БИЗНЕС-РЕИНЖИНИРИНГ

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЖИЛИЩНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА

Бекларян Л.А., д.ф.-м.н., проф., главный научный сотрудник;
Крученов М.Б., научный сотрудник

Центральный экономико-математический институт (ЦЭМИ) РАН

Введение

В процессе проведения жилищно-коммунальной реформы при снижении государственных вложений в жилищный сектор, изменениях в формах собственности, структуре источников финансирования строительства и способах удовлетворения потребностей в жилье остро встает вопрос о необходимости обеспечения граждан адекватным жильем в зависимости от их потребностей и реальной платежеспособности. На современном этапе реформирования жилищной сферы основной задачей региональной жилищной политики является разработка и реализация методов и механизмов по расширению границ доступности жилья для различных категорий населения.

В настоящее время в России еще не создана эффективная ипотечная система (то есть механизм долгосрочного кредитования под залог заемщика), что объясняется сложной политической и финансовой ситуацией в обществе, недостаточностью правового обеспечения ипотеки, неготовностью банков к развитию ипотеки, так как это связано с долгосрочным кредитованием и низкой доходностью.

Концепция ипотечного кредитования разрабатывалась в докризисном периоде и была ориентирована на дешевые иностранные займы и доступность широкому слою платежеспособного населения. Концепция в своем первоначальном варианте в качестве базовой основывалась на двухуровневой американской модели: выдача уполномоченными банками кредитов, создание ипотечного агентства, выпуск ценных бумаг, обеспеченных ипотечными обязательствами, выкуп кредитов, разработка стандартов и правил, обязательных для всех участников этой системы. При этом для жилищного проекта в Москве было установлено - кредит не более 70% от стоимости приобретаемой квартиры, процентная ставка 10% в валюте, платежи по погашению кредитной задолженности должны составлять не более 30% от совокупного семейного дохода заемщика.

Тем не менее существует множество способов, с помощью которых можно постепенно приобрести жилье, но эти схемы нельзя назвать ипотечными, так как в большинстве из них или почти отсутствует, или присутствует в зачаточном состоянии сама ипотека (залог недвижимости). Тем не менее квазиипотечные модели носят важный переходный характер и соответствуют современному этапу развития российской экономики. На нынешнем этапе они необходимы, ибо благодаря им постепенно активизируется и цивилизуется рынок жилья, а в перспективе им предстоит послужить отправными точками для формирования и развития полномасштабной системы ипотечного жилищного кредитования, базирующейся на исключительно рыночных механизмах.

Основной принцип новой концепции ипотечного кредитования должен заключаться в том, что агентство должно зарабатывать и расширять свой финансовый потенциал, направлять бюджетные ресурсы на развитие самой системы жилищного кредитования, а не расходовать их. Это позволит, во-первых, (при снижении процентной ставки) вовлечь в ипотеку нижние и средние группы (слои) так называемого среднего класса (а не только верхние высокодоходные слои), что позволит сделать ипотеку массовой, во-вторых, другое важное условие успешного развития ипотечной системы - это стабильность и устойчивость этой системы. Однако в современных условиях недостаточно ориентироваться только на развитие одной двухуровневой системы ипотеки, возможности которой проявятся в среднесрочной перспективе после прохождения периода ее становления (2003-2007 гг).

Поэтому в современных условиях параллельно должны быть сделаны акценты на развитие других моделей финансирования жилищного строительства, в частности тех, что не требуют внешнего инвестирования.

В настоящей работе строится и исследуется одна математическая модель финансирования проекта жилищного строительства, не связанного с привлечением банковского кредита (и, как следствие, последующим его обслуживанием), в предположении о случайном характере динамики активов застройщика. В рамках построенной модели ставятся и решаются три задачи оптимизации ценовой политики, каждая из которых отражает некие "стратегические" соображения застройщика по отношению к риску (в смысле отклонения значений реальных финансовых потоков от запланированных). В качестве критериев оптимальности выступают значения средней ожидаемой доходности в момент окончания проекта и среднего отклонения от нее. Такая "оптимизация в среднем" имеет право на существование отчасти потому, что проект в целом обладает свойством повторяемости. Полученные задачи приводятся к виду канонических задач оптимального управления и исследуются посредством применения необходимого условия оптимальности первого порядка - принципа максимума Л.С. Понтрягина. В результате этого поставлены двухточечные краевые задачи принципа максимума, обладающие довольно сложной структурой (уравнения являются нелинейными, а краевые условия заданы на разных концах интервала) и аналитического решения не имеют. Для их численного интегрирования была составлена программа. Кроме того, в данной работе показано, что у всех трех задач оптимизации ценовой политики существует решение, поэтому результаты интегрирования соответствующих краевых задач выделяют нам именно его. Дальнейшее усовершенствование описанной модели возможно путем включения в полученные задачи оптимального управления некоторого фазового ограничения, отражающего условие положительности сальдо платежного баланса, но тогда их решение значительно усложнится.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ТРЕХ ЗАДАЧ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОЙ ЦЕНОВОЙ ПОЛИТИКИ

Рассматривается проект финансирования жилищного строительства в предположении о случайном характере динамики активов застройщика (организации, занимающейся строительством коммерческого, т.е. пользующегося платежеспособным спросом, жилья). Данное предположение обусловлено тем, что в ходе строительства застройщик использует финансовый поток, частично формируемый покупателями жилья, при этом распределение во времени сметных расходов на строительство известно, а момент поступления средств от каждого конкретного покупателя содержит элемент неопределенности. Поскольку в данном случае речь идет о статистически однородных событиях массового характера, то в качестве инструмента учета неопределенности правомерно использование вероятностных методов.

Опишем условия функционирования проекта:

1. Известен интервал времени функционирования проекта $[0,T]$ (от момента начала строительства до момента сдачи объекта в эксплуатацию).
2. В качестве объекта жилищного строительства рассмотрим, к примеру, жилой дом на N квартир, обладающих одинаковой потребительской полезностью.
3. Известна прогнозируемая динамика цен на недвижимость подобного типа (с фиксированными парамет-

рами) $\bar{p}(t), t \in [0,T]$ (цена квартиры, готовой к заселению, на первичном рынке жилья).

4. Известно распределение во времени сметных расходов на строительство $c(t), t \in [0,T]$ тогда $\int_0^T c(t)\,dt = C$ - сметная стоимость объекта.
5. Известен инвестиционный капитал самого застройщика I, вкладываемый в проект (интересен лишь случай $I < C$).

Для восполнения недостающей суммы иной застройщик в момент времени T_1 (где T_1 определяется из условия $\int_0^{T_1} c(t)\,dt = I$) получил бы банковский кредит в размере $C - I$ с датой погашения T и процентной ставкой $r \cdot 100\%$, тогда условие окупаемости проекта запишется в следующем виде:

$$I + (C - I)(1 + r) = C + (C - I)r \le N \cdot \bar{p}(T). \qquad (1)$$

Можно считать, что при массовом использовании этой схемы финансирования так, собственно, и формируется $\bar{p}(t)$. Здесь поступление средств от продажи всех квартир отнесено к моменту времени T, хотя на самом деле они распродаются при $t \ge T$.

Подобное допущение отчасти оправдано тем, что при $t \ge T$ застройщик уже не несет прямых расходов на строительство, а функция $\bar{p}(t), t \ge 0$ - как правило неубывающая, это объясняется постоянно растущим спросом на жилье. (В частности, в работе [2] указывается на тенденцию ускоряющегося трендового роста начиная со второй половины 2000 года. Цены на рынке в среднем стали возрастать на 10% ежемесячно, спрос в основном концентрируется на одно- и двухкомнатных квартирах).

Далее будет рассматриваться другой способ финансирования – привлечение в качестве инвесторов строительства потенциальных покупателей жилья. При этом поступление средств должно быть обеспечено в процессе строительства. Очевидно, что при продаже квартиры с отсрочкой заселения (так как она еще не построена) спрос должен быть стимулирован снижением цены, возможно весьма существенным по сравнению с ценой квартир, имеющихся в данный момент на рынке и готовых к заселению (т.е. $\bar{p}(t)$).

Будем считать, что застройщик установил цену квартиры равной $u(t), t \in [0,T]$ (в условиях идеальной конкурентной экономики с учетом изложенного выше должно быть $0 \le u(t) \le \bar{p}(t)$), и опишем динамику его активов.

Пусть на оси времени $[0,\infty)$ *случайным* образом возникают точки $t_i, i = 1,2,\ldots$ - моменты появления следующих событий: пришел i-й покупатель, и в случае наличия непроданных квартир (т.е. $i \le N$) застройщик получает от i-го покупателя сумму $u(t_i)$. Платежный баланс застройщика на момент времени t (здесь K - случайное число событий за [0, t]), имеет сальдо

$$S(t,u(\cdot)) = -\int_0^t c(s)\,ds + I + \sum_{i \le K \le N} u(t_i). \qquad (2)$$

Относительно указанных выше событий будем считать выполненными следующие предположения:

П1. Появление события в момент времени t не зависит от событий, предшествующих этому событию (отсутствие последействия);

П2. Вероятность появления одного события за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ равна

$$\lambda(\bar{p}(t) - u(t), t) \cdot \Delta t + o(\Delta t),$$

где функция двух аргументов $\lambda(\bar{p}(t) - u(t), t) \ge 0$ называется интенсивностью потока событий. Очевидно, что функция $\lambda(\bar{p}(t) - u(t), t)$ должна являться возрастающей и по первому, и по второму аргументу, кроме того, справедливо:

$\lambda(0,t) = 0$ при $t \le T$;

$\lambda(0,t) = \lambda_0$ при $t > T$.

Функцию $\lambda(\bar{p}(t) - u(t), t)$ считаем заданной;

П3. Вероятность появления двух и более событий за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ равна $o(\Delta t)$ (ординарность).

Итак, функции $c(t)$, $\bar{p}(t)$, $\lambda(\bar{p}(t) - u(t), t)$, а также величины I, T и N суть экзогенные составляющие данной модели, а функция $u(t)$ подлежит определению.

Теперь можно сформулировать ряд задач, каждая из которых отражает поведение застройщика, определяемое некоторыми “стратегическими” соображениями (тогда как решение соответствующей задачи определит его “тактическое” поведение).

Задача для застройщика, склонного к риску: Найти ценовую политику

$$u(\cdot) \in U = \{0 \le u(t) \le \bar{p}(t), t \in [0,T]\},$$

которая максимизирует ожидаемое значение доходности застройщика на момент времени T при условии, что квадрат риска равняется некоей допустимой с точки зрения застройщика величине. (Здесь под ожидаемой доходностью и квадратом риска понимается соответственно значение функции математического ожидания $M[S(T,u(\cdot))]$ и значение дисперсионной функции $D[S(T,u(\cdot))]$ случайного процесса $S(T,u(\cdot))$ при фиксированном $t = T$). Формально такая задача имеет следующий вид:

$$M[S(T,u(\cdot))] \to \max_{u(\cdot) \in U};$$

$$D[S(T,u(\cdot))] = \sigma_S^2;\ \sigma_S^2 \ge 0; \qquad (3)$$

$$\sigma_S^2 \ge \text{ - задано.}$$

Задача для застройщика, не склонного к риску: Найти ценовую политику $u(\cdot) \in U$, которая минимизирует риск застройщика при фиксированной ожидаемой доходности в момент времени T:

$$M[S(T,u(\cdot))] = I + \nu C \text{ - задано;}$$

$$D[S(T,u(\cdot))] \to \min_{u(\cdot) \in U}. \qquad (4)$$

Здесь $\nu \ge 0$ – норма прибыли застройщика. При этом очевидно, что для достаточно больших величин $I + \nu C$ вовсе не существует $u(\cdot)$, способных удовлетворить первому соотношению задачи (4). Поэтому для решения задачи (4) необходимо сперва решить следующую задачу.

Задача для застройщика, склонного к авантюризму:

$$M[S(T,u(\cdot))] \to \max_{u(\cdot)\in U}. \quad (5)$$

Кроме того, в задачах (3)-(5) можно потребовать от $u(\cdot)$ выполнения условия

$$M[S(T,u(\cdot))] \geq 0, \forall t \in [0,T], \quad (6)$$

т.к. если для некоторого t будет $S(t,u(\cdot)) < 0$, это означает приостановление строительства. Однако, как будет видно далее, добавление условия (6) в какую-либо из задач (3)-(5) превращает ее в задачу оптимального управления с фазовым ограничением, решение которой сопряжено с определенными трудностями.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Изучим подробнее некоторые вопросы, связанные с описанием динамики активов застройщика, в частности, упомянутый выше поток событий. Найдем вероятность $P_k(t)$ того, что за $(0,t)$ произойдет k событий, $k = 0,1,\ldots$. Для этого сравним величины $P_k(t)$ и $P_k(t+\Delta t)$ и составим дифференциальное уравнение для $P_k(t)$. Пусть $k = 0$, т.е. за (0, t) не произойдет ни одного события. За время $(0,t+\Delta t)$ не появится ни одного события, если событий не будет на интервалах (0, t) и $(t,t+\Delta t)$, т.е.

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\cdot[1-\lambda(\overline{p}(t)-u(t),t)\Delta t + o(\Delta t)],$$

или

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} =$$

$$= -\lambda(\overline{p}(t)-u(t),t)P_0(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}P_0(t).$$

При $\Delta t \to 0$ получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda(\overline{p}(t)-u(t),t)P_0(t), \quad P_0(0)=1. \quad (7)$$

Решение этого уравнения есть

$$P_0(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\overline{p}(s)-u(s),s)\,ds\right). \quad (8)$$

Если $k = 1$, то имеются две возможности: либо событие произошло в интервале (0, t), либо в $(t,t+\Delta t)$:

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)\cdot[1-\lambda(\overline{p}(t)-u(t),t)\Delta t + o(\Delta t)] +$$

$$+P_0(t)\cdot[\lambda(\overline{p}(t)-u(t),t)\Delta t + o(\Delta t)],$$

откуда

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda(\overline{p}(t)-u(t),t)P_1(t) +$$

$$+\lambda(\overline{p}(t)-u(t),t)P_0(t), \ P_1(0)=0.$$

Решение этого уравнения:

$$P_1(t) = \int_0^t \lambda(\overline{p}(s)-u(s),s)\,ds\, *$$

$$* \exp\left(-\int_0^t \lambda(\overline{p}(s)-u(s),s)\,ds\right).$$

В общем случае для $k \geq 1$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda(\overline{p}(t)-u(t),t)P_k(t) +$$

$$+\lambda(\overline{p}(t)-u(t),t)P_{k-1}(t), \ P_k(0)=0. \quad (9)$$

откуда

$$P_k(t) = \frac{\left(\int_0^t \lambda(\overline{p}(s)-u(s),s)\,ds\right)^k}{k!} *$$

$$* \exp\left(-\int_0^t \lambda(\overline{p}(s)-u(s),s)\,ds\right). \quad (10)$$

Таким образом, вероятность того, что на интервале (0, t) в данном нестационарном потоке произойдет k событий, описывается распределением Пуассона с параметром

$$\int_0^t \lambda(\overline{p}(s)-u(s),s)\,ds.$$

Следует заметить, что интервал времени τ между двумя соседними событиями в данном потоке имеет показательное распределение с параметром, равным интенсивности потока. Это следует из соотношения:

$$P\{\tau < t\} = 1 - P\{\tau > t\} =$$

$$= 1 - P_0(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(\overline{p}(s)-u(s),s)\,ds\right).$$

Пусть на момент времени t произошло k событий, тогда $t_i, i=\overline{1,k}$ – момент появления i -го события. Найдем функцию распределения случайной величины t_k:

$$F_k(t) = P\{t_k < t\} = 1 - P\{t_k > t\} =$$

$$= 1 - [P\{0<t<t_1\} + P\{t_1<t<t_2\} + \cdots +$$

$$+P\{t_{k-1}<t<t_k\}] = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} P_i(t) \quad (11)$$

и ее плотность вероятности

$$f_k(t) = \frac{dF_k(t)}{dt} = -\sum_{i=0}^{k-1}\frac{dP_i(t)}{dt} =$$

$$= \lambda(\overline{p}(t)-u(t),t) * P_{k-1}(t). \quad (12)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (7) и (9).

Теперь можно приступить к более четкому описанию понятий, о которых мы упомянули ранее (при формулировке задач (3)-(5)) и которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Сперва найдем выражение для величины $M[S(t,u(\cdot))]$. Пользуясь равенством (2) и учитывая, что первые два слагаемых в его правой части - неслучайные величины, получим:

$$M[S(t,u(\cdot))] = -\int_0^t c(s)\,ds + I + M[\sum_{i\leq K\leq N} u(t_i)].$$

Допустим, что в некоторый момент времени t случайная величина K приняла некоторое фиксированное значение k. Вероятность этого равна $P_k(t)$, а условное математическое ожидание ([1]) будет равно

$$M[\sum_{i\leq K\leq N} u(t_i) | K=k] = \begin{cases} M[\sum_{i=1}^{k} u(t_i)] & \text{при} \quad k \leq N; \\ M[\sum_{i=1}^{N} u(t_i)] & \text{при} \quad k > N. \end{cases}$$

Тогда полное математическое ожидание величины $M[\sum_{i\le K\le N} u(t_i)]$ определяется выражением

$$M[\sum_{i\le K\le N} u(t_i)] = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) M[\sum_{i\le K\le N} u(t_i) | K=k] =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} P_k(t) M[\sum_{i=1}^{k} u(t_i)] + \sum_{k=N+1}^{\infty} P_k(t) M[\sum_{i=1}^{N} u(t_i)].$$

Согласно свойству линейности математического ожидания справедливо

$$M[\sum_{i\le K\le N} u(t_i)] = \sum_{k=1}^{N} P_k(t) \sum_{i=1}^{k} M[u(t_i)] +$$
$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} P_k(t) \sum_{i=1}^{N} M[u(t_i)].$$

Поскольку случайные величины t_i – абсолютно непрерывны, то математические ожидания их функций $u(t_i)$ вычисляются следующим образом

$$M[u(t_i)] = \int_0^{\infty} \bar{u}(x) f_i(x)\, dx, \quad i = \overline{1,N}, \qquad (13)$$

где

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & при \quad x \in [0,T), \\ \bar{p}(T) & при \quad x \in [T,+\infty). \end{cases}$$

Следовательно

$$M[\sum_{i\le K\le N} u(t_i)] = \sum_{k=1}^{N} P_k(t) \sum_{i=1}^{k} \int_0^{\infty} \bar{u}(x) f_i(x)\, dx +$$
$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} P_k(t) \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\infty} \bar{u}(x) f_i(x)\, dx. \qquad (14)$$

Учитывая очевидное условие нормировки вероятностей

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1,$$

получим

$$M[\sum_{i\le K\le N} u(t_i)] = \sum_{k=1}^{N} P_k(t) \sum_{i=1}^{k} \int_0^{\infty} \bar{u}(x) f_i(x)\, dx +$$
$$+ \left(1 - \sum_{k=0}^{N} P_k(t)\right) \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\infty} \bar{u}(x) f_i(x)\, dx =$$
$$= (1 - P_0(t)) \int_0^{\infty} \bar{u}(x) \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, dx +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} P_k(t) \left(\int_0^{\infty} \bar{u}(x) \sum_{i=1}^{k} f_i(x)\, dx - \int_0^{\infty} \bar{u}(x) \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, dx \right) =$$
$$= (1 - P_0(t)) \int_0^{\infty} \bar{u}(x) \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, dx +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} P_k(t) \int_0^{\infty} \bar{u}(x) \left(\sum_{i=1}^{k} f_i(x) - \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \right) dx =$$
$$= \int_0^{\infty} \bar{u}(x) \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, dx - \sum_{k=0}^{N-1} P_k(t) \int_0^{\infty} \bar{u}(x) \sum_{i=k+1}^{N} f_i(x)\, dx. \qquad (15)$$

Далее мы воспользуемся соотношением для плотности вероятности случайной величины t_i, которое очевидным образом следует из соотношений (11) и (12):

$$\int_0^{\infty} f_i(x) = 1, \quad i = \overline{1,N}.$$

Тогда

$$M[\sum_{i\le K\le N} u(t_i)] = \int_0^{T} u(x) \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, dx + \int_T^{\infty} \bar{p}(T) \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, dx -$$
$$- \sum_{k=0}^{N-1} P_k(t) \left(\int_0^{T} u(x) \sum_{i=k+1}^{N} f_i(x)\, dx + \int_T^{\infty} \bar{p}(T) \sum_{i=k+1}^{N} f_i(x)\, dx \right) =$$
$$= \int_0^{T} u(x) \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, dx + \sum_{i=1}^{N} \bar{p}(T) \left(1 - \int_0^{T} f_i(x)\, dx\right) -$$
$$- \sum_{k=0}^{N-1} P_k(t) \Big(\int_0^{T} u(x) \sum_{i=k+1}^{N} f_i(x)\, dx +$$
$$+ \sum_{i=k+1}^{N} \bar{p}(T) \left(1 - \int_0^{T} f_i(x)\, dx\right) \Big) =$$
$$= N\bar{p}(T) + \int_0^{T} \left(u(x) - \bar{p}(T)\right) \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, dx -$$
$$- \sum_{k=0}^{N-1} P_k(t) \left((N-k)\bar{p}(T) + \int_0^{T} \left(u(x) - \bar{p}(T)\right) \sum_{i=k+1}^{N} f_i(x)\, dx \right).$$

Таким образом, величина $M[S(t,u(\cdot))]$ равна:

$$M[S(t,u(\cdot))] = -\int_0^{t} c(s)\, ds + I + N\bar{p}(T) +$$
$$+ \int_0^{T} \left(u(x) - \bar{p}(T)\right) \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, dx -$$
$$- \sum_{k=0}^{N-1} P_k(t) \left((N-k)\bar{p}(T) + \int_0^{T} \left(u(x) - \bar{p}(T)\right) \sum_{i=k+1}^{N} f_i(x)\, dx \right). \qquad (16)$$

Теперь найдем выражение для $D[S(t,u(\cdot))]$. Дисперсионная функция обладает следующим свойством :

$$D[S(t,u(\cdot))] = D[\sum_{i\le K\le N} u(t_i)] =$$
$$= M[\left(\sum_{i\le K\le N} u(t_i)\right)^2] - \left(M[\sum_{i\le K\le N} u(t_i)]\right)^2, \qquad (17)$$

где

$$M[\sum_{i\le K\le N} u(t_i)] = \int_0^{\infty} \bar{u}(x) \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\, dx -$$
$$- \sum_{k=0}^{N-1} P_k(t) \int_0^{\infty} \bar{u}(x) \sum_{i=k+1}^{N} f_i(x)\, dx,$$

как было показано ранее. Для того, чтобы применить соотношение (17), нужно вычислить величину $M[\left(\sum_{i\le K\le N} u(t_i)\right)^2]$ (т.н. второй начальный момент).

Пользуясь изложенным выше приемом, получим

$$M[\left(\sum_{i\le K\le N} u(t_i)\right)^2] = \sum_{k=1}^{N} P_k(t) M[\left(\sum_{i=1}^{k} u(t_i)\right)^2] +$$
$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} P_k(t) M[\left(\sum_{i=1}^{N} u(t_i)\right)^2] =$$
$$= (1 - P_0(t)) M[\left(\sum_{i=1}^{N} u(t_i)\right)^2] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} P_k(t) M[\left(\sum_{i=1}^{k} u(t_i)\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} u(t_i)\right)^2] =$$
$$= (1 - P_0(t)) M[\left(\sum_{i=1}^{N} u(t_i)\right)^2] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} P_k(t) M[\left(\sum_{i=1}^{k} u(t_i) - \sum_{i=1}^{N} u(t_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{k} u(t_i) + \sum_{i=1}^{N} u(t_i)\right)] =$$
$$= (1 - P_0(t)) M[\left(\sum_{i=1}^{N} u(t_i)\right)^2] -$$
$$- \sum_{k=1}^{N-1} P_k(t) M[\left(\sum_{i=k+1}^{N} u(t_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{k} u(t_i) + \sum_{i=1}^{N} u(t_i)\right)] =$$
$$= (1 - P_0(t)) M[\sum_{l=1}^{N} u(t_l) \sum_{m=1}^{N} u(t_m)] -$$

$$-\sum_{k=1}^{N-1}P_k(t)\left(M[\sum_{l=k+1}^{N}u(t_l)\sum_{m=1}^{k}u(t_m)]+M[\sum_{l=k+1}^{N}u(t_l)\sum_{m=1}^{N}u(t_m)]\right).$$

Теперь воспользуемся предположением **П1**. Величины t_l и t_m, где $l,m=\overline{1,N},$ являются попарно независимыми при $l\neq m$, а следовательно - некоррелированными.

$$M[\left(\sum_{i\le K\le N}u(t_i)\right)^2]=$$

$$=(1-P_0(t))(M[\sum_{l=1}^{N}u(t_l)]M[\sum_{m=1}^{N}u(t_m)]-$$

$$-\sum_{l=1}^{N}(M[u(t_l)])^2+\sum_{l=1}^{N}M[u(t_l)^2])-$$

$$-\sum_{k=1}^{N-1}P_k(t)\Big\{M[\sum_{l=k+1}^{N}u(t_l)]M[\sum_{m=1}^{k}u(t_m)]+$$

$$+M[\sum_{l=k+1}^{N}u(t_l)]M[\sum_{m=1}^{N}u(t_m)]-$$

$$\sum_{l=k+1}^{N}(M[u(t_l)])^2+\sum_{l=k+1}^{N}M[u(t_l)^2]\Big\}=$$

$$=\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\,dx\right)^2-\sum_{i=1}^{N}\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)f_i(x)\,dx\right)^2+$$

$$+\int_0^\infty\overline{u}(x)^2\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{N-1}P_k(t)\Big\{\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{l=k+1}^{N}f_l(x)\,dx\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{m=1}^{k}f_m(x)\,dx+$$

$$+\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{l=k+1}^{N}f_l(x)\,dx\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{m=1}^{N}f_m(x)\,dx-$$

$$-\sum_{i=k+1}^{N}\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)f_i(x)\,dx\right)^2+\int_0^\infty\overline{u}(x)^2\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\Big\}.$$

Таким образом, согласно формуле (17) получим

$$D[S(t,u(\cdot))]=$$

$$=\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\,dx\right)^2-\sum_{i=1}^{N}\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)f_i(x)\,dx\right)^2+$$

$$+\int_0^\infty\overline{u}(x)^2\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{N-1}P_k(t)\Big\{\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{l=k+1}^{N}f_l(x)\,dx\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{m=1}^{k}f_m(x)\,dx+$$

$$+\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{l=k+1}^{N}f_l(x)\,dx\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{m=1}^{N}f_m(x)\,dx-$$

$$-\sum_{i=k+1}^{N}\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)f_i(x)\,dx\right)^2+\int_0^\infty\overline{u}(x)^2\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\Big\}-$$

$$-\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\,dx-\sum_{k=0}^{N-1}P_k(t)\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\right)^2=$$

$$=\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\,dx\right)^2-\sum_{i=1}^{N}\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)f_i(x)\,dx\right)^2+$$

$$+\int_0^\infty\overline{u}(x)^2\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{N-1}P_k(t)\Big\{\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{l=k+1}^{N}f_l(x)\,dx\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{m=1}^{k}f_m(x)\,dx+$$

$$+\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{l=k+1}^{N}f_l(x)\,dx\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{m=1}^{N}f_m(x)\,dx-$$

$$-\sum_{i=k+1}^{N}\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)f_i(x)\,dx\right)^2+\int_0^\infty\overline{u}(x)^2\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\Big\}-$$

$$-\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\,dx\right)^2+$$

$$+2\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\,dx\sum_{k=0}^{N-1}P_k(t)\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx-$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{N-1}P_k(t)\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\right)^2=$$

$$=\int_0^\infty\overline{u}(x)^2\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\,dx-\sum_{i=1}^{N}\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)f_i(x)\,dx\right)^2-$$

$$-\sum_{k=1}^{N-1}P_k(t)\Big\{\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{l=k+1}^{N}f_l(x)\,dx\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{m=1}^{k}f_m(x)\,dx-$$

$$-\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{l=k+1}^{N}f_l(x)\,dx\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{m=1}^{N}f_m(x)\,dx-$$

$$-\sum_{i=k+1}^{N}\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)f_i(x)\,dx\right)^2+\int_0^\infty\overline{u}(x)^2\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\Big\}-$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{N-1}P_k(t)\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)^2f_i(x)\,dx-\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)f_i(x)\,dx\right)^2\right)-$$

$$-\sum_{k=0}^{N-1}P_k(t)\Big\{\sum_{i=k+1}^{N}\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)^2f_i(x)\,dx-\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)f_i(x)\,dx\right)^2\right)-$$

$$-\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\right)^2\Big\}-$$

$$-\left(\sum_{k=0}^{N-1}P_k(t)\int_0^\infty\overline{u}(x)\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\right)^2.$$

Далее применим соотношения (13) и (15). Сперва вычислим следующее выражение:

$$\int_0^\infty\overline{u}(x)^2f_i(x)\,dx-\left(\int_0^\infty\overline{u}(x)f_i(x)\,dx\right)^2=\int_0^T u(x)^2f_i(x)\,dx+$$

$$+\overline{p}(T)^2\cdot\left(1-\int_0^T f_i(x)\,dx\right)-\left(\int_0^T\left(u(x)-\overline{p}(T)\right)f_i(x)\,dx\right)^2=$$

$$=\overline{p}(T)^2+\int_0^T\left(u(x)^2-\overline{p}(T)^2\right)f_i(x)\,dx-\overline{p}(T)^2-$$

$$-2\overline{p}(T)\int_0^T\left(u(x)-\overline{p}(T)\right)f_i(x)\,dx-$$

$$-\left(\int_0^T\left(u(x)-\overline{p}(T)\right)f_i(x)\,dx\right)^2=$$

$$=\int_0^T\left(u(x)-\overline{p}(T)\right)^2f_i(x)\,dx-\left(\int_0^T\left(u(x)-\overline{p}(T)\right)f_i(x)\,dx\right)^2.$$

Тогда выражение для $D[S(t,u(\cdot))]$ окончательно примет следующий вид:

$$D[S(t,u(\cdot))]=\sum_{i=1}^{N}\ (\int_0^T\left(u(x)-\overline{p}(T)\right)^2f_i(x)\,dx-$$

$$-\left(\int_0^T\left(u(x)-\bar{p}(T)\right)f_i(x)\,dx\right)^2)-$$
$$-\sum_{k=0}^{N-1}P_k(t)\{\sum_{i=k+1}^{N}(\int_0^T\left(u(x)-\bar{p}(T)\right)^2 f_i(x)\,dx-$$
$$-\left(\int_0^T\left(u(x)-\bar{p}(T)\right)f_i(x)\,dx\right))-$$
$$-\left((N-k)\bar{p}(T)+\int_0^T\left(u(x)-\bar{p}(T)\right)\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\right)^2\Bigg\}-$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{N-1}P_k(t)\left((N-k)\bar{p}(T)+\int_0^T\left(u(x)-\bar{p}(T)\right)\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\right)\right)^2. \tag{18}$$

3. ЗАДАЧА ДЛЯ ЗАСТРОЙЩИКА, СКЛОННОГО К АВАНТЮРИЗМУ

Сперва займемся решением задачи (5). Во-первых, очевидно, что она обладает наиболее простой структурой по сравнению с задачами (3) и (4). Кроме того, как уже было отмечено, результат, полученный при ее решении, необходим для проверки корректности постановки задачи (4).

С учетом соотношения (16) выражение (5) запишется в следующем виде:

$$M[S(T,u(\cdot))]=-C+I+N\bar{p}(T)+$$
$$+\int_0^T\left(u(x)-\bar{p}(T)\right)\sum_{i=1}^{N}f_i(x)\,dx-$$
$$-\sum_{k=0}^{N-1}P_k(t)\{\ (N-k)\bar{p}(T)+$$
$$+\int_0^T\left(u(x)-\bar{p}(T)\right)\sum_{i=k+1}^{N}f_i(x)\,dx\}\to\max_{u(\cdot)\in U}. \tag{19}$$

Введем следующие обозначения:

$$y_{1,i}(t)=\int_0^t\left(u(x)-\bar{p}(T)\right)f_i(x)\,dx,\quad i=\overline{1,N}, \tag{20}$$

$$y_{2,i}(t)=\int_0^t\left(u(x)-\bar{p}(T)\right)^2 f_i(x)\,dx,\quad i=\overline{1,N}, \tag{21}$$

$$y_{N+1}(t)=\int_0^t\lambda\left(\bar{p}(x)-u(x),x\right)dx, \tag{22}$$

$$y(t)=\left(y_{1,1}(t),\ldots,y_{1,N}(t),y_{N+1}(t)\right)^T.$$

Очевидно, что выполняются условия

$$y_{1,i}(0)=0,\quad y_{2,i}(0)=0,\quad y_{N+1}(0)=0,\quad i=\overline{1,N}. \tag{23}$$

С учетом выражений (20), (22), (23) а также (10) и (12) запишем задачу (19) в следующем виде:

Максимизировать функционал

$$m(y(T))\overset{def}{=}M[S(T,u(\cdot))]=-C+I+N\bar{p}(T)+\sum_{i=1}^{N}y_{1,i}(T)-$$
$$-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}e^{-y_{N+1}(T)}\left((N-k)\bar{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right)\to\max_{u(\cdot)} \tag{24}$$

при условиях

$$\frac{dy_{1,i}(t)}{dt}=\left(u(t)-\bar{p}(T)\right)\lambda(\bar{p}(t)-u(t),t)*$$
$$*\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(t)}, \tag{25}$$

$$\frac{dy_{N+1}(t)}{dt}=\lambda(\bar{p}(t)-u(t),t), \tag{26}$$

$$y_{1,i}(0)=0,\quad y_{N+1}(0)=0,\quad i=\overline{1,N}, \tag{27}$$

$$u(\cdot)\in U=\{0\le u(t)\le\bar{p}(t),\ t\in[0,T]\}. \tag{28}$$

Задача (24)-(28) имеет вид канонической задачи оптимального управления (задачи Майера, т.к. функционал (24) содержит лишь терминальную компоненту). Момент T окончания процесса - задан. Допустимыми управлениями будем считать кусочно-непрерывные функции $u(\cdot)$ со значениями в множестве U.

Необходимым условием оптимальности в задаче (24)-(28) является принцип максимума Л.С. Понтрягина [3,4].

Теорема. Пусть пара $(y^*(\cdot),u^*(\cdot))$ является оптимальным решением задачи (24)-(28). Тогда существует такая вектор-функция

$$\psi(t)=\left(\psi_{1,1}(t),\ldots,\psi_{1,N}(t),\psi_{N+1}(t)\right)^T,$$

при которой:

1) в каждой точке непрерывности управления $u^*(\cdot)$ функция Гамильтона-Понтрягина $H(t,\psi(t),y^*(t),u)$ достигает максимума по управлению, т.е.

$$\max_{u\in U}H(t,\psi(t),y^*(t),u)=H(t,\psi(t),y^*(t),u^*(t)), \tag{29}$$

где

$$H(t,\psi,y,u)=\sum_{i=1}^{N}\psi_{1,i}\left(u-\bar{p}(T)\right)\lambda(\bar{p}(t)-$$
$$-u,t)\frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}}+\psi_{N+1}\cdot\lambda(\bar{p}(t)-u,t); \tag{30}$$

2) выполняется условие трансверсальности

$$\delta m(y(T))-\sum_{i=1}^{N}\psi_{1,i}(T)\cdot\delta y_{1,i}(T)-\psi_{N+1}(T)\cdot\delta y_{N+1}(T)=0 \tag{31}$$

при произвольных $\delta y_{1,i}(T)$ и $\delta y_{N+1}(T)$ (т.к. правый конец свободен), а вариация $\delta m(y(T))$ определяется следующим образом:

$$\delta m(y(T))=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{1,i}}\delta y_{1,i}(T)+$$
$$+\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{N+1}}\delta y_{N+1}(T); \tag{32}$$

3) удовлетворяется система уравнений

$$\frac{dy_{1,i}(t)}{dt}=\left(u^*(t)-\bar{p}(T)\right)\lambda(\bar{p}(t)-$$
$$-u^*(t),t)\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(t)}, \tag{33}$$

$$\frac{dy_{N+1}(t)}{dt}=\lambda(\bar{p}(t)-u^*(t),t), \tag{34}$$

$$y_{1,i}(0)=0,\quad y_{N+1}(0)=0, \tag{35}$$

$$\frac{d\psi_{1,i}(t)}{dt}=-\frac{\partial H(t,\psi(t),y(t),u^*(t))}{\partial y_{1,i}(t)}, \tag{36}$$

$$\frac{d\psi_{N+1}(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t,\psi(t),y(t),u^*(t))}{\partial y_{N+1}(t)}, \quad (37)$$

$$i = \overline{1,N}. \quad \blacksquare$$

Нетрудно видеть, что уравнения (36) имеют вид

$$\frac{d\psi_{1,i}(t)}{dt} = 0, \quad i = \overline{1,N}, \quad (38)$$

поскольку гамильтониан (30) не зависит от первых N фазовых переменных.

Следовательно,

$$\psi_{1,i}(t) = \psi_{1,i} = const, \quad i = \overline{1,N}. \quad (39)$$

Предположим, что функция интенсивности $\lambda(\bar{p}(t) - u(t), t)$ имеет вид

$$\lambda(\bar{p}(t) - u(t), t) = (\bar{p}(t) - u(t)) *$$

$$*(b_1 t + b_2) \geq 0, \quad t \in [0,T], \quad (40)$$

где

$b_1 \geq 0$ и $b_2 \geq 0$ - некоторые константы. Тогда выражение (30) запишется в следующем виде:

$$H(t,\psi,y,u) = \sum_{i=1}^{N} \psi_{1,i} \cdot \left(u - \bar{p}(T)\right)\left(\bar{p}(t) - u\right) *$$

$$*(b_1 t + b_2)\frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!} e^{-y_{N+1}} +$$

$$+\psi_{N+1} \cdot (\bar{p}(t) - u) \cdot (b_1 t + b_2) =$$

$$= \left(u - \bar{p}(T)\right)\left(\bar{p}(t) - u\right) \cdot (b_1 t + b_2) e^{-y_{N+1}} \sum_{i=1}^{N} \psi_{1,i} \cdot \frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!} +$$

$$+\psi_{N+1} \cdot (\bar{p}(t) - u) \cdot (b_1 t + b_2) =$$

$$= \left(-u^2 + u(\bar{p}(t) + \bar{p}(T)) - \bar{p}(T)\bar{p}(t)\right) *$$

$$*k_2(t,\psi_{1,1},\ldots,\psi_{1,N},y_{N+1}) + (\bar{p}(t) - u) k_1(t,\psi_{N+1}), \quad (41)$$

где

$$k_2(t,\psi_{1,1},\ldots,\psi_{1,N},y_{N+1}) = (b_1 t + b_2) e^{-y_{N+1}} *$$

$$* \sum_{i=1}^{N} \psi_{1,i} \cdot \frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!} \quad (42)$$

$$k_1(t,\psi_{N+1}) = \psi_{N+1} \cdot (b_1 t + b_2). \quad (43)$$

Найдем структуру подозрительного на оптимальность управления из условия (29) максимума гамильтониана (41) по управлению. При этом решается задача поиска наибольшего значения квадратного трехчлена на отрезке $[0,\bar{p}(t)], \forall t \in [0,T]$. Гамильтониан (41) имеет стационарную точку, определяемую из условия

$$\left.\frac{\partial H(t,\psi,y,u)}{\partial u}\right|_{u=u_s} = -2u_s k_2(t,\psi_{1,1},\ldots,\psi_{1,N},y_{N+1}) +$$

$$+(\bar{p}(t) + \bar{p}(T)) k_2(t,\psi_{1,1},\ldots,\psi_{1,N},y_{N+1}) - k_1(t,\psi_{N+1}) = 0, \quad (44)$$

откуда

$$u_s(t) = \frac{\bar{p}(t) + \bar{p}(T)}{2} -$$

$$-\frac{k_1(t,\psi_{N+1}(t))}{2k_2(t,\psi_{1,1},\ldots,\psi_{1,N},y_{N+1}(t))}. \quad (45)$$

Как будет показано далее, $\psi_{1,i} > 0, i = \overline{1,N},$ тогда из (26), (27), (40) и (42) следует, что $k_2(t,\psi_{1,1},\ldots,\psi_{1,N},y_{N+1}(t)) > 0,$ следовательно, в точке $u_s(t)$ выполняется достаточное условие безусловного максимума гамильтониана по управлению:

$$\left.\frac{\partial^2 H(t,\psi,y,u)}{\partial u^2}\right|_{u=u_s} = -2k_2(t,\psi_{1,1},\ldots,\psi_{1,N},y_{N+1}) < 0. \quad (46)$$

Таким образом, подозрительное на оптимальность управление обладает следующей структурой:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & при \quad u_s(t) < 0, \\ u_s(t) & при \quad 0 \leq u_s(t) \leq \bar{p}(t), \\ \bar{p}(t) & при \quad u_s(t) > \bar{p}(t). \end{cases} \quad (47)$$

Проверим выполнение условия трансверсальности в форме (31). Для этого необходимо вычислить вариацию $\delta m(y(T))$. Пользуясь выражением (24), получим:

$$\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{1,i}} = 1 - e^{-y_{N+1}(T)} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}, \quad i = \overline{1,N}, \quad (48)$$

$$\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{N+1}} = -\sum_{k=1}^{N-1} \frac{y_{N+1}(T)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-y_{N+1}(T)} *$$

$$*\left((N-k)\bar{p}(T) + \sum_{i=k+1}^{N} y_{1,i}(T)\right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1} \frac{y_{N+1}(T)^k}{k!} e^{-y_{N+1}(T)}\left((N-k)\bar{p}(T) + \sum_{i=k+1}^{N} y_{1,i}(T)\right) =$$

$$= -e^{-y_{N+1}(T)} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left((N-k-1)\bar{p}(T) + \sum_{i=k+2}^{N} y_{1,i}(T)\right) +$$

$$+e^{-y_{N+1}(T)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left((N-k)\bar{p}(T) + \sum_{i=k+1}^{N} y_{1,i}(T)\right) =$$

$$= e^{-y_{N+1}(T)} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left(\bar{p}(T) + y_{1,k+1}(T)\right) +$$

$$+e^{-y_{N+1}(T)} \frac{y_{N+1}(T)^{N-1}}{(N-1)!}\left(\bar{p}(T) + y_{1,N}(T)\right) =$$

$$= e^{-y_{N+1}(T)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left(\bar{p}(T) + y_{1,k+1}(T)\right). \quad (49)$$

Тогда, согласно (32), будет

$$\delta m(y(T)) = \sum_{i=1}^{N}\left(1 - e^{-y_{N+1}(T)} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\right)\delta y_{1,i}(T) +$$

$$+\left(e^{-y_{N+1}(T)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left(\bar{p}(T) + y_{1,k+1}(T)\right)\right)\delta y_{N+1}(T). \quad (50)$$

Следовательно, условие трансверсальности (31) с учетом (39) запишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(1 - e^{-y_{N+1}(T)} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\right)\delta y_{1,i}(T) +$$

$$+\left(e^{-y_{N+1}(T)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left(\bar{p}(T) + y_{1,k+1}(T)\right)\right)\delta y_{N+1}(T) -$$

$$-\sum_{i=1}^{N} \psi_{1,i} \cdot \delta y_{1,i}(T) - \psi_{N+1}(T) \cdot \delta y_{N+1}(T) =$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left(1-e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}-\psi_{1,i}\right)\delta y_{1,i}(T)+$$
$$+\{e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left(\bar{p}(T)+y_{1,k+1}(T)\right)-$$
$$-\psi_{N+1}(T)\}\delta y_{N+1}(T)=0. \qquad (51)$$

Поскольку вариации

$\delta y_{1,1}(T),\ldots,\delta y_{1,N}(T),\delta y_{N+1}(T)$

произвольны, справедливо следующее:

$$\psi_{1,i}=1-e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!},\quad i=\overline{1,N}, \qquad (52)$$

$$\psi_{N+1}(T)=e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left(\bar{p}(T)+y_{1,k+1}(T)\right). \qquad (53)$$

Согласно выражению (52) очевидно, что $\psi_{1,i}>0,\ i=\overline{1,N}$. Следовательно, достаточное условие (46) безусловного максимума гамильтониана по управлению действительно выполняется. Теперь выпишем уравнение (37):

$$\frac{d\psi_{N+1}(t)}{dt}=-\left(u^*(t)-\bar{p}(T)\right)\left(\bar{p}(t)-u^*(t)\right)\cdot(b_1t+b_2)*$$
$$*\left(e^{-y_{N+1}(t)}\sum_{i=2}^{N}\frac{y_{N+1}(t)^{i-2}}{(i-2)!}\cdot\psi_{1,i}-e^{-y_{N+1}(t)}\sum_{i=1}^{N}\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}\cdot\psi_{1,i}\right)=$$

$$=\left(u^*(t)-\bar{p}(T)\right)\left(\bar{p}(t)-u^*(t)\right)\cdot(b_1t+b_2)*$$
$$*\{e^{-y_{N+1}(t)}\sum_{i=1}^{N}\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}\cdot\psi_{1,i}-$$
$$-e^{-y_{N+1}(t)}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}\cdot\psi_{1,i+1}\}=$$
$$=\left(u^*(t)-\bar{p}(T)\right)\left(\bar{p}(t)-u^*(t)\right)(b_1t+b_2)e^{-y_{N+1}(t)}*$$
$$*\left(\sum_{i=1}^{N-1}\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}(\psi_{1,i}-\psi_{1,i+1})+\frac{y_{N+1}(t)^{N-1}}{(N-1)!}\psi_{1,N}\right). \qquad (54)$$

Таким образом, получена двухточечная краевая задача для системы $2N+2$ уравнений (33), (34), (39), (54) (с достаточно сложной структурой правой части) с краевыми условиями (35), (52), (53). Она не является классической задачей Коши, т.к. первые $N+1$ краевых условий заданы при $t=0$, а оставшиеся $N+1$ - при $t=T$, и поэтому численная реализация нахождения ее решения затруднена отсутствием эффективного способа получения начальных условий. Решение подобных краевых задач, возникающих в результате применения принципа максимума, сводится либо к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, либо к максимизации вогнутой функции в конечномерном пространстве [5,6].

Так или иначе, в результате решения данной краевой задачи определяется пара $(y^*(\cdot),u^*(\cdot))$, на которой может достигаться экстремум функционала (24). Интересно, что в данном случае оптимальная ценовая политика не зависит от сметной стоимости объекта *C* и инвестиционного капитала застройщика *I* (это объясняется отсутствием ограничения (6)).

Теперь определим, какова мера отклонения величины $S(T,u^*(\cdot))$ от ее ожидаемого значения $M[S(T,u^*(\cdot))]$, т.е. мера риска. Как было отмечено ранее, она характеризуется значением дисперсионной функции $D[S(T,u^*(\cdot))]$.

Верхнюю границу для вероятности отклонения случайной величины от ее математического ожидания устанавливает неравенство П.Л. Чебышева [1], которое в нашем случае выглядит следующим образом:

$$P\left\{\left|S(T,u^*(\cdot))-M[S(T,u^*(\cdot))]\right|\geq\varepsilon\right\}\leq$$
$$\leq\frac{D[S(T,u^*(\cdot))]}{\varepsilon^2},\quad\forall\varepsilon>0. \qquad (55)$$

С учетом обозначений (20)-(22) выражение (18) для дисперсионной функции можно переписать так:

$$D[S(t,u(\cdot))]=\sum_{i=1}^{N}\left(y_{2,i}(T)-y_{1,i}(T)^2\right)-$$
$$-e^{-y_{N+1}(t)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(t)^k}{k!}\{\sum_{i=k+1}^{N}\left(y_{2,i}(T)-y_{1,i}(T)^2\right)-$$
$$-\left((N-k)\bar{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right)^2\}-$$
$$-\left(e^{-y_{N+1}(t)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(t)^k}{k!}\left((N-k)\bar{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right)\right)^2. \qquad (56)$$

Пример. Пусть $N=2$, тогда полученная краевая задача принципа максимума будет выглядеть следующим образом:

$$u_s(t)=\frac{\bar{p}(t)+\bar{p}(T)}{2}-\frac{\psi_3(t)}{2e^{-y_3(t)}(\psi_{1,1}+y_3(t)\cdot\psi_{1,2})};$$

$$u^*(t)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad u_s(t)<0;\\ u_s(t) & \text{при}\quad 0\leq u_s(t)\leq\bar{p}(t);\\ \bar{p}(t) & \text{при}\quad u_s(t)>\bar{p}(t);\end{cases}$$

$$\frac{dy_{1,1}(t)}{dt}=\left(u^*(t)-\bar{p}(T)\right)\left(\bar{p}(t)-u^*(t)\right)(b_1t+b_2)e^{-y_3(t)};$$

$$\frac{dy_{1,2}(t)}{dt}=\left(u^*(t)-\bar{p}(T)\right)\left(\bar{p}(t)-\right.$$
$$\left.-u^*(t)\right)(b_1t+b_2)y_3(t)e^{-y_3(t)};$$

$$\frac{dy_{N+1}(t)}{dt}=(\bar{p}(t)-u^*(t))(b_1t+b_2);$$

$$\frac{d\psi_3(t)}{dt}=\left(u^*(t)-\bar{p}(T)\right)\left(\bar{p}(t)-u^*(t)\right)*$$
$$*(b_1t+b_2)e^{-y_3(t)}\cdot(\psi_{1,1}-\psi_{1,2}+y_3(t)\psi_{1,2});$$

$$y_{1,1}(0)=0;\quad y_{1,2}(0)=0;\quad y_3(0)=0;$$

$$\psi_{1,1}=1-e^{-y_3(T)};\quad\psi_{1,2}=1-e^{-y_3(T)}(1+y_3(T));$$

$$\psi_3(T)=e^{-y_3(T)}\{\bar{p}(T)+y_{1,1}(T)+$$
$$+y_3(T)[\bar{p}(T)+y_{1,2}(T)]\}.$$

Эта задача решена численно при помощи специально написанной программы. Приводится результат для следующих данных: $T=365$,

$$\bar{p}(t)=22\,260(1+10^{-4}\cdot t),\quad b_1=4\cdot10^{-8},\quad b_2=8\cdot10^{-6}.$$

Графики функций $\bar{p}(t)$ и $u^*(t)$ изображены на рис. 1.

Ожидаемое значение доходности по проекту равно ***–C + I + 43 406,*** а чистая прибыль равна <u>**–C + 43 406**</u>. Графики текущего ожидаемого значения доходности (16) для случая $c(t)=\frac{C}{T}$, C = *40 000* представлены на рис. 2 (для значений собственного инвестиционного капитала застройщика I = 0 и I = 2 000). Видно, что если застройщик обладает инвестиционным капиталом, примерно равным 2 000 и более, то выполняется условие (6), т.е. в среднем в процессе строительства будет обеспечена возможность своевременно производить платежи.

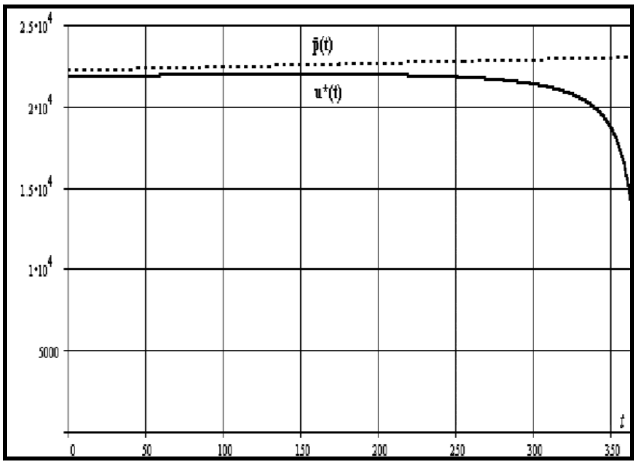

Рис. 1. Численное решение

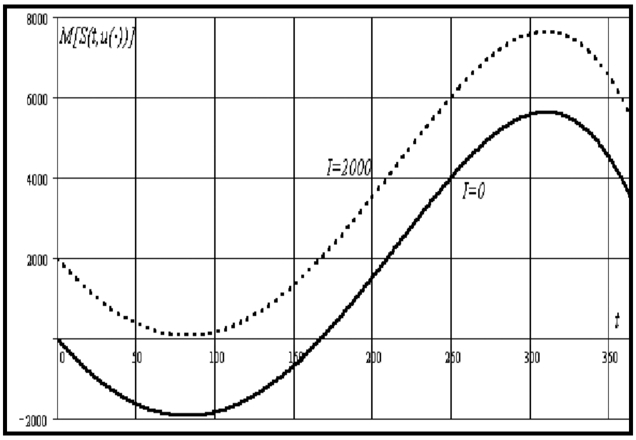

Рис. 2. Текущее ожидаемое значение доходности

Значение дисперсионной функции $D[S(T,u^*(\cdot))]$ равно 3 159 364. Из (55) следует, что вероятность отклонения величины $S(T,u^*(\cdot))$ от ее ожидаемого значения $M[S(T,u^*(\cdot))]=-C+I+4\ 3406$ более чем на $3\sqrt{D[S(T,u^*(\cdot))]}=5\ 332$ (правило "трех сигм") не превосходит $\frac{1}{9}=0,(1)$.

4. ЗАДАЧА ДЛЯ ЗАСТРОЙЩИКА, СКЛОННОГО К РИСКУ

Теперь приступим к решению задачи (3). С учетом ранее полученных соотношений (19) и (56) и обозначений (20)-(22) она трансформируется в следующую задачу оптимального управления:

Максимизировать функционал

$$m(y(T))=-C+I+N\bar{p}(T)+\sum_{i=1}^{N}y_{1,i}(T)-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}e^{-y_{N+1}(T)}*\left((N-k)\bar{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right)\to\max_{u(\cdot)} \qquad (57)$$

при условиях

$$\frac{dy_{1,i}(t)}{dt}=\left(u(t)-\bar{p}(T)\right)\lambda(\bar{p}(t)-u(t),t)\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(t)}, \qquad (58)$$

$$\frac{dy_{2,i}(t)}{dt}=\left(u(t)-\bar{p}(T)\right)^2\lambda(\bar{p}(t)-u(t),t)\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(t)}, \qquad (59)$$

$$\frac{dy_{N+1}(t)}{dt}=\lambda(\bar{p}(t)-u(t),t), \qquad (60)$$

$$y_{1,i}(0)=0,\quad y_{2,i}(0)=0,$$

$$y_{N+1}(0)=0,\quad i=\overline{1,N}, \qquad (61)$$

$$u(\cdot)\in U=\{0\le u(t)\le\bar{p}(t),\ t\in[0,T]\}. \qquad (62)$$

$$D(y(T))\overset{def}{=}D[S(T,u(\cdot))]=\sum_{i=1}^{N}\left(y_{2,i}(T)-y_{1,i}(T)^2\right)-e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\cdot\left\{\sum_{i=k+1}^{N}\left(y_{2,i}(T)-y_{1,i}(T)^2\right)-\left((N-k)\bar{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right)^2\right\}-\left(e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left((N-k)\bar{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right)\right)^2=\sigma_S^2. \qquad (63)$$

Заметим, что в данной задаче фазовый вектор имеет размерность $2N+1$:

$$y(t)=\left(y_{1,1}(t),\ldots,y_{1,N}(t),y_{2,1}(t),\ldots,y_{2,N}(t),y_{N+1}(t)\right)^T. \qquad (64)$$

Условие (63) означает, что правый конец $y(T)$ траектории динамической системы (58)-(61) должен находиться на соответствующей гиперповерхности из R^{2N+1}. Таким образом, рассматривается задача с закрепленным левым и подвижным правым концом.

Для решения задачи (57)-(63) вновь воспользуемся принципом максимума. Функция Гамильтона-Понтрягина такова:

$$H(t,\psi,y,u)=\sum_{i=1}^{N}\psi_{1,i}\cdot\left(u-\bar{p}(T)\right)*\lambda(\bar{p}(t)-u,t)\frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}}+\sum_{i=1}^{N}\psi_{2,i}\cdot\left(u-\bar{p}(T)\right)^2\lambda(\bar{p}(t)-u,t)\frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}}+\psi_{N+1}\cdot\lambda(\bar{p}(t)-u,t); \qquad (65)$$

Как и в задаче авантюриста, функция $H(t,\psi,y,u)$ зависит лишь от последней фазовой переменной, поэтому

$$\psi_{1,i}(t)=\psi_{1,i}=const,$$

$$\psi_{2,i}(t)=\psi_{2,i}=const, \quad i=\overline{1,N}. \qquad (66)$$

Опять сделаем предположение, что

$$\lambda(\bar{p}(t)-u(t),t)=$$
$$=(\bar{p}(t)-u(t))\cdot(b_1t+b_2)\geq 0, \quad t\in[0,T], \qquad (67)$$

где

$b_1\geq 0$ и $b_2\geq 0$ - некоторые константы.

Тогда (65) с учетом (42)-(43) преобразуется следующим образом:

$$H(t,\psi,y,u)=\sum_{i=1}^{N}\psi_{1,i}\left(u-\bar{p}(T)\right)*(\bar{p}(t)-u)*$$
$$*(b_1t+b_2)\frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}}+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\psi_{2,i}\cdot\left(u-\bar{p}(T)\right)^2(\bar{p}(t)-u)*$$
$$*(b_1t+b_2)\frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}}+$$
$$+\psi_{N+1}\cdot(\bar{p}(t)-u)\cdot(b_1t+b_2)=$$
$$=\left(u-\bar{p}(T)\right)(\bar{p}(t)-u)*(b_1t+b_2)e^{-y_{N+1}}*$$
$$*\sum_{i=1}^{N}\psi_{1,i}\cdot\frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!}+\left(u-\bar{p}(T)\right)^2*(\bar{p}(t)-u)*$$
$$*(b_1t+b_2)e^{-y_{N+1}}\sum_{i=1}^{N}\psi_{2,i}\frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!}+$$
$$+\psi_{N+1}\cdot(\bar{p}(t)-u)\cdot(b_1t+b_2)=$$
$$=\left(u-\bar{p}(T)\right)(\bar{p}(t)-u)k_2+$$
$$+\left(u-\bar{p}(T)\right)^2(\bar{p}(t)-u)k_3+(\bar{p}(t)-u)k_1 \qquad (68)$$

где

$$k_1=k_1(t,\psi_{N+1})=\psi_{N+1}\cdot(b_1t+b_2). \qquad (69)$$

$$k_2=k_2(t,\psi_{1,1},\ldots,\psi_{1,N},y_{N+1})=$$
$$=(b_1t+b_2)e^{-y_{N+1}}\sum_{i=1}^{N}\psi_{1,i}\cdot\frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!}, \qquad (70)$$

$$k_3=k_3(t,\psi_{2,1},\ldots,\psi_{2,N},y_{N+1})=$$
$$=(b_1t+b_2)e^{-y_{N+1}}\sum_{i=1}^{N}\psi_{2,i}\cdot\frac{y_{N+1}^{i-1}}{(i-1)!}. \qquad (71)$$

Таким образом, функция $H(t,\psi,y,u)$ представляет собой многочлен третьей степени по u. Найдем его стационарные точки.

$$\left.\frac{\partial H(t,\psi,y,u)}{\partial u}\right|_{u=u_s}=\{-2u_s+\bar{p}(t)+\bar{p}(T)\}k_2+$$
$$+\{-3u_s^2+4u_s\bar{p}(T)+2u_s\bar{p}(t)-$$
$$-\bar{p}(T)^2-2\bar{p}(T)\bar{p}(t)\}k_3-k_1=$$
$$=-3k_3u_s^2+2\{-k_2+[2\bar{p}(T)+\bar{p}(t)]k_3\}u_s+$$
$$+[\bar{p}(t)+\bar{p}(T)]k_2-\bar{p}(T)[\bar{p}(T)+2\bar{p}(t)]k_3-k_1=0, \qquad (72)$$

откуда

$$u_s=\frac{k_2-(2\bar{p}(T)+\bar{p}(t))k_3}{-3k_3}\pm$$
$$\pm\frac{\sqrt{\begin{array}{l}\{k_2-[2\bar{p}(T)+\bar{p}(t)]k_3\}^2+\\+3k_3\{[\bar{p}(t)+\bar{p}(T)]k_2-\\-\bar{p}(T)[\bar{p}(T)+2\bar{p}(t)]k_3-k_1\}\end{array}}}{-3k_3}, \qquad (73)$$

$$\begin{array}{l}\{k_2-[2\bar{p}(T)+\bar{p}(t)]k_3\}^2+3k_3\{[\bar{p}(t)+\\+\bar{p}(T)]k_2-\bar{p}(T)[\bar{p}(T)+2\bar{p}(t)]k_3-k_1\}>0.\end{array} \qquad (74)$$

Для того, чтобы функция $H(t,\psi,y,u)$ достигала в точке u_s безусловного максимума по управлению, достаточно выполнения в этой точке условия

$$\left.\frac{\partial^2 H(t,\psi,y,u)}{\partial u^2}\right|_{u=u_s}=-6k_3u_s+$$
$$+2(-k_2+(2\bar{p}(T)+\bar{p}(t))k_3)<0. \qquad (75)$$

Подставив выражение (73) в (74) получим, что из двух стационарных точек u_s точкой безусловного максимума функции $H(t,\psi,y,u)$ по управлению является та, что содержит знак "–" перед квадратным корнем:

$$u_s=\frac{k_2-(2\bar{p}(T)+\bar{p}(t))k_3}{-3k_3}-$$
$$-\frac{\sqrt{\begin{array}{l}(k_2-(2\bar{p}(T)+\bar{p}(t))k_3)^2+\\+3k_3((\bar{p}(t)+\bar{p}(T))k_2-\\-\bar{p}(T)(\bar{p}(T)+2\bar{p}(t))k_3-k_1)\end{array}}}{-3k_3}, \qquad (76)$$

Итак, подозрительное на оптимальность управление обладает следующей структурой:

$$u^*(t)=\begin{cases}0 & при \quad u_s(t)<0,\\ u_s(t) & при \quad 0\leq u_s(t)\leq\bar{p}(t),\\ \bar{p}(t) & при \quad u_s(t)>\bar{p}(t).\end{cases} \qquad (77)$$

На оптимальном решении задачи (57)-(63) должно выполняться условие трансверсальности

$$\delta m(y(T))-\sum_{i=1}^{N}(\psi_{1,i}\cdot\delta y_{1,i}(T)+\psi_{2,i}\cdot\delta y_{2,i}(T))-$$
$$-\psi_{N+1}(T)\cdot\delta y_{N+1}(T)=0 \qquad (78)$$

для всех $\delta y_{1,i}(T)$, $\delta y_{2,i}(T)$, $\delta y_{N+1}(T)$, удовлетворяющих следующему условию:

$$\delta D(y(T))=0. \qquad (79)$$

Вариация $\delta m(y(T))$ определяется выражением (32) (поскольку функционал (57) не зависит от фазовых переменных $y_{2,i}$), а вариация $\delta D(y(T))$ вычисляется так:

$$\delta D(y(T))=\sum_{i=1}^{N}\{\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{1,i}}\delta y_{1,i}(T)+$$
$$+\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{2,i}}\delta y_{2,i}(T)\}+\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{N+1}}\delta y_{N+1}(T). \qquad (80)$$

Пользуясь соотношением (63), получим

$$\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{1,i}}=-2y_{1,i}(T)+2e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}*$$
$$*\left\{y_{1,i}(T)+(N-k)\overline{p}(T)+\sum_{j=k+1}^{N}y_{1,j}(T)\right\}-$$
$$-2e^{-2y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\{(N-k)\overline{p}(T)+$$
$$+\sum_{j=k+1}^{N}y_{1,j}(T)\}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!},\qquad(81)$$

$$\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{2,i}}=1-e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!},\quad i=\overline{1,N},\qquad(82)$$

$$\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{N+1}}=e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\{y_{2,k+1}(T)-$$
$$-y_{1,k+1}(T)^2-\left(\overline{p}(T)+y_{1,k+1}(T)\right)*$$
$$*\left((2N-2k-1)\overline{p}(T)+y_{1,k+1}(T)+2\sum_{i=k+2}^{N}y_{1,i}(T)\right)\Bigg\}-$$
$$-2e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left((N-k)\overline{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right)*$$
$$*\,e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left(\overline{p}(T)+y_{1,k+1}(T)\right).\qquad(83)$$

Условие трансверсальности (78) можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{1,i}}-\psi_{1,i}\right)\delta y_{1,i}(T)-\sum_{i=1}^{N}\psi_{2,i}\cdot\delta y_{2,i}(T)+$$
$$-\left(\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{N+1}}-\psi_{N+1}(T)\right)\delta y_{N+1}(T)=0.\qquad(84)$$

Выразим из (79) вариацию $\delta y_{N+1}(T)$:

$$\delta y_{N+1}(T)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{1,i}}\delta y_{1,i}(T)+\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{2,i}}\delta y_{2,i}(T)\right)}{\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{N+1}}},\qquad(85)$$

и подставим это выражение в (84). Считая вариации $\delta y_{1,i}(T)$, $\delta y_{2,i}(T)$ произвольными, получим

$$\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{1,i}}-\psi_{1,i}-\frac{\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{1,i}}}{\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{N+1}}}*$$
$$*\left(\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{N+1}}-\psi_{N+1}(T)\right)=0;\qquad(86)$$

$$-\psi_{2,i}-\frac{\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{2,i}}}{\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{N+1}}}\left(\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{N+1}}-\psi_{N+1}(T)\right)=0.\qquad(87)$$

Теперь выпишем дифференциальное уравнение для сопряженной переменной $\psi_{N+1}(t)$:

$$\frac{d\psi_{N+1}(t)}{dt}=-\frac{\partial H(t,\psi(t),y(t),u^*(t))}{\partial y_{N+1}(t)}=$$
$$=\left(u^*(t)-\overline{p}(T)\right)\left(\overline{p}(t)-u^*(t)\right)\cdot(b_1t+b_2)e^{-y_{N+1}(t)}*$$
$$*\left(\sum_{i=1}^{N-1}\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}\cdot(\psi_{1,i}-\psi_{1,i+1})+\frac{y_{N+1}(t)^{N-1}}{(N-1)!}\cdot\psi_{1,N}\right)+$$
$$+\left(u^*(t)-\overline{p}(T)\right)^2\left(\overline{p}(t)-u^*(t)\right)\cdot(b_1t+b_2)e^{-y_{N+1}(t)}*$$
$$*\left(\sum_{i=1}^{N-1}\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}\cdot(\psi_{2,i}-\psi_{2,i+1})+\frac{y_{N+1}(t)^{N-1}}{(N-1)!}\cdot\psi_{2,N}\right).\qquad(88)$$

Итак, двухточечная краевая задача принципа максимума для задачи застройщика, склонного к риску, запишется в следующем виде:

$$\frac{dy_{1,i}(t)}{dt}=\left(u^*(t)-\overline{p}(T)\right)*\left(\overline{p}(t)-u^*(t)\right)*$$
$$*(b_1t+b_2)\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(t)},\qquad(58)$$

$$\frac{dy_{2,i}(t)}{dt}=\left(u^*(t)-\overline{p}(T)\right)^2*\left(\overline{p}(t)-u^*(t)\right)*$$
$$*(b_1t+b_2)\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(t)};\qquad(59)$$

$$\frac{dy_{N+1}(t)}{dt}=\left(\overline{p}(t)-u^*(t)\right)\cdot(b_1t+b_2);\qquad(60)$$

$$\psi_{1,i}(t)=\psi_{1,i}=const,\quad \psi_{2,i}(t)=\psi_{2,i}=const,\qquad(66)$$

$$\frac{d\psi_{N+1}(t)}{dt}=\left(u^*(t)-\overline{p}(T)\right)*\left[\overline{p}(t)-u^*(t)\right]*$$
$$*(b_1t+b_2)e^{-y_{N+1}(t)}*$$
$$*\left(\sum_{i=1}^{N-1}\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}\cdot(\psi_{1,i}-\psi_{1,i+1})+\frac{y_{N+1}(t)^{N-1}}{(N-1)!}\cdot\psi_{1,N}\right)+$$
$$+\left(u^*(t)-\overline{p}(T)\right)^2\left(\overline{p}(t)-u^*(t)\right)\cdot(b_1t+b_2)e^{-y_{N+1}(t)}*$$
$$*\left(\sum_{i=1}^{N-1}\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}(\psi_{2,i}-\psi_{2,i+1})+\frac{y_{N+1}(t)^{N-1}}{(N-1)!}\psi_{2,N}\right),\qquad(88)$$

$$y_{1,i}(0)=0,\quad y_{2,i}(0)=0,\quad y_{N+1}(0)=0,\qquad(61)$$

$$\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{1,i}}-\psi_{1,i}-\frac{\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{1,i}}}{\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{N+1}}}*$$
$$*\left(\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{N+1}}-\psi_{N+1}(T)\right)=0,\qquad(86)$$

$$-\psi_{2,i}-\frac{\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{2,i}}}{\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{N+1}}}*$$
$$*\left(\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{N+1}}-\psi_{N+1}(T)\right)=0,\quad i=\overline{1,N},\qquad(87)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(y_{2,i}(T)-y_{1,i}(T)^2\right)-e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\cdot$$
$$\cdot\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=k+1}^{N}\left(y_{2,i}(T)-y_{1,i}(T)^2\right)-\\-\left((N-k)\overline{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right)^2\end{array}\right\}-$$

$$-\left(e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left(\begin{matrix}(N-k)\bar{p}(T)+\\+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\end{matrix}\right)\right)^2=\sigma_S^2, \quad (63)$$

где оптимальное управление $u^*(t)$ определяется выражением (77).

Далее следует проводить численное решение этой двухточечной краевой задачи, которое и будет являться искомым решением задачи (57)-(63) (см. п.6).

5. ЗАДАЧА ДЛЯ ЗАСТРОЙЩИКА, НЕ СКЛОННОГО К РИСКУ

Наконец, займемся задачей (4). Она формулируется так:

Минимизировать функционал

$$D(y(T))=\sum_{i=1}^{N}\left(y_{2,i}(T)-y_{1,i}(T)^2\right)-$$
$$-e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}*\{\sum_{i=k+1}^{N}\left(y_{2,i}(T)-y_{1,i}(T)^2\right)-$$
$$-\left((N-k)\bar{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right)^2\}-$$
$$-\left(e^{-y_{N+1}(T)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}\left((N-k)\bar{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right)\right)^2\to$$
$$\to\min_{u(\cdot)} \quad (89)$$

при условиях (58)-(62) и

$$m(y(T))=-C+I+N\bar{p}(T)+\sum_{i=1}^{N}y_{1,i}(T)-$$
$$-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}e^{-y_{N+1}(T)}\left((N-k)\bar{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right)=$$
$$=I+\nu C. \quad (90)$$

Данная задача обладает такой же функцией Гамильтона-Понтрягина, что и задача (57)-(63), и, следовательно, имеет одинаковую с ней структуру оптимального управления и систему канонических уравнений. Иным будет лишь условие трансверсальности и, как следствие, иные $2N+1$ краевых условий.

Выпишем условие трансверсальности

$$\delta D[y(T)]+\sum_{i=1}^{N}[\psi_{1,i}\delta y_{1,i}(T)+\psi_{2,i}\delta y_{2,i}(T)]-$$
$$-\psi_{N+1}(T)\cdot\delta y_{N+1}(T)=0. \quad (91)$$

Оно должно выполняться для всех $\delta y_{1,i}(T)$, $\delta y_{2,i}(T)$, $\delta y_{N+1}(T)$, удовлетворяющих следующему условию:

$$\delta m(y(T))=0. \quad (92)$$

Здесь $\delta m(y(T))$ определяется выражением (32), а $\delta D(y(T))$ - выражением (80).

Условие (91) можно записать так:

$$\sum_{I=1}^{n}\{[\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{1,i}}+\psi_{1,i}]\delta y_{1,i}(T)+$$
$$+[\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{2,i}}+\psi_{2,i}]\delta y_{2,i}(T)\}+$$
$$+\left(\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{N+1}}+\psi_{N+1}(T)\right)\delta y_{N+1}(T)=0. \quad (93)$$

Выразим из (92) вариацию $\delta y_{N+1}(T)$:

$$\delta y_{N+1}(T)=-\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{1,i}}\delta y_{1,i}(T)}{\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{N+1}}} \quad (94)$$

и подставим ее в (93):

$$\sum_{I=1}^{n}\{[\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{1,i}}+\psi_{1,i}]\delta y_{1,i}(T)+$$
$$+[\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{2,i}}+\psi_{2,i}]\delta y_{2,i}(T)\}- \quad (95)$$
$$-\left(\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{N+1}}+\psi_{N+1}(T)\right)\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{1,i}}\delta y_{1,i}(T)}{\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{N+1}}}=0.$$

Считая вариации $\delta y_{1,i}(T)$, $\delta y_{2,i}(T)$ произвольными, получим:

$$\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{1,i}}+\psi_{1,i}-$$
$$-\left(\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{N+1}}+\psi_{N+1}(T)\right)\frac{\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{1,i}}}{\frac{\partial m(y(T))}{\partial y_{N+1}}}=0; \quad (96)$$

$$\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{2,i}}+\psi_{2,i}=0. \quad (97)$$

Окончательный вид краевой задачи принципа максимума:

$$\frac{dy_{1,i}(t)}{dt}=\left(u(t)-\bar{p}(T)\right)*$$
$$*[\bar{p}(t)-u^*(t)]\cdot(b_1t+b_2)\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(t)}; \quad (58)$$

$$\frac{dy_{2,i}(t)}{dt}=\left(u(t)-\bar{p}(T)\right)^2*$$
$$*[\bar{p}(t)-u^*(t)]\cdot(b_1t+b_2)\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(t)}; \quad (59)$$

$$\frac{dy_{N+1}(t)}{dt}=[\bar{p}(t)-u^*(t)]*(b_1t+b_2); \quad (60)$$

$$\psi_{1,i}(t)=\psi_{1,i}=const, \quad \psi_{2,i}(t)=\psi_{2,i}=const, \quad (66)$$

$$\frac{d\psi_{N+1}(t)}{dt}=\left(u^*(t)-\bar{p}(T)\right)*$$
$$*[\bar{p}(t)-u^*(t)]\cdot(b_1t+b_2)e^{-y_{N+1}(t)}*$$
$$*\left(\sum_{i=1}^{N-1}\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}(\psi_{1,i}-\psi_{1,i+1})+\frac{y_{N+1}(t)^{N-1}}{(N-1)!}\psi_{1,N}\right)+$$
$$+\left(u^*(t)-\bar{p}(T)\right)^2*(\bar{p}(t)-u^*(t))*(b_1t+b_2)e^{-y_{N+1}(t)}*$$
$$*\left(\sum_{i=1}^{N-1}\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}(\psi_{2,i}-\psi_{2,i+1})+\frac{y_{N+1}(t)^{N-1}}{(N-1)!}\psi_{2,N}\right). \quad (88)$$

$$y_{1,i}(0)=0, \quad y_{2,i}(0)=0, \quad y_{N+1}(0)=0, \quad (61)$$

$$\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{1,i}}+\psi_{1,i}-\left(\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{N+1}}+\psi_{N+1}(T)\right)\frac{\dfrac{\partial m(y(T))}{\partial y_{1,i}}}{\dfrac{\partial m(y(T))}{\partial y_{N+1}}}=0, \qquad (96)$$

$$\frac{\partial D(y(T))}{\partial y_{2,i}}+\psi_{2,i}=0,\quad i=\overline{1,N}, \qquad (97)$$

$$(1+\nu)C=N\overline{p}(T)+\sum_{i=1}^{N}y_{1,i}(T)-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{y_{N+1}(T)^k}{k!}e^{-y_{N+1}(T)}*\left((N-k)\overline{p}(T)+\sum_{i=k+1}^{N}y_{1,i}(T)\right), \qquad (90)$$

где оптимальное управление $u^*(t)$ определяется выражением (77). Опять-таки, эта двухточечная краевая задача интегрируется только численно.

6. О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ТРЕХ ЗАДАЧ

Как уже было отмечено ранее, принцип максимума Понтрягина дает лишь необходимое условие оптимальности и приводит к специального вида краевой задаче. Если из каких-либо соображений заранее известно о существовании решения исходной задачи оптимального управления и соответствующая краевая задача принципа максимума выделяет единственное решение, то оно и будет оптимальным.

Известно [7, с.298], что в применении к нашим задачам оптимального управления (задачи (24)-(28), (57)-(63) и (89),(58)-(62),(90)) для существования т.н. слабого оптимального управления (иначе говоря, принадлежащего к классу скользящих режимов) достаточно выполнения условия равномерной ограниченности семейства траекторий $y(t,u)$ для всех управлений u, удовлетворяющих условию $0\le u(t)\le\overline{p}(t),\ t\in[0,T]$. Напомним, что динамическая система вышеупомянутых задач выглядит так:

$$\frac{dy_{1,i}(t)}{dt}=[u(t)-\overline{p}(T)]*[\overline{p}(t)-u(t)]*(b_1t+b_2)\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(t)}; \qquad (58)$$

$$\frac{dy_{2,i}(t)}{dt}=\left(u(t)-\overline{p}(T)\right)^2*(\overline{p}(t)-u(t))*(b_1t+b_2)\frac{y_{N+1}(t)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(t)}; \qquad (59)$$

$$\frac{dy_{N+1}(t)}{dt}=(\overline{p}(t)-u(t))\cdot(b_1t+b_2); \qquad (60)$$

$$y_{1,i}(0)=0,\quad y_{2,i}(0)=0,\quad y_{N+1}(0)=0,\quad i=\overline{1,N}. \qquad (61)$$

Покажем покомпонентную равномерную ограниченность фазового вектора $y(t)$.

$$|y_{N+1}(t)|=\int_0^t[\overline{p}(s)-u(s)]\cdot(b_1s+b_2)ds\le$$
$$\le\int_0^T(\overline{p}(s)-u(s))\cdot(b_1s+b_2)ds\le$$
$$\le T\cdot\max_{0\le s\le T}(\overline{p}(s)-u(s))\cdot(b_1s+b_2)\le$$
$$\le T(b_1T+b_2)\max_{0\le s\le T}\overline{p}(s)=C_0=const;$$

$$|y_{1,i}(t)|=\left|\int\left(u(s)-\overline{p}(T)\right)*[\overline{p}(s)-u(s)]*(b_1s+b_2)\frac{y_{N+1}(s)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(s)}ds\right|\le$$
$$\le\int_0^T\left|u(s)-\overline{p}(T)\right|(\overline{p}(s)-u(s))*(b_1s+b_2)\frac{y_{N+1}(s)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(s)}ds\le$$
$$\le T(b_1T+b_2)\max_{0\le s\le T}\left|u(s)-\overline{p}(T)\right|(\overline{p}(s)-u(s))\cdot 1\le$$
$$\le T(b_1T+b_2)\overline{p}(T)\max_{0\le s\le T}\overline{p}(s)=C_1=const;$$

$$|y_{2,i}(t)|=\left|\int_0^T\left(u(s)-\overline{p}(T)\right)^2[\overline{p}(s)-u(s)]*(b_1s+b_2)\frac{y_{N+1}(s)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-y_{N+1}(s)}ds\right|\le$$
$$\le T(b_1T+b_2)\max_{0\le s\le T}\left(u(s)-\overline{p}(T)\right)^2(\overline{p}(s)-u(s))\le$$
$$\le T(b_1T+b_2)\overline{p}(T)^2\max_{0\le s\le T}\overline{p}(s)=C_2=const,$$
$$i=\overline{1,N}.$$

Таким образом, слабое оптимальное управление во всех трех рассматриваемых задачах существует. К слову заметим, что для существования оптимального кусочно-непрерывного управления достаточно выполнения указанного выше условия равномерной ограниченности семейства траекторий и дополнительного условия выпуклости множества векторов правых частей динамической системы для любых фиксированных t и $y(t)$ [7].

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Высшая школа, 1999
2. Хачатрян С.Р., Фаерман Е.Ю., Федорова Н.Л., Кириллова А.Н. Современные аспекты анализа и модельного обоснования региональной жилищной политики на базе ипотеки (на примере г. Москвы) // Аудит и финансовый анализ. 2000. №4.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский Б.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1983.
4. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах. - М.: Изд-во МАИ, 1997.
5. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. - М.: Изд-во МГУ, 1974.
6. Болдырев В.И. Численное решение задачи оптимального управления // Теория и системы управления. 2000. №3.
7. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. - М.: Наука, 1972.

Бекларян Левон Андреевич