_1) + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty) \quad (8)$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - (\alpha + \beta)z_n + \beta z_{n+1} + \varphi(z_n),$$

$$n \in 1, 2, \dots, m, t \in [0, +\infty); \quad (9)$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \alpha(z_m - z_{m+1}) - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1}),$$

$$t \in [0, +\infty); \quad (10)$$

$$z_n(t) = z_{n+1}(t + \tau), n \in 0, 1, 2, \dots, m, t \in [0, +\infty). \quad (11)$$

где

$$\psi_1(t) \equiv v_1, \quad t \in [0, \tau].$$

Нас интересует следующий вопрос: можно ли при заданном начальном объеме грузопотока на начальной станции организовать контролируемый грузопоток? Какими при этом могут быть режимы контроля грузопотоков, т.е. значения периодов замеров τ объемов грузопотока? В связи с этим для системы (8)-(11) исследуются множество возможных изменений параметра τ (период бегущей волны), множество функций $\psi_1(t)$ (интенсивность подачи грузопотока на начальную станцию) и множество функций $\psi_2(t)$ (интенсивность распределения грузопотока), при которых существует решение (существует установившийся грузопоток с заданной системой контроля).

В результате этого исследования были определены интенсивность подачи грузопотока на начальную станцию и интенсивность распределения грузопотока с конечной станции, при которой можно организовать контролируемый грузопоток. Соответствующая система контроля основана на периодических замерах объемов грузопотока. Для периода таких замеров получены границы его изменений.

Хачатрян Нерсес Карленович