МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ И УПРАВЛЕНИЯ ФИНАНСОВЫМИ РИСКАМИ ХОЗЯЙСТВУЮЩИХ СУБЪЕКТОВ

Васильев В.А., к.э.н., управляющий Ижевским филиалом ОАО «Газпромбанк»;
Летчиков А.В., д.ф.-м.н., заведующий кафедрой «Математические методы экономики», Удмуртский государственный университет, г. Ижевск;
Лялин В.Е., д.т.н., заведующий кафедрой «Интеллектуальные информационные технологии в экономике»

Ижевский государственный технический университет

В работе предложены математические модели оценки финансовых рисков и процессов их управления, позволяющих принимать оптимальные решения по снижению рисков финансовой деятельности хозяйствующих субъектов. Для этого проведен анализ финансовых рисков с учетом вида экономического субъекта, подверженного риску, специфики его деятельности на финансовом рынке; классифицированы основные методы управления финансовыми рисками, и определены соответствующие им финансовые инструменты; исследованы динамические свойства финансовых потоков, возникающих при моделировании искусственных финансовых инструментов; исследовано влияние ошибки в оценках параметров математической модели на результаты управления финансовыми рисками.

ВВЕДЕНИЕ

Резкое повышение научного интереса к математическому моделированию в теории финансов в последние три десятилетия основано на революционных преобразованиях финансового рынка – изменении его структуры, возрастании изменчивости (волатильности) в ценах, появлении весьма изощренных финансовых инструментов, использовании новых информационных технологий для анализа цен и многом другом. Все это предъявило к финансовой теории новые требования и поставило новые проблемы, для решения которых необходимо проведение глубоких научных исследований в области математического моделирования финансовых систем. Будучи большой и сложной системой с огромным количеством переменных, различных факторов и связей, финансовые рынки требуют для своего анализа достаточно сложных, далеко продвинутых математических методов, методов статистической обработки данных, численных методов и компьютерных средств.

Любой хозяйствующий субъект современной рыночной экономики сталкивается с финансовыми рисками как возможными негативными воздействиями на финансовую эффективность его деятельности. В силу этого главным выводом общей теории финансов является утверждение, что финансовый риск вездесущ, и ему подвержены лица, фирмы и правительства почти в любой сфере их деятельности. Поэтому в последние годы наблюдается повышение научного и практического интереса к теории управления финансовым риском как со стороны финансовых менеджеров, так и со стороны ученых-теоретиков. В связи с этим являются крайне актуальными научные исследования в области математического моделирования оценки финансовых рисков и процессов управления ими, основанные на методах стохастической финансовой математики.

В современных условиях рыночной экономики деятельность коммерческих банков, инвестиционных и страховых компаний, паевых инвестиционных фондов регламентирована различными инструкциями и контролируется различными государственными органами. Одно из наиболее важных требований системы контроля над деятельностью финансовых учреждений состоит в том, чтобы размеры их собственного капитала соответствовали присущим им финансовым рискам. Хотя финансовые компании, подобно другим корпорациям, используют свой капитал для поддержания своей инфраструктуры и ведения операций, собственный капитал им необходим также и для компенсации постоянно возникающих финансовых рисков. В связи с этим перед финансовыми менеджерами всякий раз возникает задача определения размера оптимального резерва, необходимого для покрытия возможных будущих затрат. Поэтому для финансовых компаний является насущным решение задачи оценки финансовых рисков и их оптимального управления.

Современные финансовые рынки основаны на глобальном и мгновенном распространении информации о ценах и котировках, на способности торговых партнеров устанавливать связь друг с другом в доли секунды, на использовании дилерами мощных персональных компьютеров и сложного программного обеспечения. В условиях быстро изменяющейся конъюнктуры финансового рынка менеджеру финансовой компании необходима информационная система, поддерживающая автоматический контроль и оперативное управление инвестиционным портфелем с учетом финансового риска.

Теоретическим и практическим вопросам математического моделирования в области управления финансами посвящены работы зарубежных ученых Г. Марковица, В. Шарпа, С. Росса, П. Самуэльсона, Ф. Блэка, М. Шоулса, Р. Мертона и др., а также российских исследователей А.Н. Ширяева, А.В. Мельникова, Б.А. Лагоши, В.И. Малыхина, Ю.П. Лукашина, В.И. Ротаря, В.Е. Бенинга и др. Вклад всех этих ученых в создание и развитие финансовой математики, несомненно, огромен. Однако, следует признать, что стремительное развитие финансового рынка и появление изощренных финансовых инструментов ставят перед современной финансовой математикой новые задачи, требующие оригинальных решений и их быстрого применения на практике. Все вышеизложенное определило актуальность выбранной темы исследования.

Изложение материала, представленного в первой части настоящей статьи, основано на книге З. Боди и Р. Мертона [8].

1. Основные понятия управления финансовыми рисками

1.1. ПОНЯТИЕ ФИНАНСОВОГО РИСКА

Что такое финансовый риск? В Словаре русского языка С.И. Ожегова термин «риск» определяется как «возможная опасность» и «действие наудачу в надежде на счастливый исход». Каждый человек интуитивно чувствует, что такое риск, связывая его с неожиданными или нежелательными исходами каких-то действий в будущем. Надо признать, что любая сфера человеческой деятельности, в особенности экономическая или финансовая, требует принятия решений в условиях будущей неопределенности. Это обусловлено разнообразными причинами, например, нестабильностью макроэкономического развития, неоднозначностью политической системы, непредсказуемостью действий партнеров по бизнесу, наличием большого числа факторов, учесть которые не представляется возможным. Поэтому финансовый риск как термин напрямую связан с понятием случайности или стохастичности.

Хотя риск и случайность имеют много общего, для любого финансового менеджера следует различать эти два понятия. О случайности (неопределенности) говорят тогда, когда невозможно предсказать наверняка, что случится в будущем. Риск — это не просто неопределенность, а такая, которую приходится принимать во внимание при совершении тех или иных действий, поскольку она может негативно повлиять на материальное благополучие людей. Таким образом, случайность есть необходимое, но не достаточное условие риска. Другими словами, под *финансовым риском* следует понимать возможность (угрозу) потери лицом или организацией в результате осуществления определенной финансовой деятельности части своих ресурсов или планируемых доходов (прибыли) в будущем.

Во многих ситуациях, связанных со случайностью, вероятный исход событий можно просто и прямо определить как убыточный или доходный. Рассмотрим, например, инвестирование капитала путем приобретения портфеля ценных бумаг. Если стоимость портфеля ценных бумаг в результате его управления снижается – это убытки; если повышается – это доход. Согласно приведенному определению под финансовым риском понимается угроза понести убытки, а не возможность получить доход в результате принятия каких-то финансовых решений.

Следует заметить, что существуют ситуации, в которых невозможно четко определить результаты финансовой деятельности как величину доходов или убытков. Например, фирма приобрела годовую страховку некоторого имущества от повреждения или утраты. Если в течение года произойдет несчастный случай (пожар, наводнение и т.п.), то страховая компания возместит убытки фирме от несчастного случая. Если же несчастный случай не произойдет, то имущество фирмы останется в сохранности. И в том, и в другом случае фирма потеряет внесенный страховой взнос, то есть понесет убытки (пусть – малые). Фирма может снизить такого рода убытки, например, приобретая страховку с франшизой или вообще ее не приобретая. Тогда, однако, в случае повреждения имущества фирме придется оплатить дополнительные расходы по возмещению убытков от несчастного случая. Таким образом, в некоторых ситуациях сами финансовые риски являются итогом финансового управления предприятия.

Другим характерным примером является фермер, который выращивает пшеницу. Результаты его бизнеса во многом зависят от погодных условий, предсказать которые заблаговременно практически невозможно. В случае неблагоприятных погодных условий фермер понесет убытки от неурожая, в случае же хорошего урожая рыночные цены на зерно упадут, что также принесет фермеру определенные убытки. Неопределенность в отношении будущего урожая приводит к риску отклонения урожая пшеницы от нормального. Это показывает, что в некоторых ситуациях любое отклонение от желаемого может привести к упущенной прибыли.

В любой ситуации, когда человек принимает решение, связанное с финансовым риском, очень важным фактором принятия конкретного решения является готовность человека заплатить за уменьшение риска, которому он подвергается. Не желающие рисковать люди, оценивая компромисс между затратами на уменьшение риска и выгодами от этого, предпочитают менее рискованный вариант при тех же затратах. Например, если в целом инвестор готов согласиться с более низкой ставкой доходности, принимая то или иное инвестиционное решение, потому что в этом случае ему предлагается более предсказуемая ставка доходности, то, значит, он склонен к тому, чтобы избегать риска. При выборе вариантов инвестирования с одинаковой ожидаемой ставкой доходности инвесторы, которым свойственно избегать риска, выбирают вариант с более низкой степенью риска. Таким образом, для каждого человека свойственно неприятие риска, характеризующее его предпочтение избегать финансовых рисков.

Всякий раз, когда у финансового менеджера имеется несколько вариантов действий, каждый из которых, с одной стороны, уменьшает некоторые финансовые риски, а с другой стороны, связан с определенными издержками, он имеет дело с компромиссом между выгодой от устранения риска и затратами, которые придется понести для снижения этого риска. Процесс выработки компромисса, направленного на достижение баланса между выгодами от уменьшения риска и необходимыми для этого затратами, а также принятие решения о том, какие действия для этого следует предпринять (включая отказ от каких бы то ни было действий), называется *управлением финансовым риском (risk management)*.

Следует особо отметить, что риск как производная от категории случайности имеет очевидную связь с категорией времени. Для любого случайного эксперимента его неопределенность присутствует только в его начале, в конце же, когда результаты эксперимента уже известны, неопределенность исчезает. Аналогично и с финансовыми рисками. Они присутствуют перед принятием конкретных финансовых решений и исчезают по истечении некоторого времени. Так, если инвестор имеет в активе портфель ценных бумаг, то он подвержен финансовому риску снижения стоимости портфеля, например, в течение последующего года. Однако, по истечении года неопределенность (а вместе с ней и риск), связанная с падением стоимости портфеля в течение данного года, исчезает. Действительно, инвестору известно понес он убытки или нет.

В связи с этим порой инвесторы выражают сожаление по поводу того, что решились на дорогостоящие меры для уменьшения риска. Сожаление высказывается, естественно, после того, как плохие прогнозы, которых они боялись, не подтвердились. Если инвестор продал рискованные акции как раз перед тем, как они втрое возросли в цене, то, несомненно, пожалел о своем решении. Однако, следует помнить, что все решения, принятые с учетом неопределенности, принимаются до того, как эта неопределенность исчезнет. Надо учитывать, что решение инвестора было лучшим из всех тех, которые можно было принять на основании информации, имеющейся у вас на момент принятия решения. Все мы «крепки задним умом», и никто не может дать абсолютно точный прогноз.

К тому же на практике трудно определить, где заканчивается умение предвидеть и начинается простое везение. По определению, решения по управлению риском принимаются в условиях неопределенности, следовательно, существует несколько вариантов развития событий. В конечном итоге реализуется только один вариант. Ни обвинения (или поздравления) по поводу принятия ошибочного (или верного) решения не имеют никакого смысла, потому что они выражаются уже после получения информации, которой не было на момент принятия решения. Адекватность решения по управлению риском должна рассматриваться в свете информации, доступной в то время, когда это решение было принято.

Например, если, выходя из дому на работу, вы берете с собой зонтик, предполагая, что может пойти дождь, а он не идет, то вы не должны упрекать себя за неправильно принятое решение. Другой вариант: предположим, что все метеосводки сообщают о высокой вероятности дождя, а вы не берете с собой зонтик. Если дождь не пойдет, не спешите хвалить себя за мудрость и предусмотрительность. Вам просто повезло.

Немаловажной составляющей анализа и управления финансовыми рисками является определение подверженности риску участников финансовой системы. Любой человек сталкивается со специфическим типом риска в связи с особенностями его работы, характером его бизнеса или определенным образом жизни. Тогда о нем можно сказать, что он имеет специфическую подверженность риску. Например, если человека взяли на работу временно, то подверженность риску увольнения у вас весьма высока. Если же он является штатным преподавателем одного из крупнейших университетов, его подверженность риску увольнения сравнительно низка. Очевидно, что любое фермерское хозяйство подвержено как риску неурожая зерновых, так и риску падения цен на них при большом урожае. Если бизнес фирмы тесно связан с импортом или экспортом товаров, она подвержена риску неблагоприятного изменения курсов обмена валют. Если у фирмы есть имущество, оно подвержено риску пожара, ограбления, повреждения в результате бури, землетрясения, а также риску того, что снизится его рыночная стоимость.

Таким образом, риск, с которым связано владение активами или проведение сделок, нельзя оценивать без учета других факторов, или абстрактно. При одних обстоятельствах покупка (или продажа) того или иного имущества увеличивает подверженность риску покупателя (или продавца), а значит, и его риск. При других обстоятельствах та же самая операция может снизить риск. Например, если человек покупает годовой полис страхования своей жизни, он уменьшает риск для своей семьи, потому что выплата страховки в какой-то мере компенсирует сокращение доходов семьи в случае его гипотетической смерти. Если люди, не связанные с ним родственными узами, сами застрахуют его жизнь, то риск для его семьи не уменьшится. Они как раз и делают ставку на то, что в течение года он умрет. Или предположим, фермер, у которого вот-вот созреет пшеница, заключает контракт на ее продажу по твердой цене в какой-то определенный срок в будущем. Такой контракт служит уменьшению риска. Но для того, у кого на складе нет пшеницы, заключение аналогичного контракта означает попытку спекуляции на том, что цены на пшеницу могут упасть, – ведь такой человек окажется в выигрыше только в том случае, если к моменту наступления срока поставки пшеницы ее рыночная цена окажется ниже цены, зафиксированной в контракте.

В теории финансов принято различать финансовые операции по изменению подверженности риску инвесторов, их проводящих. Если финансовая операция, проводимая участником финансового рынка в надежде получить прибыль, увеличивает его подверженность тому или иному виду риска, то ее принято называть *спекуляцией*, а инвестора, ее проводящего, – *спекулянтом*. В противоположность спекуляции операция, направленная на уменьшение подверженности риску, называется *хеджированием*, а инвестора, ее проводящего, *хеджером*. При этом следует отметить, что одна и та же операция в различных ситуациях может быть как спекуляцией, так и хеджированием. Аналогично одно и то же лицо может выступать как спекулянт в одном случае и как хеджер – в другом. В такую классификацию не попадают финансовые операции, позволяющие инвестору получать прибыль без всякого риска и не требующие от него каких-либо капиталовложений. Такого рода операция называется арбитражем, а участник финансового рынка, производящий арбитражные операции, – *арбитражером*.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ФИНАНСОВЫХ РИСКОВ

Существует несколько различных схем классификации видов финансового риска. В первую очередь влияние риска на финансовую деятельность существенно зависит от вида экономического субъекта, подверженного данному финансовому риску. Основными действующими лицами финансовой системы являются домохозяйства, фирмы и правительственные организации. Домохозяйства занимают особое место, поскольку согласно теории финансов конечная функция финансовой системы – способствовать формированию оптимальной структуры потребления и размещения ресурсов домохозяйств в различные активы. Экономические субъекты, такие как компании и правительство, существуют с той целью, чтобы облегчать реализацию этой конечной функции. Таким образом, финансовые риски, характерные для домохозяйств, отличаются от рисков, присущих для деятельности фирм и правительственных организаций.

Принято выделять пять основных видов рисков, с которыми сталкиваются домохозяйства:

Риск болезни, потери трудоспособности, смерти. Неожиданная болезнь или несчастный случай могут потребовать как больших расходов, связанных с необходимостью лечения и ухода за больным, так и привести к потери источников дохода вследствие нетрудоспособности.

Риск безработицы. Это риск потери работы одним из членов семьи.

Риск, связанный с владением потребительскими товарами длительного пользования. Это риск убытков, связанный с владением домом, автомобилем и другими товарами длительного пользования. Убытки могут быть вызваны несчастными случаями – вроде пожара или ограбления – или моральным износом, наступающим вследствие технологических изменений или переменой во вкусах потребителей.

Риск, связанный с ответственностью перед другими лицами (т.е. с гражданской ответственностью). Этот вид риска связан с возможностью того, что некто предъявит вам претензии финансового характера вследствие понесенного им ущерба, причиненного вашими действиями.

Риск, связанный с вложениями в финансовые активы. Этот риск возрастает, если домохозяйство владеет различными видами финансовых активов, таких как обычные акции или ценные бумаги с фиксированным доходом, деноминированными в одной или нескольких валютах. Источником этого вида риска является неопределенность развития ситуации, с которой сталкиваются компании, правительство и прочие экономические субъекты, выпустившие эти ценные бумаги.

Компания или фирма – это организация, чьей первой и основной функцией является продажа товаров и оказание услуг. Фактически любой вид деятельности компании связан с разными видами финансового риска. Риск выступает необходимой составной частью любого бизнеса. Виды предпринимательского риска компании порождаются действиями всех тех субъектов, кто так или иначе связан с ее деятельностью: акционерами, кредиторами, клиентами, поставщиками, персоналом и правительством. При этом компания может с помощью финансовой системы переносить риск, с которым она сталкивается, на других участников. Специальные финансовые компании, например страховые, выполняют услуги по объединению и переносу риска. В целом можно сказать, что все виды риска, с которыми имеет дело компания, порождаются людьми.

Очевидно, что специфика и многообразие видов предпринимательской деятельности компаний определяет специфику и разнообразие рисков, которыми подвержены компании. Например, предприятия, связанные с производством некоторых изделий, сталкиваются со следующими категориями риска:

Производственный риск (возможность невыполнения фирмой своих обязательств перед заказчиком). Это риск того, что техника выйдет из строя, что доставка исходных продуктов не будет выполнена в срок, что на рынке труда не окажется нужных работников или что из-за внедрения новых технологий имеющееся у компании оборудование морально устареет.

Риск, связанный с изменением цен на выпускаемую продукцию. Это риск того, что спрос на изделия, производимые данной компанией, неожиданно изменится, и рыночные цены снизятся. Может также обостриться конкуренция, вследствие чего данная компания будет вынуждена снизить цены.

Риск, связанный с изменением цен на факторы производства. Это риск того, что цены на какие-то факторы производства внезапно изменятся. Например, подорожает сырье или повысятся ставки заработной платы. Если компания для финансирования своей деятельности взяла кредит на условиях плавающей процентной ставки, то она подвергает себя риску ее повышения.

Риск ведения бизнеса ложится на плечи не только владельцев компании. Часть риска принимают на себя также менеджеры (если в этом качестве не выступают владельцы компании) и персонал компании. Если доходность компании невелика или если изменится технология производства, они рискуют потерять в зарплате, а возможно, и вовсе лишиться работы.

Размер и организационная структура компании сами по себе тоже могут подвергаться риску. Компании бывают самых разных размеров и типов. С одной стороны, это – небольшие частные предприятия, которыми владеют и управляют отдельные лица или семьи. С другой стороны, огромные корпорации, в которой трудятся тысячи людей, а акционеров еще больше. Одна из целей (и обычно не единственная) масштабных организаций типа крупных корпораций заключается в улучшении управления производственными, потребительскими и ценовыми рисками при ведении бизнеса.

Правительственные органы всех уровней играют важную роль в управлении риском. Правительство либо предотвращает различные виды риска, либо перераспределяет их. Люди обычно ждут от правительства защиты и финансовой помощи в случаях стихийных бедствий и различных несчастий, вызываемых самими же людьми, – войн, загрязнения окружающей среды и т.д. Аргументом в пользу более активного участия государства в экономическом развитии может послужить то, что государство может без труда распределить риск капиталовложений в инфраструктуру среди всех налогоплательщиков. Правительственные чиновники часто используют рынки и другие институты финансовой системы для реализации своей стратегии управления риском – практически так же, как это делают менеджеры компаний и неправительственных организаций.

Таким образом, главным выводом финансовой теории является утверждение, что финансовый риск вездесущ, и ему подвержены лица, фирмы и правительства почти в любой сфере их деятельности. Основываясь на предположении, что финансовый риск представляет собой негативное воздействие на финансовую эффективность любого хозяйствующего субъекта, подверженного риску, предложим классификацию главных финансовых рисков, с которыми сталкиваются практически все экономические субъекты.

Валютный риск. Он возникает под влиянием изменений курсов валют. Валютный риск часто можно подразделить на риск по сделкам, при котором колебания валют воздействуют на ход повседневных сделок, и риск пересчета, влияющий на ценность активов и обязательств в балансовой ведомости. Примером риска по сделке является покупка британским изготовителем у швейцарского поставщика запчастей с выставлением счета в швейцарских франках. Риск пересчета может повлиять на опубликованные счета промышленного конгломерата, зарегистрированного в Голландии и имеющего филиалы в США.

Риск процентной ставки. Он появляется вследствие колебаний процентных ставок, ему прямо подвержен любой хозяйствующий субъект, занимающий или вкладывающий капиталы. Чаще всего такой риск связан с уровнем процентных ставок, но некоторые субъекты зависят от вида кривой доходности.

Риск акционерного капитала. Ему подвергается всякий владелец портфеля с акциями, стоимость которого будет подниматься и падать вместе с ценами отдельных акций, в частности, и с уровнем биржевой активности – в целом. Кроме того, компании, акции которых открыто котируются, могут столкнуться с трудностями при привлечении средств или при получении заказов, если их акции сильно упадут в цене.

Товарный риск. Его вызывают любые изменения цен на товары. Например, производитель кофе в большой степени подвержен такому риску, поскольку стоимость обработанного кофе в значительной степени зависит от цены кофе-бобов. Срыв поставок на рынке кофе-бобов, связанный, возможно, с влиянием вредителей на урожай, поднимет цены и повлечет за собой резкое снижение спроса. Товарный риск может оказывать и более широкое воздействие, чем кажется на первый взгляд. К примеру, кофейни и кафе также пострадают от повышения цен на кофе-бобы в связи со снижением спроса.

Риск ликвидности. Это потенциальный риск, который появляется, когда экономический субъект неспособен выполнить платежи в надлежащий срок. Это может вынудить к займу под повышенный процент, или повлечь штрафы согласно условиям договора, или заставить продать часть активов ниже рыночной стоимости. Наиболее подверженными данному риску являются банки, так как успешность их операций во многом зависит от доверия, которое может быть разрушено неспособностью в срок расплатиться по обязательствам.

Риск партнерства. Любая сделка порождает риск партнерства для одной или обеих сторон. Он состоит в возможности потерь, когда одна из сторон не выполняет свои обязательства. Кредитный риск по ссуде – это другое название риска партнерства. Величина этого риска зависит от размера всех просроченных данным партнером позиций, размеров расчетов по сделкам на заданный срок и от того, вступили ли в силу соглашения по взаимной компенсации обязательств.

Операционный риск. Этот риск сопровождает повседневные операции и действия. Очевидный операционный риск связан с мошенничеством, и все организации должны принимать меры, чтобы предотвратить или минимизировать эту угрозу. Но операционный риск может иметь и иные источники. Потенциально растущую проблему представляет все больший упор на технику. Широкомасштабные операции по сделкам зависят от компьютеров и банк, лишившийся вдруг своей компьютерной системы, может оказаться в положении, похожем на широко разрекламированный случай с авиадиспетчерами, когда изображение на экранах радаров вдруг исчезло из-за краха их компьютерной системы. Правда, в случае банков хотя бы жизни людей не будут поставлены на карту.

Другие рыночные риски. Этот класс содержит множество специфичных рисков, характерных для различных финансовых рынков. Среди них, например, – риск волатильности, влияющий на торговцев опционами и присутствующий только на опционном рынке.

Модельный риск. Некоторые новейшие финансовые инструменты основываются на сложных математических моделях ценообразования и хеджирования. Если модель неверно сформулирована, использует сомнительные допущения или неточно описывает реальное поведение рынка, то компании, предлагающие такие инструменты, могут понести существенные убытки.

1.3. УПРАВЛЕНИЕ ФИНАНСОВЫМИ РИСКАМИ

Управление финансовыми рисками является одной из важнейших сторон деятельности любого финансового менеджера. Принимая решение об инвестировании в тот или иной инновационный проект, инвестор анализирует не только данные о возможной прибыли по данному проекту, но и оценивает риск его финансовых потерь. Кажущийся высокодоходным проект может быть настолько рискованным, что его осуществление может привести к значительному увеличению риска самого инвестора, что, в свою очередь, может негативно сказаться на его финансовом состоянии.

Под *управлением финансовыми рисками* мы понимаем систематическую работу по анализу риска, выработки и принятия соответствующих мер для его минимизации. Процесс управления риском можно разбить на пять этапов:

1) выявление риска;
2) оценка риска;
3) выбор приемов управления риском;
4) реализация выбранных приемов;
5) оценка результатов.

Выявление риска состоит в определении того, каким видам риска наиболее подвержен объект анализа, будь то домохозяйство, компания или иной экономический субъект. Домохозяйство или компания зачастую не отдают себе отчета во всех видах риска, с которыми они сталкиваются. Например, если человек ни одного рабочего дня не пропустил по болезни или из-за травмы, то он вряд ли задумается о риске потери трудоспособности. Может быть, он решит, что имеет смысл застраховаться на случай потери трудоспособности, а может быть, и думать об этом не станет.

С другой стороны, есть виды риска, от которых человек охотно страхуется, не будучи в действительности им подверженным. Например, многие одинокие люди, о которых некому заботиться, вносят страховые взносы в пенсионный фонд, чтобы потом, выйдя на пенсию, пользоваться накопившейся суммой. Если такой человек умрет до выхода на пенсию, застраховавший его фонд положит на свой счет кругленькую сумму. Следовательно, если у одинокого человека нет иждивенцев-наследников, ему не нужна такая защита.

Для эффективного выявления риска необходимо рассматривать проблему риска в целом, с учетом всех факторов, влияющих на него. Проанализируем, например, риск человека, связанный с его операциями на фондовом рынке. Если он работает биржевым брокером, то его будущие доходы очень сильно зависят от того, насколько хорошо идут дела на фондовом рынке. Доход, приносимый от применения своих способностей и трудовых навыков (т.е. от человеческого капитала) в данном случае зависит от активности фондового рынка. Следовательно, биржевому брокеру не стоит вкладывать в акции остальной капитал (в денежной форме). С другой стороны, его другу, например, правительственному служащему, вполне можно посоветовать большую часть его инвестиционного портфеля вложить в акции, потому что его человеческий капитал не так подвержен риску, связанному с фондовым рынком.

Этот же принцип комплексного рассмотрения проблемы риска применим и к компаниям. Рассмотрим, например, неопределенность, связанную с колебаниями валютного курса и влияющую на компанию, которая закупает сырье и продает свою продукцию за рубеж по фиксированным ценам в иностранной валюте. Для менеджеров компании не имеет смысла рассматривать влияние неопределенности, связанной с курсом обмена валют, *только* на выручку компании или *только* на ее затраты. Для всех держателей акций компании важен чистый результат влияния этой неопределенности, – это доход компании минус ее затраты. Хотя и доход компании, и затраты могут быть одинаково подвержены колебаниям обменного курса, итоговое влияние на компанию неопределенности, связанной с курсом обмена валют, может оказаться равной нулю.

Можно рассмотреть также пример с фермером, на чьи доходы влияет неопределенность относительно цены и величины будущего урожая. Предположим, что неурожай зерновых всегда приводит к росту цен, так что доход фермера есть величина постоянная (равная произведению цены единицы продукции на ее количество). Хотя на первый взгляд кажется, что фермер подвержен обоим видам риска – и ценовому, и количественному (риску неурожая), может оказаться, что с точки зрения уровня совокупного дохода фермера вообще нет никакого риска. Принятие фермером мер по снижению риска колебания цен может дать обратный эффект – увеличить неопределенность относительно размеров его совокупного дохода.

Для более эффективного выявления видов риска очень полезно сделать список, в котором перечислены все потенциальные виды риска для данной организации и связи между ними. Если мы имеем дело с компанией, могут потребоваться подробнейшие сведения обо всей отрасли, в которой работает данная компания, о технологиях, используемых компанией, о ее поставщиках.

Оценка риска – это количественное определение затрат, связанных с видами риска, которые были выявлены на первом этапе управления риском. Теоретической основой и практическим инструментарием для анализа и оценки финансовых рисков является построение экономико-математических моделей и проводимые по ним математические расчеты. Очевидно, что такого рода исследования должны проводить специалисты, имеющие соответствующую подготовку и квалификацию. Так, например, если фирма, решив застраховать свое имущество, в первую очередь должна оценить ее подверженность этому виду риска, чтобы после обращения в страховую компанию суметь соотнести предложенный страховой тариф с возможными убытками. Естественно, в этом случае фирме необходимо получить соответствующие сведения. Предоставление информации такого рода – одна из важнейших функций страховых компаний. Как правило, этим занимается *актуарий* (статистик страховой компании) – профессионал, имеющий специальное образование в области математики и статистики. В его обязанности входит сбор и анализ статистических данных, а также численная оценка вероятностей рисков, связанных с владением данного имущества, и расчет тарифов страхования с учетом риска разорения страховой компании.

Что касается риска инвестиций в финансовые активы, то домохозяйствам и компаниям нередко требуется консультация эксперта, которая позволяет уточнить степень их подверженности тому или иному риску и количественно выразить соотношение между риском и доходом от инвестирования в разные категории активов, например, в акции или облигации. В таких случаях обычно обращаются к профессиональным консультантам по инвестициям, во взаимные фонды и к другим финансовым посредникам или в другие фирмы, предоставляющие финансовые услуги, которые помогают сделать правильную оценку рисков.

Выбор приемов управления риском. Для уменьшения риска существует четыре основных приема управления.

1. *Избежание риска* – это сознательное решение не подвергаться определенному виду риска. Человек может решить не подвергать себя риску, связанному с какой-то профессией или работой в какой-то компании, может уклоняться от работы в определенных отраслях производства, потому что они представляются ему чересчур рискованными. Но избежать риска удается не всегда. Например, каждый человек подвергается риску заболеть – просто потому, что он человек, а все люди болеют. Это неизбежно.
2. *Предотвращение ущерба* сводится к действиям, предпринимаемым для уменьшения вероятности потерь и для минимизации их последствий. Такие действия могут предприниматься до того, как ущерб был нанесен, во время нанесения ущерба и после того, как он случился. Например, вы можете уменьшить риск заболевания, если будете хорошо питаться, достаточно спать, не курить и держаться подальше от тех, кто уже заболел гриппом. Если вы все же «подхватили» простуду, можно перейти на постельный режим и тем самым свести к минимуму вероятность того, что ваше недомогание перейдет в воспаление легких.
3. *Принятие риска* состоит в покрытии убытков за счет собственных ресурсов. Иногда это происходит само собой, например, когда человек не подозревает о существовании риска или не обращает на него внимания.
   Бывают случаи, когда люди сознательно решают пойти на риск. В частности, некоторые отказываются от медицинской страховки, предпочитая в случае заболевания пожертвовать на лечение часть заработанных средств. Предупредительные сбережения семьи – одно из средств облегчить расходы в связи с принятием риска.
4. *Перенос риска* состоит в перенесении риска на других лиц. Продажа рискованных ценных бумаг кому-то другому или приобретение страхового полиса – примеры такой стратегии управления риском. Другой пример: вы не предпринимаете никаких действий, чтобы избежать риска, и рассчитываете, что нанесенный ущерб будет покрыт за чей-то счет. Перенос риска выполняется с помощью трех основных методов: *хеджирования, страхования и диверсификации*.

Реализация выбранных приемов. Вслед за решением о том, как поступать с выявленным риском, следует переходить к реализации выбранных приемов. Главный принцип, которого следует придерживаться на этом этапе управления риском, сводится к минимизации затрат на реализацию избранного курса действий. Другими словами, если вы решили приобрести медицинскую страховку на случай болезни, надо найти страховую компанию, услуги которой обойдутся вам дешевле. Если вы решили вложить деньги в приобретение акций, следует сравнить, чьи услуги вам обойдутся дешевле – компании по управлению взаимным фондом или брокера.

Оценка результатов. Управление риском – это динамический процесс с обратной связью, при котором принятые решения должны периодически анализироваться и пересматриваться. Время идет, обстоятельства меняются и несут с собой перемены: появляются новые виды риска, или новые сведения об имеющихся видах риска, или дешевеет стратегия управления риском. Например, будучи одиноким человеком, вы решили отказаться от страхования жизни, но обстоятельства изменились, вы женились и завели детей – и это привело к изменению решения. Или вы принимаете решение об изменении доли вашего портфеля инвестиций, вложенной в акции.

1.4. ТРИ СХЕМЫ ПЕРЕНОСА ФИНАНСОВОГО РИСКА

Среди четырех приемов управления риском, перечисленных в предыдущем разделе, перенос части или всего риска на других лиц относится к тем видам риска, где финансовая система играет самую большую роль. Самый главный метод переноса риска – это просто продажа активов, которые представляют собой его источник. Например, владелец дома подвержен, как минимум, трем видам риска: пожару, стихийному бедствию и возможному падению цен на недвижимость. Продав дом, его владелец избавляется от всех трех видов риска.

Предположим, однако, что некто не может или не хочет продавать рискованные активы. В такой ситуации также можно управлять этими видами риска, только другими способами. Например, если домовладелец застраховался от пожара и стихийного бедствия, то он принимает на себя только риск падения цен на недвижимость.

Различают три метода переноса риска, называемые тремя схемами переноса риска: это хеджирование, страхование и диверсификация. Рассмотрим каждый из этих способов более подробно.

Хеджирование. О хеджировании риска говорят в тех случаях, когда действие, предпринятое для снижения риска понести убытки, одновременно приводит и к невозможности получить доход. Например, если фермер продает зерно будущего урожая по фиксированной цене, желая тем самым избежать риска снижения цен, то он тем самым лишает себя возможности получить дополнительный доход, если в момент сбора урожая цены на зерно повысятся. Фермер хеджирует свою подверженность ценовому риску на зерно. Если вы подписались на журнал не на год, а на три, вы страхуетесь от возможного повышения цен на подписку. Вы избавляетесь от риска убытков, которые можете понести в случае повышения цен на подписку, но ничего не выиграете, если подписка подешевеет.

Страхование. Страхование предполагает выплату страхового взноса, или премии (цены, которую вы платите за страховку) с целью избежать убытков. Приобретая страховой полис, вы соглашаетесь пойти на гарантированные издержки (страховой взнос, который выплачивается за полис) взамен вероятности понести гораздо больший ущерб, связанный с отсутствием страховки. Например, в случае покупки автомобиля вы почти наверняка приобретаете один из видов страховки от несчастного случая, угона или телесных повреждений, которые могут быть причинены вам или окружающим в случае аварии. Заплатив страховую премию, вы на один год страхуетесь от возможного ущерба, который может быть понесен в случае непредвиденных обстоятельств. Гарантированные издержки на сумму страховой премии заменяют вероятность гораздо больших расходов, способных достигнуть сотен тысяч рублей.

Между хеджированием и страхованием существует фундаментальное различие. В случае хеджирования вы устраняете риск понести убытки, отказываясь от возможности получить доход. В случае страхования вы платите страховой взнос, устраняя тем самым риск понести убытки, но сохраняете возможность получить доход.

Предположим, например, что человек живет в США и владеет фирмой, занимающейся экспортно-импортными операциями. Ему известно, что через месяц он получит 100 000 евро. Сейчас одно евро стоит 1,22 долларов, но каким будет курс через месяц, владелец фирмы не знает. Следовательно, для него существует валютный риск.

Для устранения этого риска можно использовать и хеджирование, и страхование. Хеджирование предполагает, что он сейчас заключает контракт на продажу 100 000 евро по фиксированной цене, скажем, в 1,22 долларов в конце месяца. Заключение контракта, который защищает его от падения курса евро, ничего ему не стоит, но он лишается возможности получить доход, если в течение месяца курс евро не понизится, а повысится.

Другой вариант: владелец фирмы может застраховаться от понижения курса марки, уплатив сейчас страховой взнос за опцион «пут», который дает ему право (но не обязательство) продать свои 100 000 евро по цене 1,22 доллара в течение месяца. Если курс евро упадет ниже 1,22 доллара, владелец фирмы не понесет убытков, потому что в течение месяца можете использовать свой опцион «пут» и продать марки по 1,22 долларов. А если курс марки повысится, он сможет продать свои 100 000 евро по более высокому курсу и получить, таким образом, дополнительный доход. Более подробно страхование с помощью опционов рассмотрено в следующем параграфе этого раздела.

Диверсификация. Диверсификация выражается во владении многими рискованными активами, вместо концентрации всех капиталовложений только в одном из них. Поэтому диверсификация ограничивает подверженность финансовому риску, связанному с единственным видом активов. Распределяя инвестиции среди нескольких рискованных активов вместо концентрации их всех в одном активе, инвестор производит перенос финансовых рисков, связанных с владением отдельно взятого актива, на портфель инвестиций. Суть диверсификации выражена в известной американской поговорке – «Не кладите все яйца в одну корзину». Следует заметить, что не всякое распределение инвестиций является диверсификацией. Но главный принцип диверсификации можно сформулировать так: посредством распределения направлений вложений среди большого числа рискованных активов можно иногда достичь общего снижения уровня риска, не уменьшая при этом уровня ожидаемой доходности.

Рассмотрим следующий пример. Некоторая фирма ***А*** хочет привлечь один миллион рублей для инвестиций в проект, сулящий 50% шансов на успех. В случае успеха фирма получит 2 миллиона рублей, которые целиком выплатит инвесторам. В случае неуспеха фирма сможет заплатить только 200 тысяч рублей. Нетрудно посчитать, что ожидаемая доходность по данному инвестиционному проекту составляет 10%. При этом с вероятностью ½ инвестор может понести убытки в размере 800 тысяч рублей, что составляет 80% от общей суммы инвестиции. Предположим, что имеется другая фирма ***Б***, которая также нуждается в привлечении миллиона рублей. Допустим, что ее предпринимательская деятельность является противоположной к деятельности фирмы ***А***. Это означает, что в случае успеха фирмы ***А*** фирма ***Б*** сможет выплатить инвестору только 200 тысяч рублей, а в случае неуспеха фирмы ***А*** она возвращает инвестору 2 миллиона рублей. Очевидно, что ни один из избегающих риска инвесторов не будет вкладывать капитал ни в фирму ***А***, ни в фирму ***Б*** по отдельности, поскольку восьмидесяти процентный убыток с вероятностью ½ является очень большим риском. Тем не менее, присутствие на рынке сразу обеих фирм приводит к тому, что любой инвестор будет готов сделать вложения сразу в обе фирмы. Для того, чтобы понять это, рассмотрим инвестора с двумя миллионами капитала. Если этот инвестор вложит по одному миллиону рублей в каждую из фирм, то доходность составит 10% вне зависимости от успеха или неуспеха фирмы ***А***. Это легко увидеть из таблицы 1.1.

Получилось так, что весь риск, связанный с инвестированием в фирму ***А***, может быть устранен путем одновременного инвестирования в фирму ***Б***. В данном примере выплаты фирм в точности отрицательно скоррелированы, что позволяет устранить риск инвестиций полностью. Как видно, приведенный пример, являющийся крайне редким случаем на практике, показывает возможности портфельного подхода к уменьшению риска инвестиций.

Таблица 1.1

ДОХОДЫ ИНВЕСТИРОВАНИЯ В ОБЕ ФИРМЫ

в тысячах рублей

Состояние фирмы *А*	Выплата фирмы *А*	Выплата фирмы *Б*	Суммарный доход
Успех	2 000	200	2 200
Неуспех	200	2 200	2 200

Портфельная теория представляет собой статистический анализ, выполняемый с целью выбора оптимальной стратегии управления риском. С какой бы точки зрения ни рассматривать – домохозяйства, компании или иного экономического субъекта, – использование портфельной теории заключается в выработке и оценке компромисса между доходом и издержками, связанными с уменьшением риска, что необходимо для определения оптимального образа действия данного субъекта.

Если речь идет о семье, то в качестве определяющего критерия принимаются предпочтения в области потребления и риска. И хотя предпочтения изменяются со временем, механизмы и причины этих изменений не рассматриваются в портфельной теории. Портфельная теория акцентирует внимание на том, как из нескольких финансовых вариантов выбрать такие, чтобы максимизировать данные предпочтения. В целом оптимальный вариант выбора предполагает оценку компромисса между получением более высокой ставки доходности и увеличением степени риска инвестиций.

Однако, отнюдь не каждое решение, направленное на сокращение риска, приводит к уменьшению ожидаемой доходности. Бывают обстоятельства, при которых обе стороны, подписывающие контракт о переносе риска, могут уменьшить уровень своего риска, заплатив за это ровно столько, сколько стоит юридическое оформление контракта. Например, покупатель и продавец дома могут договориться и установить фактическую цену дома в момент подписания контракта, хотя сама передача прав собственности состоится только через три месяца. Соглашаясь заключить такой форвардный контракт, обе стороны избавляются от рисков, связанных с колебаниями цен на рынке жилья в ближайшие три месяца: продавец – от риска снижения цены, покупатель – от риска ее повышения. Таким образом, когда противоположные стороны воспринимают риск одного и того же события с разных точек зрения, для обеих лучше всего совершить перенос риска с помощью контракта, причем ни одной из сторон не придется нести значительные расходы.

Решения, связанные с управлением риском, принятие которых не влечет за собой затрат, являются скорее исключением из правил, чем нормой. Обычно для сокращения степени риска требуется сбалансировать необходимые для этого расходы и получаемые выгоды. Такой компромисс, пожалуй, более всего очевиден в решениях, принимаемых домохозяйством по поводу распределения его средств среди таких активов, как акции, облигации и жилье.

Первые математические модели портфельной теории были разработаны Нобелевским лауреатом в области экономики 1990 года Г. Марковицем [83-84] для выработки именно этого типа решений в управлении риском. Методика сбалансирования рисков и экономической выгоды при выборе направлений рискованных инвестиций, предложенная Г. Марковицем и широко применяемая на практике финансовыми менеджерами, входит в основы теории финансов как диверсификация портфеля ценных бумаг с целью редуцирования (снижения) риска на фондовом рынке.

1.5. ИНСТРУМЕНТЫ СТРАХОВАНИЯ РИСКА

Страховой полис. Остановимся теперь на одном из методов переноса риска – страховании. Обычно страхование как финансовая деятельность ассоциируется со страховыми компаниями, предоставляющими страховые услуги. Следует отметить, что страховые компании – это финансовые посредники, основная функция которых заключается в предоставлении домохозяйствам и фирмам возможности снизить финансовые риски путем покупки контракта особого типа. Такой контракт называется *страховым полисом*, и в соответствии с ним в случае возникновения конкретных, оговоренных в нем обстоятельств, клиенту выплачивается определенная сумма, называемая *страховым возмещением*. Страховые полисы представляют собой активы домохозяйств и фирм, которые их приобретают. Одновременно они выступают долговыми обязательствами страховых компаний, продающих их. Платежи, которые получают страховые компании в качестве оплаты за предоставляемые ими услуги по страхованию, называются *страховыми премиями*. Поскольку клиенты выплачивают эти премии до предоставления им каких-либо услуг, страховые компании используют полученные от них денежные средства как инвестиции, вкладывая их в различные финансовые активы: акции, облигации или недвижимость.

Как уже было замечено, обычно страхование предполагает выплату некоторого страхового взноса с целью избежать убытков. Приобретая страховой полис, домохозяйство или фирма соглашается пойти на гарантированные издержки взамен вероятности понести гораздо больший ущерб, связанный с отсутствием страховки. В этом случае риски экономического субъекта получения убытков в будущем, связанные с его деятельностью, берет на себя страховая компания, предоставляющая соответствующие услуги. В условиях массовых рисков как, например, медицинское страхование или страхование гражданской ответственности, страховые компании выступают аккумуляторами рисков своих клиентов. Возмещение нанесенного в будущем ущерба складывается из страховых премий всех клиентов. Фактически страховая компания объединяет риски одного вида, получая за это соответствующее вознаграждение и, тем самым, снижая риск общего ущерба.

При обсуждении страховых контрактов и для понимания принципов их использования в управлении рисками имеет смысл остановиться на основных характеристиках страховых полисов.

Как правило, страховой контракт содержит исключения – потери, которые на первый взгляд удовлетворяют условиям страхового контракта, но все же их возмещение специально исключается. Например, полис страхования жизни предполагает выплату пособия в случае смерти клиента, но обычно из условий полиса исключается выплата такого пособия в случае, если клиент сам лишит себя жизни. Медицинская страховка может исключать оплату лечения определенных болезней, которыми клиент заболел до приобретения страхового полиса. Таким образом, в страховом полисе может быть указано, что из него исключена оплата по медицинским показаниям тех болезней, которые существовали до заключения страхового контракта.

Каждый страховой контракт за редким исключением устанавливает размер максимально возможной страховой выплаты, называемой *страховой суммой*. Например, если в полисе страхования от болезней установлена страховая сумма в размере одного миллиона рублей, то это означает, что страховая компания не выплатит на лечение заболевания больше этой суммы.

Некоторые договоры страхования содержат дополнительное условие не компенсировать часть убытка, называемое *франшизой*. При этом под франшизой принято понимать тот размер ущерба, который не покрывается страховым договором. Договоры с франшизой в основном предназначены для снижения расходов страховых компаний по большому числу незначительных убытков. Различают условную и безусловную франшизу. Различие между ними состоит в том, что при любом превышении условной франшизы ущерб выплачивается в полном размере. В случае безусловной франшизы сумма франшизы вычитается из суммы претензии. Другими словами, безусловная франшиза – это сумма денег, которую застрахованная сторона должна выплатить из собственных средств, прежде чем получить от страховой компании какую бы то ни было компенсацию. Например, если в ваш страховой полис на автомобиль включена франшиза в размере 1 000 рублей, то в случае аварии первую 1 000 рублей за ремонт вы должны заплатить из своего кармана, а страховая компания выплатит всю остальную сумму за вычетом этой тысячи рублей.

Франшиза заставляет клиента более внимательно относиться к возможным потерям. Владелец автомобиля, в страховом полисе которого зафиксирована франшиза в размере 500 рублей, старается водить машину более осторожно по сравнению с водителем, в полисе которого нет франшизы. Однако стимул контролировать ущерб исчезает после того, как его величина превысит размер франшизы.

Договор страхования может также содержать соглашение о *совместном возмещении убытков*, означающее, что застрахованная сторона должна покрыть часть убытков. Например, в страховом полисе может быть оговорено, что совместный платеж составляет 20% любых убытков, а страховая компания выплачивает остальные 80%. Совместный возмещение убытков похоже на франшизу в том, что также обязывает клиентов оплачивать часть убытков из собственного кармана. Различие заключается в том, как вычисляется доля, которую должен заплатить клиент, и в способах, с помощью которых у клиента создается стимул избегать ущерба.

Рассмотрим медицинский полис, в котором предусмотрена оплата посещений врача. При наличии в полисе пункта о совместном возмещении ущерба пациент должен сам оплачивать часть гонорара врачу за каждый визит. Если же в полис вместо условия о совместном возмещении включена франшиза на сумму 1 000 рублей, пациент будет полностью оплачивать все визиты к врачу до тех пор, пока сумма франшизы не будет исчерпана, а за последующие визиты он платить ничего не будет. Таким образом, франшиза не создает у пациента стимул воздерживаться от дополнительных визитов после достижения суммы в 1 000 рублей, тогда как в случае совместного возмещения такие условия создаются. Страховой полис может содержать и франшизу, и условие совместного возмещения ущерба одновременно.

Финансовые гарантии. Финансовые гарантии направлены на страхование кредитных рисков, то есть рисков того, что сторона, с которой заключен некий платежный договор, окажется неплатежеспособной. *Кредитное поручительство* – это контракт, который обязывает гаранта (поручителя) выплатить взятую ссуду в том случае, если должник не может этого сделать. Кредитное поручительство широко распространено в экономике и играет важнейшую роль, способствуя развитию торговли.

Рассмотрим, например, кредитные карточки, которые в сегодняшнем мире стали важнейшим средством оплаты людьми своих расходов. Банки и прочие эмитенты кредитных карточек гарантируют оплату всех покупок, сделанных потребителями с помощью их кредитных карточек. Таким образом, эмитенты кредитных карточек обеспечивают торговым заведениям страхование кредитного риска.

Банки, страховые компании и порой правительство, предлагают гарантии по широкому спектру финансовых инструментов, начиная от кредитных карточек и заканчивая процентными и валютными свопами. Корпорации обычно гарантируют выплату по долговым обязательствам своих филиалов. Правительство гарантирует погашение ипотечного кредита, фермерских ссуд, кредитов на обучение, а также ссуд, выдаваемых малому и крупному бизнесу и правительствам других стран. Правительство порой выступает в роли гаранта последней инстанции, который отвечает по обязательствам, взятыми на себя другими гарантами в частном секторе, например, банками и пенсионными фондами. Однако в тех случаях, когда кредитоспособность государственных учреждений сомнительна, правительство, в свою очередь, может попросить у частных фирм и компаний выдать гарантии по его долгам.

Опционы. Одной из наиболее распространенных форм страхового договора на Западе являются *опционы*.

Любой контракт, по которому одна из участвующих сторон получает право покупать или продавать что-либо по заранее определенной цене, называется *опционом*. На практике существует широкий спектр различных опционных контрактов. Опционы на акции, опционы на процентные ставки, валютные опционы и товарные опционы покупаются и продаются на биржах всего мира. В первую очередь следует заметить, что опционный контракт является двусторонней сделкой, по которой его покупатель получает право покупать или продавать определенные активы в будущем по заранее оговоренной цене, а продавец опциона обязан исполнить право покупателя, если тот захочет это сделать. Таким образом, опционы относятся к активам, называемым *условными требованиями*. Так как в опционном контракте оговаривается поставка или приемка некоторого актива в будущем, опционы считаются срочными контрактами подобно форвардным и фьючерсным контрактам. Однако опционы существенно отличаются от них, поскольку форвардные и фьючерсные контракты предполагают обязанность исполнения контракта для обеих сторон.

Для операций с биржевыми опционами используются стандартные условия, которые задаются конкретной биржей. Торговля такими опционами подобна работе фьючерсной биржи. Как и для фьючерсного рынка, опционная биржа сводит покупателей и продавцов опционов и гарантирует оплату в случае невыполнения любой из сторон взятых на себя обязательств. Существуют опционные сделки, заключаемые вне биржи. В своем исполнении они близки к форвардным контрактам.

Прежде чем рассмотреть функциональную привлекательность опционов, введем некоторые понятия, связанные с опционными контрактами. Как и форвардный контракт, любой опцион характеризуется своим *сроком погашения* или *временем исполнения* $\boldsymbol{T}$ и *ценой исполнения* $\boldsymbol{X}$. Принято разделять опционы на два класса: опционы «колл» (колл-опционы, опционы на покупку) и опционы «пут» (пут-опционы, опционы на продажу). Колл-опцион дает его покупателю (владельцу, держателю) право купить заданный актив по цене исполнения, а пут-опцион – право продать заданный актив по цене исполнения. Таким образом, покупатель опциона получает право (но не обязанность) исполнить сделку по контракту в некоторый момент времени в будущем. Понятно, что если выполнение этой сделки будет невыгодным для покупателя, то он воспользуется правом не исполнять ее. Если владелец колл-опциона совершает сделку, право на которую дает колл-опцион, то во время исполнения опциона он купит актив по цене исполнения $\boldsymbol{X}$. Тогда продавец (он же надписатель) колл-опциона, как противоположная сторона контракта, обязан продать актив по цене $\boldsymbol{X}$. Аналогично при исполнении пут-опциона его покупатель продает заданный актив по фиксированной цене $\boldsymbol{X}$, а продавец пут-опциона обязан купить его по этой цене.

По времени исполнения опционы различаются на американские и европейские. Если опцион предъявляется к исполнению только в момент его погашения $\boldsymbol{T}$, то такой опцион называется *европейским* (или *европейского типа*). Если же опцион может быть предъявлен к исполнению в любой момент времени $\boldsymbol{t}$ до наступления срока погашения (то есть $\boldsymbol{t} \le \boldsymbol{T}$), то такой опцион принято называть *американским* (или *американского типа*). В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать только опционы европейского типа.

Опционы принято относить к финансовым инструментам, позволяющим застраховать имеющиеся активы от риска изменения их цены. Например, опцион «пут» на некоторую акцию защищает покупателя от убытков, вызванных снижением курса акции. Допустим, что инвестор приобрел акцию некоторой фирмы с целью продать ее по более высокой цене в будущем. Так как он не уверен в прогнозе повышения цены акции через определенное время, он хотел бы застраховать данную инвестицию от падения рыночной цены на акцию. Для этого он приобретает пут-опцион на данную акцию, позволяющий ему продать акцию в будущем по приемлемой для него цене. В случае если цена на акцию вырастет и станет больше, чем цена исполнения купленного пут-опциона, то инвестор получает прибыль, продав акцию по рыночной цене. При этом пут-опцион не будет исполнен. В том случае, если цена не вырастет надлежащим образом или еще хуже упадет так, что ее значение будет меньше цены исполнения пут-опциона, инвестор исполнит пут-опцион и продаст акцию по приемлемой для него цене. В этом случае он избежит убытков или его убытки будут незначительны. Тем самым приобретение пут-опциона защитило акцию от риска падения цены акции на фондовом рынке. Следует заметить, что открытие короткой позиции по фьючерсному контракту на акцию также устранило бы риск убытков, но вместе с этим стало бы невозможным получение дополнительной прибыли в случае резкого повышения цены акции, поскольку по фьючерсному контракту инвестор бы обязан был продать акцию по фиксированной цене. Таким образом, покупатель опциона, приобретая право исполнения сделки, обязан выплатить компенсацию продавцу опциона за возможные убытки, которые он может понести в будущем. Такого рода компенсация должна оценивать стоимость опциона на заданный актив, исходя из параметров опциона и информации о самом активе. Так как приобретение опциона защищает инвестора от рисков, связанных с изменением цены акции, стоимость опциона можно считать денежным выражением оценки риска, от которого страхует опцион. Решение задач оценки такого рода рисков основано на построении математической модели ценообразования опционов. Этому посвящены следующие параграфы этого раздела .

Покажем на примере, что опционные контракты позволяют избежать риски убытков, оставляя при этом возможность получения прибыли в благоприятном для этого случае. Допустим, что некоторая фирма произвела вложения путем покупки 100 тысяч акций Газпрома. Рыночная цена акции на сегодня составляет 50 рублей. Поэтому данный актив фирмы оценивается в 5 миллионов рублей. Фирма хотела бы застраховаться от риска снижения курса акций на ближайшие полгода. Для этого ей удобно приобрести пут-опцион на право продажи акций по цене 50 рублей ровно через полгода. Допустим, что с помощью формулы Блэка-Шоулса ([35], стр. 231) удалось вычислить стоимость такого пут-опциона на одну акцию, и она оказалась равной 2,96 рубля. Таким образом, чтобы застраховать всю сумму, фирме необходимо выделить 296 тысяч рублей. Через полгода обладание пут-опционом дает фирме следующую выгоду. В случае если цена акций окажется не ниже 50 рублей, то фирма не исполнит опцион, поскольку у нее есть возможность продать актив по более высокой рыночной цене. При этом для фирмы сохраняется возможность получить прибыль, если рыночная цена акции возрастет существенно. Если же рыночная цена акции через полгода окажется ниже 50 рублей, то возможность исполнения пут-опциона гарантирует фирме безубыточность, не считая потери страховой суммы. В этом случае убытки понесет продавец опционного контракта.

Покупка пут-опциона на акции во многих отношениях напоминает обычное страхование имущества. Допустим, что та же фирма владеет зданием общей стоимостью 5 миллионов рублей. Фирма может застраховать данное имущество в страховой компании на полгода от повреждения или утраты. Для этого ей необходимо внести страховой взнос порядка 100 тысяч рублей. Если в течение полгода произойдет несчастный случай (пожар, наводнение и т.п.), то страховая компания возместит убытки фирме. Если же несчастный случай не произойдет, то здание фирмы останется в сохранности, она может получить с него все возможные дивиденды, но фирма потеряет внесенный страховой взнос. Итак, и при покупке пут-опциона, и при страховании имущества фирма передает финансовый риск на контрагента – продавца пут-опциона или страховую компанию.

Надо признать, что фирма может снизить страховой взнос при страховании здания, если страховой договор будет заключен с франшизой. В этом случае фирма берет на себя обязанность восполнить часть ущерба самостоятельно. Например, франшиза в нашем примере составляет 100 тысяч рублей. Тогда ущерб в сумме 100 тысяч рублей фирма оплачивает сама, а остальной ущерб восполняется за счет страховой компании. Точно так же фирма может снизить стоимость пут-опциона, если согласится на опцион с более низкой ценой исполнения. Если фирма купит пут-опцион на акцию с ценой исполнения 49 рублей, то она затратит на пут-опционы на 37 тысяч рублей меньше, но при этом в случае снижения цены акции примет на себя первые 100 тысяч рублей убытков. Таким образом, покупка пут-опциона на акции и приобретение страхового полиса являются однотипными формами страхования финансового риска. В таблице 1.2 приведено сравнение пут-опциона и страхового полиса.

Таблица 1.2

ПУТ-ОПЦИОН И СТРАХОВОЙ ПОЛИС: ОБЩИЕ ПРИЗНАКИ

Признаки	Пут-опцион	Страховой полис
Контрагент	Продавец	Страховая компания
Страхуемое имущество	100 тысяч акций	Здание
Текущая стоимость имущества	5 000 000 рублей	5 000 000 рублей
Срок действия страховки	Полгода	Полгода
Страховой взнос	296 000 рублей	100 000 рублей
Франшиза	100 000 рублей	100 000 рублей

Рассмотрим на следующем примере, в чем существенные отличия страхования имущества и покупки пут-опциона на акции. Допустим, что банк готов выдать кредит некоторой фирме на полгода. В качестве залога фирма может выставить имущество в виде здания общей стоимостью 5 миллионов рублей либо 100 000 акций Газпрома, текущая рыночная цена которых на сегодня равна 50 рублей. С первой взгляда кажется очевидным, что с точки зрения рисков 5 миллионов рублей в виде акций Газпрома являются менее привлекательными в качестве залога. Однако если у фирмы есть возможность приобрести пут-опцион на акции на полгода, то залог в 100 тысяч акций вместе в пут-опционом становится более привлекательным для банка, чем застрахованное здание. Это обусловлено рядом следующих преимуществ. Во-первых, страховка на здание не гарантирует возмещение убытков от снижения рыночной цены на имущество, а пут-опцион гарантирует. Во-вторых, пакет акций, относящихся к голубым фишкам, обладает большей ликвидностью, чем недвижимое имущество. В-третьих, если пут-опцион приобретен на опционной бирже, то риск неисполнения опциона будет гораздо ниже, чем риск неисполнения обязательств какой-нибудь страховой компанией. Все это делает более привлекательным в качестве залога пакет акций.

Таким образом, опционы, как и страховые полисы и финансовые гарантии, являются инструментами страхования финансовых рисков.

ВЫВОДЫ

Как результат проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Влияние риска на финансовую деятельность существенно зависит от вида экономического субъекта, подверженного данному финансовому риску. Основными действующими лицами финансовой системы являются домохозяйства, фирмы и правительственные организации. Домохозяйства занимают особое место, поскольку согласно теории финансов конечная функция финансовой системы – способствовать формированию оптимальной структуры потребления и размещения ресурсов домохозяйств в различные активы. Экономические субъекты, такие как компании и правительство, существуют с той целью, чтобы облегчать реализацию этой конечной функции. Таким образом, финансовые риски, характерные для домохозяйств, отличаются от рисков, присущих для деятельности фирм и правительственных организаций.
2. В условиях, когда избежать риска или предотвратить полностью ущерб нельзя, а принятие риска на себя несет существенные финансовые издержки, наиболее важным приемом управления риском становится перенос риска на другие лица. Все методы переноса финансовых рисков могут быть классифицированы по возможности получения прибыли в результате уменьшения финансового риска на следующие три группы: хеджирование, страхование, диверсификация.
3. В работе показано, что опционы и страховые полисы для покупателя являются финансовыми инструментами одного типа, позволяющими полностью избежать риска убытков, но оставляющие при этом возможность получения прибыли в благоприятном случае. Для этих инструментов приведен сравнительный анализ их характеристик, дающий возможность работать с опционами как со страховыми договорами.

2. Математические модели оценки финансовых рисков

2.1. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВОГО РИСКА

Как уже было замечено, теоретической основой и практическим инструментарием анализа и оценки финансовых рисков являются экономико-математические модели, необходимым условием которых является наличие случайного фактора (риска) и которые в математической экономике принято называть *стохастическими*. Такого рода модели довольно часто используются в экономике и основаны на логических принципах раздела математики, называемого *теория вероятностей*.

Удобным способом математической формализации неопределенности для стохастических моделей является использование концепции «состояния мира». Согласно этой концепции вся экономика мира представляется как некоторый случайный эксперимент, математической моделью которого является вероятностное пространство (Ω, F, P). При этом понимается, что каждое элементарное событие $\omega \in \Omega$ как исход такого глобального эксперимента полностью определяет все переменные, являющиеся внешними для данной модели (экзогенные переменные). Таким образом, неопределенность реализуется полностью различными случайными событиями A, входящими в σ-алгебру F, а ее численная оценка – вероятностями $P(A)$.

В первом разделе мы определили, что под *финансовым риском* следует понимать возможность (угрозу) потери лицом или организацией в результате осуществления определенной финансовой деятельности части своих ресурсов или планируемых доходов (прибыли) в будущем. Если обозначить через A случайное событие, состоящее в том, что участник понес убытки или упустил предполагаемую прибыль, то вероятность этого события $P(A)$ и есть численная оценка финансового риска. Допустим, что инвестор опасается потерять 10 миллионов рублей в течение года в результате инвестиционной деятельности на фондовом рынке. У инвестора имеется две стратегии управления инвестиционным портфелем, имеющие одинаковые ожидаемые доходности на год. Однако в результате расчетов оценка вероятности случайного события получить убыток в 10 миллионов рублей для первой стратегии оказалась равной 10%, а для второй – 5%. Это означает, что шансы финансового риска потерять 10 миллионов рублей для инвестора в первом случае составляют один из десяти равновозможных вариантов развития событий в течение года, а во втором – один из двадцати. Хотя первая стратегия при благоприятном развитии событий дает возможность получения более высокой прибыли, чем вторая, финансовый риск инвестора при первой стратегии в два раза больше, чем при второй. Если для инвестора важным является этот финансовый риск, то он, конечно, выберет вторую стратегию. Таким образом, оценка финансовых рисков с помощью вероятностей соответствующих событий позволяют сравнивать финансовые риски между собой, выбирать наименее вероятные и тем самым управлять финансовыми рисками.

Чтобы подтвердить это, рассмотрим простейшую статическую модель инвестиции. Допустим, что предполагаемый доход (убыток) D некоторого инвестиционного проекта сроком на один год является функцией от резервного капитала K и случайной величины η, характеризующей внешнюю экономическую конъюнктуру:

$$D = h(\eta, K).$$

Предположим, что функция

$$z = h(x, y) = h_y(x)$$

при фиксированной переменной y является строго возрастающей по аргументу x:

для любых $x_1 < x_2$ $h_y(x_1) < h_y(x_2)$.

Тогда для каждого y у функции $z = h_y(x)$ существует обратная к ней функция

$$x = h_y^{-1}(z) = \Psi(z, y),$$

являющаяся также строго возрастающей по аргументу z. Пусть также для каждого z $\Psi(z,y)$ есть строго убывающая функция по переменной y: для любых $y_1 < y_2$ $\Psi(z, y_1) > \Psi(z, y_2)$. Тогда случайное событие A, состоящее в том, что инвестор окажется без доходов, равносильно событию, что случайная величина η не превзойдет $h_K^{-1}(0)$, то есть

$$A = \{D \le 0\} = \{\eta \le h_K^{-1}(0)\}.$$

Если случайная величина η имеет функцию распределения

$$F_\eta(x) = P\{\eta \le x\},\ x \in (-\infty, +\infty),$$

то оценка финансового риска убытков определяется следующей вероятностью:

$$P(A) = P\{\eta \le h_K^{-1}(0)\} = \\ = F_\eta(h_K^{-1}(0)) = F_\eta(\psi(0, K)). \qquad (2.1)$$

Так как любая функция распределения является монотонно возрастающей функцией, то есть для любых

$$x < y \quad F_\eta(x) \le F_\eta(y),$$

а по нашему предположению $\psi(0,K)$ – убывающая функция по K, вероятность риска $P(A)$ убывает с ростом резервного капитала K. Тем самым минимум риска в этом случае возникает тогда, когда резервный капитал максимален. Если функция $\psi(0,K)$ не ограничена снизу, то при

$$K \to +\infty \quad \psi(0,K) \to -\infty,$$

и, значит,

$$P(A) = F_\eta(\psi(0,K)) \to 0.$$

Последнее означает, что бесконечный резервный капитал определяет вероятность неполучения прибыли, равную нулю. Следовательно, наличие бесконечно большого капитала устраняет полностью риск неполучения прибыли.

Примером реализации такого метода оценки финансового риска является модель разорения страховой компании. Допустим, что анализируется относительно короткий период (например, один год). Страховые премии вносятся в начале периода и за вычетом накладных расходов составляют резервный капитал K страховой компании. Все страховые выплаты по заключенным страховым договорам определяют суммарный иск S к страховой компании. Так как рассматривается короткий период, каждая страховая выплата входит в суммарный иск без дисконтирования. Тогда доход страховой компании определяется как разность $D = K - S$. В начале периода известна сумма капитала K, но не известна величина S. Поэтому ее можно считать случайной величиной. В рамках построенной математической модели часто можно сделать аналитические выводы о распределении данной случайной величины. Допустим, что S имеет гауссовское распределение. Обозначим через a ожидаемую величину суммарного иска, а через σ – его среднее квадратическое отклонение:

$$a = M\,S,\ \sigma = \sqrt{DS}$$ [1].

Заметим, что $\sigma > 0$. Тогда случайная величина $\sigma^{-1}(S - a)$ имеет стандартное гауссовское распределение. В силу симметричности стандартного гауссовского распределения случайная величина $\eta = -\sigma^{-1}(S - a)$ имеет также стандартное гауссовское распределение, и ее функция распределения равна функции Лапласа:

[1] Здесь и в дальнейшем $M\xi$ и $D\xi$ означают математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ соответственно.

$$F_\eta(x)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt \qquad (2.2)$$

Преобразуя полученное равенство, в итоге имеем, что суммарный иск равен $S=a-\sigma\eta$, и, следовательно, доход D и функция $h(x,y)$ определяются по формулам:

$$D=K-a+\sigma\eta$$

и

$$h(x,y)=y-a+\sigma x.$$

Нетрудно проверить, что построенная таким образом функция $h(x,y)$ удовлетворяет всем необходимым условиям предыдущих рассуждений. Действительно, для каждого y существует обратная функция

$$x=h_y^{-1}(z)=\psi(z,y)=\frac{z+a-y}{\sigma}.$$

Разорение страховой компании, означающее ее неспособность оплатить по всем искам, в рамках такой модели может произойти только в том случае, если доход D будет меньше нуля. В результате всех предыдущих рассуждений в итоге имеем, что риск разорения страховой компании оценивается с помощью функции Лапласа:

$$P(A)=F_\eta(\psi(0,K))=\Phi\left(\frac{a-K}{\sigma}\right). \qquad (2.3)$$

Таким образом, по заданному резервному капиталу K определяется оценка финансового риска как вероятность $P(A)$. В условиях, когда финансовый менеджер принимает решения, естественно им должна быть выбрана стратегия, которая приносит минимальную вероятность риска при заданной величине резервного капитала.

2.2. *VAR* -МЕТОД ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ РИСКОВ

Методика оценки финансовых рисков на основе расчетов вероятностей неблагоприятных событий является очевидной с точки зрения математика. Однако, такая методика является неудобной для применения с точки зрения финансового менеджера, поскольку она определяет вероятностное распределение убытков и не дает конкретную стоимостную оценку финансового риска. Наиболее распространенной на сегодняшний момент методологией оценивания финансовых рисков является *VAR* -метод, получивший название от аббревиатуры английского названия *стоимости риска* (Value-at-Risk, *VAR*). Суть этого метода состоит в том, чтобы определить стоимость финансового риска как наименьшую возможную величину капитала, необходимого для обеспечения заданного уровня вероятности риска.

Опишем алгоритм *VAR* -метода на примере построенной простейшей модели инвестиций. Пусть, как и ранее, предполагаемый доход D есть некоторая функция от капитала K и случайной величины η с функцией распределения

$$F_\eta(x)\,/\,D=h(\eta,K).$$

Тогда по формуле (2.1) вероятность риска получения убытков равна

$$P\{D\le 0\}=F_\eta(\psi(0,K)),$$

где

$\psi(z,y)$ есть обратная функция для $h(x,y)$. *VAR* -метод может быть представлен в виде следующих последовательных шагов.

Шаг 1. Выберем уровень допустимой вероятности риска $\alpha\in(0,1)$.

Шаг 2. Найдем квантиль x_α функции распределения $F_\eta(x)$ как супремум множества тех значений x, для которых $F_\eta(x)$. Такое множество является непустым и ограниченным сверху в силу свойств функции распределения.

Шаг 3. Значение стоимости K_α риска уровня α определяется как решение уравнения $\psi(0,K)=x_\alpha$. Так как в наших предположениях функция $\psi(0,K)$ является строго убывающей и неограниченной снизу, приведенное уравнение всегда имеет решение.

В качестве примера оценки риска обратимся снова к модели разорения страховой компании. Нашей задачей является оценить стоимость риска разорения. Пусть допустимое значение риска составляет 5%, то есть α =5%. Риск разорения страховой компании определяется по формуле (2.3), согласно которой при шаге 2 в качестве функции распределения случайной величины необходимо взять функцию Лапласа. Поэтому x_α определяется из уравнения $\Phi(x)$. С учетом симметричности этого распределения получаем, что $x_\alpha=-q_\alpha$, где q_α – стандартный квантиль гауссовского распределения уровня 1-α. Известно, что для α =5% q_α =1,645. И значит, x_α =-1,645. Наконец, решая уравнение $\frac{a-K}{\sigma}=x_\alpha$, находим, что резервный капитал компании, необходимый для того, чтобы риск разорения не превысил выбранный уровень α, удовлетворяет соотношению: $K_\alpha=a-x_\alpha\sigma$. С учетом того, что $a=M\ S$, $\sigma=\sqrt{D\ S}$, где S – случайная величина суммарного иска, в итоге получаем известную формулу резервного капитала страховой компании, необходимую для начислений страховых премий: $K_\alpha=M\ S+q_\alpha\sqrt{D\ S}$ (см. [63]). Таким образом, стандартная методика начисления страховых премий, принятая в России, является ничем иным, как *VAR* -методом оценки финансового риска, связанного с разорением страховой компании. В частности, для уровня риска в 5% такая формула имеет следующий вид: $K_{5\%}=M\ S+1{,}645\sqrt{D\ S}$.

Надо признать, что за последнее десятилетие *VAR* -метод стал одним из самых популярных средств управления и контроля риска в компаниях различного типа. Вызвано это было несколькими причинами. Одной из них стало, несомненно, раскрытие в 1994 г. крупнейшей инвестиционной компанией США Дж.П. Морган системы оценивания риска Riskmetrics и предоставление в свободное пользование базы данных для этой системы для всех участников рынка. Значения *VAR*, полученные с использованием системы Riskmetrics и до сих пор являются неким эталоном для оценок *VAR* .

Вторая причина заключается в инвестиционном «климате», который царил в конце 1990-х годов и был связан с огромными потерями, понесенными финансовыми институтами, в частности, при оперировании на рынках производных ценных бумаг [56].

Третьей причиной, является решение организаций, осуществляющих надзор за банками, использовать величины ***VAR*** для определения резервов капитала.

Разработка и внедрение моделей ***VAR*** в современном риск-менеджменте происходит стремительным образом. В инвестиционных компаниях и банках методология ***VAR*** может применяться, по крайней мере, в четырех направлениях деятельности.

1. *Внутренний мониторинг рыночных рисков.* Институциональные инвесторы могут вычислять и производить мониторинг значений ***VAR*** по нескольким уровням: агрегированному портфелю, по классу актива, по эмитенту, по контрагенту, по трейдеру, портфельному менеджеру и т.д. С точки зрения мониторинга точность оценивания величины ***VAR*** уходит на второй план, поскольку в данном случае важна величина относительного, а не абсолютного значения ***VAR*** , т.е. ***VAR*** управляющего или ***VAR*** портфеля по сравнению с ***VAR*** эталонного портфеля, индекса, другого менеджера или того же менеджера в предыдущие моменты времени.

2. *Внешний мониторинг.* ***VAR*** позволяет создать представление о рыночном риске портфеля без раскрытия информации о составе портфеля (который может быть довольно запутанным). Кроме того, регулярные отчеты с использованием цифр ***VAR*** , предоставляемые начальству, могут служить одним из аргументов того, что риск, который взяли на себя управляющие менеджеры, находится в приемлемых рамках.

3. *Мониторинг эффективности операций снижения риска.* Значения ***VAR*** могут использоваться для определения степени того, насколько управление финансовым риском выполняет поставленные цели. Менеджер может оценить эффективность конкретной стратегии путем сравнения величин ***VAR*** инвестиционных портфелей с принятием хеджирующей стратегии и без нее совсем. Если, например, разница между этими двумя величинами невелика, то возникает вопрос о целесообразности хеджирования или правильно ли хеджирование применяется.

4. *Автоматический анализ возможных управленческих решений.* Методология ***VAR*** позволяет дать больше свободы и автономии управляющему персоналу, так как становится возможным сократить всевозможные бюрократические процедуры, связанные с утверждением тех или иных сделок (особенно с производными инструментами). Это достигается через мониторинг транзакций (сделок) с использованием ***VAR*** . Например, высшее руководство может просто установить правило для своих брокеров-дилеров подобного рода: «Никакая операция не должна приводить к увеличению значения ***VAR*** более чем на ***X*** % начального капитала» и после этого не вдаваться в последствии в подробности каждой конкретной торговой стратегии.

Таким образом, компании могут использовать значения ***VAR*** для создания отчетов для менеджеров, акционеров и внешних инвесторов, так как ***VAR*** позволяет агрегировать всевозможные рыночные риски в одно число, имеющее денежное выражение. С помощью методологии ***VAR*** становится возможным вычислить оценки риска различных сегментов рынка и отождествить наиболее рисковые позиции. Оценки ***VAR*** могут использоваться для диверсификации капитала, установки лимитов, а также оценки деятельности компании. В некоторых банках оценка операций трейдеров, а также их вознаграждение вычисляется исходя из расчета доходности на единицу ***VAR*** .

Нефинансовые корпорации могут использовать технику ***VAR*** для оценки рисков денежных потоков и принятия решений о хеджировании (защите капитала от неблагоприятного движения цен). Так одной из трактовок ***VAR*** является количество незастрахованного риска, которое принимает на себя корпорация. Среди первых нефинансовых компаний, начавших применять ***VAR*** для оценки рыночного риска, можно отметить американскую компанию Mobil Oil, немецкие компании Veba и Siemens, норвежскую Statoil (см. [99]).

Инвестиционные аналитики используют ***VAR*** для оценивания различных проектов. Институциональные инвесторы, такие как пенсионные фонды, используют ***VAR*** для расчета рыночных рисков. Так как было отмечено в исследовании New York University Stern School of Business, около 60%-ов пенсионных фондов США используют в своей работе методологию ***VAR*** [99].

Следует отметить, что сама методология ***VAR*** не является операцией управления финансовым риском, поскольку она никоим образом не освобождает от финансовых потерь. Она всего лишь помогает компаниям представить, являются ли риски, которым они подвержены, теми рисками, которые они хотели бы на себя принять или думают, что они на себя приняли. ***VAR*** - метод не может определить оптимальную величину риска, которого необходимо взять на себя компании, – в этом и состоит работа финансового управляющего или риск-менеджера. Однако ***VAR*** -метод позволяет оценить величину уже взятого риска.

VAR -метод является частью комплексного анализа финансовых рисков и должен использоваться не взамен, а в дополнение к другим методам оценки риска таким, например, как ***SAR*** -метод, когда интересуются не только граничной величиной капитала, ниже которой следует ожидать убыток с определенной долей вероятности, а и размером этого убытка. Остановимся на этом методе более подробно.

2.3. *SAR* -МЕТОД ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ РИСКОВ

Довольно часто для оценки риска инвестора интересует не столько вероятность получения убытков, сколько сама ожидаемая величина убытка. Это объясняется тем, что в некоторых случаях вероятность получения убытка может быть очень мала, но размер убытка настолько большим, что последствия неблагоприятного исхода можно считать катастрофическими. Порою в таких ситуациях инвестор пренебрегает самим риском в силу малости вероятности его появления и тем самым совершает ошибку, поскольку сам риск в силу катастрофических последствий представляет собой достаточную опасность для финансового состояния компании. Поэтому для управляющего компании необходима оценка риска, учитывающая и величины возможных убытков. Таким методом оценки финансового риска является так называемый ***SAR*** - метод (Shortfall-at-Risk, Средняя Величина Убытка).

Суть этого метода достаточно просто интерпретируется в следующих математических терминах.

Рассмотрим, как и ранее, простейшую статическую модель инвестиции с предполагаемым доходом $D = h(\eta, K)$, зависящим от резервного капитала K и случайной величины η с функцией распределения $F_\eta(x)$. Риск не получения доходов определяется случайным событием

$$A = \{D \le 0\} = \{\eta \le \psi(0,K)\},$$

где $x = \psi(z,y)$ является обратной функцией к функции $z = h(x,y)$. Обозначим через I_A индикатор события A:

$$I_A(\omega) = 1,\ \omega \in A;$$

$$I_A(\omega) = 0,\ \omega \in \overline{A}.$$

Тогда случайная величина предполагаемого убытка равна $\xi = -D * I_A$. Соответственно, ожидаемая величина убытка определяется как математическое ожидание $M\xi = -M(D * I_A)$. Отсюда нетрудно получить значение ожидаемой величины убытка как функции от капитала K:

$$H(K) = -M(D * I_A) = -M(h(\eta,K) * I_{\{\pi \le \psi(0,K)\}}) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\psi(0,K)} h(x,K) dF_\eta(x). \qquad (2.4)$$

Полученная формула позволяет оценивать риск убытков в простейшей модели инвестирования.

Функция $H(K)$ определяет абсолютное значение ожидаемой величины убытка. В сравнении с заданным значением капитала K данная величина легко может быть использована для управления риском. Однако в данном случае выбор оптимального значения капитала зависит не только от предрасположенности инвестора к риску, но и от порядка величин самого капитала. Поэтому для удобства введем две относительные величины:

$$P(K) = \frac{H(K)}{K},\ Q(K) = \frac{H(K)}{\max\limits_L H(L)}. \qquad (2.5)$$

Теперь, выбирая допустимый уровень риска $\alpha \in (0,1)$, находим оптимальное значение капитала K_α таким образом, чтобы оно было минимальным среди всех K, для которых $P(K) \le \alpha$. Другими словами, инвестор устанавливает уровень αK, который не может быть превышен ожидаемой величиной убытков $H(K)$. Среди всех таких допустимых капиталов инвестор выбирает наименьший. При K=0 величина $P(K)$ будет бесконечно большой, что делает сложным анализ при маленьких K. В этом случае удобно пользоваться показателем $Q(K)$ как уровнем ожидаемого убытка по отношению к максимально возможному его значению. Так как $H(K)$ – убывающая функция по K, ее максимум достигается, когда инвестор ничего не вкладывает:

$$H(0) = \max_L H(L).$$

Поэтому величина $Q(K)$ удовлетворяет соотношению: $Q(K) = \dfrac{H(K)}{H(0)}$ Аналогично для каждого $\alpha \in (0,1)$ можно определить K_α как наименьше возможное значение капитала K, для которого $Q(K) \le \alpha$. В этом и состоит SAR-метод оценки финансового риска.

Рассмотрим применение этого метода на примере модели разорения страховой компании. Как уже было ранее показано, в этом случае доход D определяется по формуле

$$D = K - \alpha + \sigma\eta,$$

где

η – стандартная гауссовская случайная величина с плотностью распределения

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

а значение обратной функции равно

$$\psi(0,K) = \frac{a-K}{\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Тогда оценка SAR риска разорения страховой компании по формуле (2.4) может быть представлена в следующем виде:

$$H(K) = -\int_{-\infty}^{\frac{a-K}{\sigma}} (K - a - \sigma x)\varphi(x)dx$$

Преобразуем полученный интеграл и находим, что

$$H(K) = -\int_{-\infty}^{\frac{a-K}{\sigma}} (K - a - \sigma x)\varphi(x)dx =$$

$$= (a-K)\int_{-\infty}^{\frac{a-K}{\sigma}} \varphi(x)dx - \sigma \int_{-\infty}^{\frac{a-K}{\sigma}} x\varphi(x)dx =$$

$$= (a-K)\Phi\left(\frac{a-K}{\sigma}\right) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a-K}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Проинтегрировав второе слагаемое, окончательно получаем формулу для оценки риска разорения страховой компании SAR-методом:

$$H(K) = (a-K)\Phi\left(\frac{a-K}{\sigma}\right) + \sigma\varphi\left(\frac{a-K}{\sigma}\right). \qquad (2.6)$$

Если представить величину необходимого капитала как $K_t = a + \sigma t$, $t \in [0,+\infty)$, то нетрудно найти зависимость SAR-оценки риска от параметра t:

$$H(K_t) = -\sigma t\Phi(-t) + \sigma\varphi(-t) =$$

$$= \sigma(-t\Phi(-t) + \varphi(-t)) = \sigma g(t).$$

Тогда с учетом того, что

$$\varphi(-t) = \varphi(t)$$

и

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t),$$

коэффициент $g(t)$ определяется как

$$g(t) = \varphi(t) - t(1 - \Phi(t)).$$

В частности, для

$$t = q_{5\%} = 1{,}645,$$

когда вероятность разорения равна 5%, коэффициент

$$g(t) = 0{,}0209,$$

и, следовательно,

$$H(K_t) = 0{,}0209\sigma.$$

Заметим, что вероятность разорения в зависимости от параметра t определяется остаточной функцией Лапласа $1-\Phi(t)$. Сравнение изменений коэффициента $g(t)$ и вероятности разорения $1-\Phi(t)$ при изменении параметра $t \in [0,2]$ приведено на рис. 2.1.

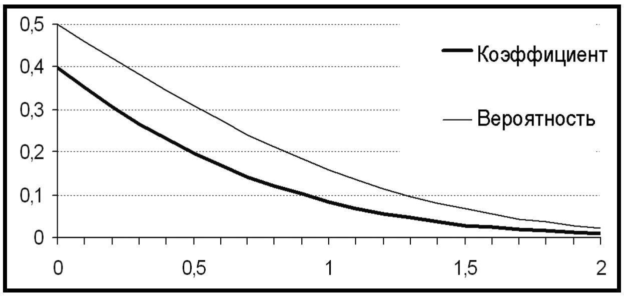

Рис. 2.1. Сравнение коэффициента $g(t)$ и вероятности разорения $1-\Phi(t)$

Как видно из рисунка, для модели разорения страховой компании оценка финансового риска разорения методами VAR и SAR в принципе идентична.

Приведем пример, когда эти методы приводят к различным оценкам финансового риска. Продолжим исследование статической модели разорения страховой компании. Пусть, как и ранее, величина K ($K \geq 0$) составляет резервный капитал, а все страховые выплаты равны S, при этом расчеты будем вести в условных единицах. Будем предполагать, что случайная величина S имеет гамма-распределение с параметрами $\alpha = 25$ и $\lambda = 1$. Это означает, что S имеет плотность распределения:

$$f(x) = \frac{x^{24}}{24!}e^{-x}.$$

Очевидно, что общая величина убытков будет равна $S - K$, если $S > K$, и равна нулю, если $S \leq K$. Тогда

$$H(K) = \int_K^{+\infty} (x-K)f(x)dx. \qquad (2.7)$$

Преобразуем выписанный интеграл в удобном для нас виде:

$$H(K) = \int_K^{+\infty} x\frac{x^{24}}{24!}e^{-x}dx - K\int_K^{+\infty}\frac{x^{24}}{24!}e^{-x}dx =$$

$$= 25\int_K^{+\infty}\frac{x^{25}}{25!}e^{-x}dx - K\int_K^{+\infty}\frac{x^{24}}{24!}e^{-x}dx =$$

$$25(1-G(K,26,1)) - K(1-G(K,25,1)), \qquad (2.8)$$

где $G(x,\alpha,\lambda)$ есть функция гамма-распределения с параметрами α и λ. Заметим, что максимум величины $H(K)$ достигается при $K = 0$ и равен $H(0) = MS = 25$. По формуле (2.5) определим коэффициент

$$Q(K) = H(K)/H(0),$$

который можно понимать как ожидаемую относительную сумму убытков при заданном капитале K. В силу (2.8)

$$Q(K) = 1-G(K,26,1) - K(1-G(K,25,1))/25. \qquad (2.9)$$

В свою очередь вероятность разорения $R(K)$ определяется по формуле:

$$R(K) = P\{S > K\} = 1-G(K,25,1). \qquad (2.10)$$

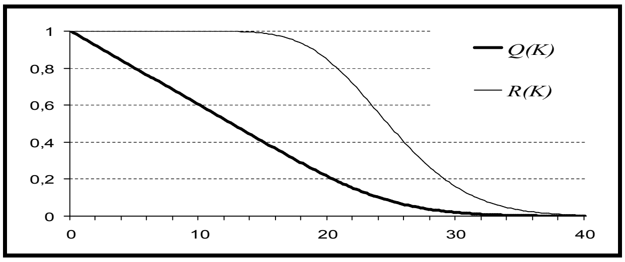

Рис. 2.2. Графики оценки риска в зависимости от величины капитала

Сравнительный анализ графиков полученных функций (рис. 2.2) показывает существенную разницу в оценках данного риска разными методами.

Допустим, что мы выбрали в качестве допустимого уровня разорения 5%. Тогда VAR-метод определяет нам значение минимально возможного капитала $K_{5\%}^{(1)} = 33{,}76$ как решение уравнения $R(K) = 5\%$. Если же воспользоваться SAR-методом и решить уравнение $Q(K) = 5\%$, то оптимальное значение капитала для заданного уровня будет равно $K_{5\%}^{(2)} = 26{,}84$. Аналогичная процедура нахождения оптимального капитала SAR-методом с помощью функции $P(K)$, определенной по формуле (2.5), дает нам значение $K_{5\%}^{(3)} = 26{,}60$, не сильно отличающееся от полученной величины $K_{5\%}^{(2)}$. Таким образом, выбор метода даст нам в этом случае существенно различные ответы на вопрос об оптимальном капитале, необходимом для поддержания заданного уровня риска. Значения $K_\alpha^{(i)}$, рассчитанные приведенными способами для основных уровней разорения α в условных единицах, представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

СРАВНЕНИЕ *VAR* - И *SAR* -МЕТОДОВ

Допустимый уровень разорения α	VAR-метод	SAR-метод	
	$K_\alpha^{(1)}$	$K_\alpha^{(2)}$	$K_\alpha^{(3)}$
5%	33,76	26,84	26,6
4%	34,41	27,65	27,33
3%	35,22	28,64	28,23
2%	36,31	29,95	29,43
1%	38,08	32,02	31,37

2.4. СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ КАК МЕРА РИСКА

Рассмотрим оценку риска, предложенную для простейшей инвестиционной модели. Пусть, как и ранее, предполагаемый доход (убыток) D является функцией от резервного капитала K и некоторой случайной величины η:

$$D = h(\eta, K).$$

Зная функцию распределения $F_\eta(x)$ случайной величины η, нетрудно получить числовые характеристики дохода D – математическое ожидание $d = M[D]$ и дисперсию $\sigma^2 = D[D]$ – по следующим формулам:

$$d = M[h(\eta,K)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta,K)dF_\eta(x);$$

$$\sigma^2 = D[h(\eta,K)] = M[h(\eta,K)-d]^2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [h(\eta,K)-d]^2 dF_\eta(x) . \qquad (2.11)$$

Соответственно среднее квадратическое отклонение D равно квадратному корню из дисперсии: $\sigma_D = \sqrt{\sigma^2}$. Принято считать, что чем меньше это значение, тем меньше вероятность риска

$$P(A) = P\{h(\eta,K) \le 0\} = F(\psi(0,K)),$$

найденная по формуле (2.1). Этот вывод основан на следующем рассуждении. Поскольку риск обусловлен неопределенностью исхода, то, чем меньше разброс (дисперсия) возможных значений случайной величины, тем более предсказуемо ее значение, а, следовательно, меньше риск. Например, если дисперсия равна нулю, то с вероятностью 1 случайная величина $h(\eta,K)$ принимает одно и то же значение d . Это означает, что исход детерминирован, и риск совсем отсутствует. Такого рода рассуждения привели к широкому распространению точки зрения, согласно которой мерой риска инвестиционного проекта считается среднее квадратическое отклонение его доходности.

Следует заметить, что хотя приведенные рассуждения не лишены здравого смысла, существует достаточное количество примеров, когда увеличение дисперсии снижает вероятность. Пусть, например, случайная величина D имеет Гауссовское распределение с параметрами (d,σ) и $d < 0$. Тогда $(D-d)/\sigma$ имеет стандартное Гауссовское распределение, и, следовательно, вероятность убытка $P(A)$ находится по формуле:

$$P(A) = P\{D \le 0\} =$$
$$P\left\{\frac{D-d}{\sigma} \le \frac{-d}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{-d}{\sigma}\right),$$

где

$\Phi(x)$ – стандартная функция Лапласа (2.2).

Так как $d < 0$ и функция Лапласа строго возрастает, из того, что $\sigma_1 < \sigma_2$, следует, что $\frac{-d}{\sigma_1} > \frac{-d}{\sigma_2}$ и $\Phi\left(\frac{-d}{\sigma_1}\right) > \Phi\left(\frac{-d}{\sigma_2}\right)$. А значит, вероятность убытка в этом случае есть функция убывающая по σ . Этому есть объяснение с точки зрения риск-менеджера. Условие $d < 0$ означает, что ожидаемая прибыль по инвестиционному проекту является отрицательной, а сам проект убыточным. В этом случае, чтобы снизить вероятность убытка инвестору лучше выбрать проект с большей дисперсией убытка. Другими словами, в условиях заведомо проигрышных для инвестора ему следует выбирать стратегии, приводящие к увеличению дисперсии (риска).

Так как наиболее распространенной является ситуация, когда инвестиционный проект является прибыльным, общепринято считать среднее квадратическое отклонение случайной величины дохода мерой риска получить убытки. Рассмотрим снова математическую модель разорения страховой компании. Пусть, как и ранее, доход страховой компании равен

$$D = K - S ,$$

где

K – резервный капитал;

S – суммарный иск.

Будем предполагать, что S имеет Гауссовское распределение с параметрами (a,σ) . Тогда нетрудно получить, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины дохода равны соответственно:

$$M[D] = K - a ;$$
$$D[D] = \sigma^2 . \qquad (2.12)$$

Таким образом, среднее квадратическое отклонение σ_D для любого значения K равно σ , и, значит, мера риска в этом примере не зависит от значения капитала K , что само по себе является абсурдом. Это, пример еще раз показывает, что среднее квадратическое отклонение отдельно не может служить идеальной мерой риска.

По всей видимости, широкое распространение оценки риска финансовых инвестиций через среднее квадратическое отклонение получило после появления портфельной теории Марковица, в основе которой лежит принцип диверсификации инвестиционного портфеля с целью снижения риска (см. параграф 1.4). Главной заслугой этой теории является методика сбалансирования рисков и экономической выгоды при выборе направлений рискованных инвестиций. Фактически Г. Марковиц построил математическую модель, демонстрирующую, как инвесторы могут максимально снизить дисперсию портфеля инвестиций при заданном уровне его доходности.

Рассмотрим в качестве примера простейшую модель портфеля инвестиций в безрисковый и рисковый активы. Допустим, что у нас имеется две возможности инвестирования. Первая – в безрисковый актив с доходностью r_f . Это означает, что инвестируя в этот актив, вне зависимости от случая мы всегда будем иметь прибыль, равную r_f . Вторая возможность инвестирования представляется некоторой акцией (или портфелем акций), доходность по которой является случайной величиной ξ с математическим ожиданием $r = M\xi$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sigma$. Рискованность этого актива предполагается условием, что $\sigma > 0$. Будем также предполагать, что $r > r_f$, поскольку иначе задача оптимизации портфеля имеет тривиальное решение.

Портфель, состоящий из безрискового и рискового актива, однозначно будет определяться долей t капитала, инвестируемой в рисковый актив. Понятно, что оставшаяся часть капитала $(1-t)$ будет вложена в безрисковый актив. Введем ограничения на открытие коротких позиций по активам, предполагая, что $t \in [0,1]$. Таким образом, любое число t из отрезка $[0,1]$ определяет портфель $(1-t,t)$ инвестиций в безрисковый и рисковый активы. Для каждого такого портфеля его доходность определяется по формуле:

$$\xi_t = (1-t)r_f + t\xi .$$

Тогда ожидаемая доходность и среднее квадратическое отклонение по каждому портфелю равны соответственно

$$r_t = (1-t)r_f + tr$$

и

$$\sigma_t = \sigma t .$$

Для инвестора, интересующегося только риском и доходностью портфеля, удобно оценивать риск средним квадратическим отклонением σ_t. Заметим, что в этой простейшей модели инвестирования функции r_t и σ_t являются линейными по t. Поэтому, хотя каждый инвестор выбирает оптимальный портфель по каким-то собственным критериям, сам выбор сводится к решению задачи линейного программирования. В дальнейшем будем предполагать, что оптимальный портфель определяется каким-то конкретным значением t_0.

Наиболее часто встречаемая задача оптимизации портфеля была впервые описана Г. Марковицем и имеет следующую постановку. Допустим, что задан некоторый уровень доходности r_0, ниже которого инвестор не хотел бы иметь ожидаемую доходность портфеля. Тогда оптимальный портфель выбирается среди всех возможных так, чтобы риск инвестиций, определяемый средним квадратическим отклонением доходности портфеля, был минимальным. В нашем простейшем случае задача Марковица может быть формализована следующим образом:

$$\sigma_t = \sigma t \to min;$$
$$r_t \geq r_0,\ t \in [1,0]\ . \tag{2.13}$$

Естественно предположить, что $r_f < r_0 < r$, иначе задача либо не имеет решения, либо становится тривиальной. Так как σ_t – возрастающая функция на отрезке $[1,0]$,ее минимум достигается в минимально возможном значении t, определяемым условием $r_t \geq r_0$. В силу того, что r_t также возрастает на $[1,0]$, минимальное возможное значение t_0 определяется уравнением $r_t = r_0$. Таким образом, имеет место равенство

$$r_0 = (r - r_f)t_0 + r_f\ ,$$

из которого находим значение t_0 и соответствующее ему $1 - t_0$:

$$t_0 = \frac{r_0 - r_f}{r - r_f};$$

$$1 - t_0 = \frac{r - r_0}{r - r_f}.$$

Следовательно, оптимальный портфель в задаче Марковица в простейшем случае инвестирования в два фонда – безрисковый и рисковый активы – определяется следующей парой:

$$(1 - t_0, t_0) = \left(\frac{r - r_0}{r - r_f}, \frac{r_0 - r_f}{r - r_f}\right)$$

Полученная формула оптимального портфеля вполне согласуется с известным оптимальным распределением инвестиции между безрисковым активом и рыночным портфелем акций [86].

Оценка риска средним квадратическим отклонением для общей модели Марковица является крайне важной для определения оптимального портфеля, поскольку в этом случае задача сводится к минимизации неотрицательно определенной квадратичной формы. Опишем данную оптимизационную задачу более подробно.

Рассмотрим математическую модель инвестирования капитала на единицу времени в экономику, состоящую из N типов акций. Чтобы все фирмы были в равных по времени условиях, будем предполагать, что через единицу времени все фирмы ликвидируются, а полученные доходы распределяются среди акционеров в качестве дивидендов. Дивиденды, выплачиваемые на акции каждого типа, будем считать случайными величинами. Другими словами, будем полагать, что существует некоторое вероятностное пространство (Ω, F, P), на котором определены случайные величины $D_i(\omega)$ – дивиденды, выплачиваемые на акцию i в состоянии экономики ω, $i = 1,2,...,N$. Пусть S_i – цена акции i в начальное время. Тогда

$$\xi_i(\omega) = \frac{D_i(\omega) - S_i}{S_i}$$

является доходностью акции i в состоянии ω. Так как это случайная величина, то ей можно поставить в соответствие математическое ожидание $r_i = M\xi_i$ и дисперсию $\sigma_i^2 = D\xi_i$. Таким образом, каждой акции i мы ставим в соответствие ожидаемую доходность r_i и среднее квадратическое отклонение σ_i, $i = 1,2,...,N$. Взаимная зависимость доходностей по акциям определяется матрицей ковариации σ^2, каждый элемент которой равен $\sigma_{ij} = Cov(\xi_i, \xi_j)$ В частности, $\sigma_{ij} = \sigma^2$.

Допустим, что некоторый инвестор, имеющий капитал W, желает весь его инвестировать в данные акции с целью получения дохода через единицу времени. Допустим, что z_i – число акций типа i, купленных в начальный период. Тогда

$$W = \sum_{i=1}^{N} z_i S_i\ .$$

Обозначим через $\alpha_i = \dfrac{z_i S_i}{W}$ долю инвестиций в акции i. Набор действительных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, принято называть *портфелем (portfolio)* инвестиций.

Рассчитаем теперь случайную величину $\xi_\alpha(\omega)$ доходности портфеля α:

$$\xi_\alpha(\omega) = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i D_i(\omega) - W}{W} = \sum_{i=1}^{N} \frac{z_i D_i(\omega)}{W} - 1 =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{z_i S_i}{W}\left(\frac{D_i(\omega)}{S_i} - 1\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i(\omega)\ .$$

Тогда ожидаемая доходность портфеля и его дисперсия находятся по формулам:

$$r_\alpha = M\xi_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i r_i\ ; \tag{2.14}$$

$$\sigma_\alpha^2 = D\xi_\alpha = Cov\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i, \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \xi_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}\ . \tag{2.15}$$

Напомним, что под задачей Марковица понимается определение оптимального портфеля α, минимизирующего дисперсию $\sigma_\alpha^{\ 2}$, среди всех допустимых портфелей α, ожидаемая доходность которых r_α не меньше заданного уровня доходности r_0. Формально задача Марковица имеет следующий вид:

$$\sigma_\alpha^{\ 2} \to min;$$

$$r_\alpha \ge r_0.$$

Воспользовавшись формулами (2.14)-(2.15), окончательно находим, что задача Марковица есть следующая задача оптимизации квадратичной формы с двумя условиями:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} \to min;$$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_i = 1;$$

$$\sum_{j=1}^{N} r_i \alpha_i \ge r_0.$$

Так как матрица ковариации $\sigma^{\ 2}$, задающая квадратичную форму, является всегда неотрицательно определенной, данная задача имеет решение при любых допустимых значениях r_0. В этом и состоит удобство оценки риска с помощью дисперсии. Более того, задача Марковица не требует никаких предположений о распределении случайных величин – дивидендов, получаемых по каждой акции. Достаточно знать ожидаемые доходности и ковариацию этих случайных величин. Это означает, что для исследователя достаточно построить статистически значимые оценки моментов первого и второго порядков.

Такой подход к оценке риска инвестиционного портфеля видится очевидным, если предположить, что случайный вектор ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$), доходностей имеет гауссовское распределение. В этом случае случайная величина ξ_α как линейная комбинация координат гауссовского вектора будет иметь Гауссовское распределение с параметрами $(r_\alpha, \sigma_\alpha)$. Поэтому при условии $r_\alpha \ge r_0 > 0$ вероятность риска получить убыток $P\{\xi_\alpha < 0\}$ будет снижаться при уменьшении дисперсии $\sigma_\alpha^{\ 2}$.

2.5. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ФИНАНСОВОГО ИНСТРУМЕНТА

Наиболее понятной для инвестора моделью оценки финансового риска является метод эквивалентного финансового инструмента. Суть этого метода состоит в том, что если некоторая финансовая стратегия (финансовый инструмент) полностью страхует от риска, то приведенная стоимость текущих затрат по обслуживанию стратегии и есть цена риска, которую необходимо вычислить. Более того, если сам инструмент торгуется на соответствующем рынке, то его рыночная цена определяет рыночную меру того финансового риска, который страхуется данным финансовым инструментом.

Наиболее полно такая теория получила применение на рынке опционов. Так, например, пут-опцион со временем исполнения T и ценой исполнения X на некоторую акцию полностью страхует обладателя такой акцией от риска, состоящего в том, что цена акции S_T в момент времени T будет меньше благоприятного для инвестора уровня X. Поэтому рациональная цена пут-опциона P_T оценивает риск, который она страхует.

Таблица 2.2.

ТИПИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ВЫПЛАТ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ФИНАНСОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

Название финансового инструмента	Вид функции выплат
Стандартный колл-опцон	$f(t,S) = max\{0, S - X\}$
Стандартный пут-опцион	$f(t,S) = max\{0, X - S\}$
Опцион коллар	$f(t,S) = min\{max[X_1, S], X_2\}$
Бостонский опцион	$f(t,S) = max\{0, S - X_1\} - (X_2 - X_1)$
Азиатский колл-опцион	$f(t,S) = max\{0, S_t - \frac{1}{t}\int_0^t S_u du\}$
Азиатский пут-опцион	$f(t,S) = max\{0, \frac{1}{t}\int_0^t S_u du - S_t\}$
Русский колл-опцион	$f(t,S) = max\{0, S_t - \min_{u \le t} S_u\}$
Русский пут-опцион	$f(t,S) = max\{0, \max_{u \le t} S_u - S_t\}$

Математически этот метод может быть формализован следующим образом. Допустим, что финансовый инструмент полностью устраняет финансовый риск, связанный с изменением цены базового актива S_t во времени. Тогда задана функция $f(t,S)$ выплат, зависящая от времени выплаты t и цены базового актива S. Предположим, что выплаты по финансовому инструменту производятся в некоторые моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_k$,. В этом случае платежный поток определяется суммами $f(t_1, S_{t_1}), f(t_2, S_{t_2}), \dots, f(t_k, S_{t_k})$. С учетом дисконтирования получаем, что приведенная ценность данного потока на настоящий момент времени будет равна

$$V = \sum_{i=1}^{k} f(t_i, S_{t_i}) e^{-\mu t_i}, \qquad (2.16)$$

где μ обозначает непрерывно начисляемую процентную ставку. Так как S_t образует случайный процесс, приведенная ценность V является случайной величиной. Тогда рациональная цена финансового инструмента, определяемая как математическое ожидание случайной величины V, и есть оценка финансового риска:

$$P = M[V] = \sum_{i=1}^{k} M[f(t_i, S_{t_i})] e^{-\mu t_i}. \qquad (2.17)$$

Допустим, например, нам необходимо застраховаться от изменения цены акции таким образом, чтобы в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_k$ цена не падала ниже заданных уровней $X_1, X_2, \dots, X_k$. Тогда в качестве функции платежа удобно выбрать следующую функцию:

$$f(t_i, S) = max\{0, X_i - S\}, \ i = 1, \dots, k.$$

Эта функция соответствует опциону пут со временем исполнения t_i и ценой исполнения X_i. Другими словами, портфель из k пут-опционов страхует от заданного риска изменения цены. Тогда его цена определяется по формуле:

$$P = \sum_{i=1}^{k} M[max\{0, X_i - S_{t_i}\}]e^{-\mu t_i}. \qquad (2.18)$$

В частности, если $k = 1$ и $t_1 = T$, получим оценку рациональной цены пут-опциона:

$$P_T = M[max\{0, X_i - S_T\}]e^{-\mu T}. \qquad (2.19)$$

Некоторые типичные случаи функций $f(t,S)$ и связанные с ними названия финансовых инструментов приведены в табл. 2.2.

Можно заметить, что расчет цены опционов или их портфелей во многом зависит от того, каким образом смоделирован случайный процесс эволюции цены. В следующем разделе рассмотрены основные динамические модели эволюции цены акций, применяемые в стохастической финансовой математике.

3. Математические модели управления финансовым риском

3.1. МОДЕЛИ ЭВОЛЮЦИИ ЦЕНЫ АКЦИИ

Если взглянуть на графики цен акций, то нетрудно заметить, что их поведение носит хаотический характер. Поэтому значение цены акции S_T в момент времени T принято считать случайной величиной. Если к тому же рассмотреть эволюцию цены акции во времени S_t, $t \in [0,T]$, то она определяет некоторый случайный процесс. Математическим моделям процесса изменения цен акций посвящен настоящий параграф.

В начале рассмотрим простейшую модель эволюции цены конкретной акции, когда рассматриваются цены только в начале и в конце периода. При этом предполагается, что цена акции может только либо вырасти с коэффициентом u, либо упасть с коэффициентом d. Если обозначить через S цену акции в начале периода, то цена акции S_1 в конце единичного периода равна либо Su, либо Sd. Пусть $r = 1 + r_f$ – коэффициент роста при инвестировании в безрисковый актив под эффективный процент r_f

Чтобы исключить возможность арбитража, будем предполагать, что

$$d < 1 < r < u. \qquad (3.1)$$

Действительно, если $r > u$, то можно продать акции, потом инвестировать вырученную сумму под безрисковый процент, а в конце периода на накопленные деньги купить акции, получив при этом чистую прибыль. С другой стороны, если $d > r$, то, наоборот, появляется возможность занять деньги под безрисковый процент, на них купить акции, продать их в конце периода, вернуть взятые в долг деньги и после всех этих операций получить прибыль без риска.

Обозначим через p вероятность того, что цена изменится вверх. Тогда $1 - p$ – вероятность того, что цена пойдет вниз:

$$P\{S_1 = Su\} = p, \quad P\{S_1 = Sd\} = 1 - p.$$

Дерево эволюции цены акции в этом случае показано на рис. 3.1.

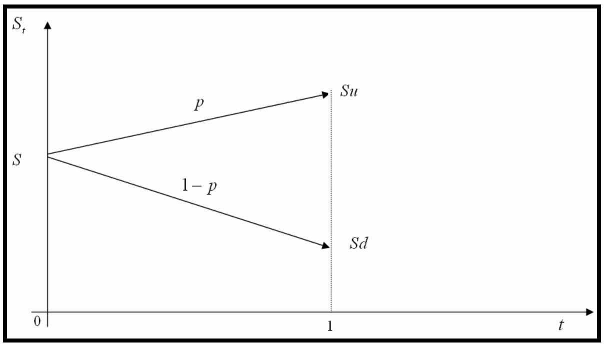

Рис. 3.1. Дерево эволюции цены акции для одного периода

Предположим, что выполнена гипотеза о нейтральности к риску инвесторов при заданном текущем значении цены S и возможных будущих ценах Su и Sd с учетом безрискового коэффициента r. То есть инвестор не переплачивает за риск, связанный с приобретением данной акции. Тогда покупка акции по цене S является эквивалентной операцией инвестированию суммы S в безрисковый актив. Это означает, что выполнено равенство:

$$S = \frac{\mathrm{M}S_1}{r}$$

или

$$S = \frac{Su \cdot p + Sd \cdot (1 - p)}{r}.$$

После простых преобразований, сократив на величину $S > 0$, отсюда получаем, что $r = up + d(1 - p)$ Выражая p из этого равенства, окончательно находим, что вероятности p и $(1 - p)$ равны:

$$p = \frac{r - d}{u - d}, \quad 1 - p = \frac{u - r}{u - d}.$$

Заметим, что условия отсутствия арбитража (3.1) обеспечивают положительность выписанных величин. Таким образом, определенные вероятности принято называть *нейтральными к риску* вероятностями.

Пусть ξ_1 – случайная величина, являющаяся индикатором события, состоящего в том, что цена акции выросла. Другими словами, $\xi_1 = 1$, если цена выросла, и $\xi_1 = 0$, если цена упала. Такая случайная величина имеет бернуллиевское распределение: с вероятностью p она принимает значение 1 и с вероятностью $(1 - p)$ – значение 0. Нетрудно убедиться, что случайная величина S_1 выражается через ξ_1 следующим образом:

$$S_1 = S u^{\xi_1} d^{1-\xi_1}.$$

Прологарифмировав данное равенство, находим, что

$$\ln\frac{S_1}{S} = \xi_1 \ln u + (1 - \xi_1)\ln d = \xi_1 \cdot \ln\frac{u}{d} + \ln d.$$

В итоге получаем, что логарифм отношения цены акции в конце периода к цене акции в его начале есть линейная функция от бернуллиевской случайной величины с параметром p.

Рассмотрим теперь несколько периодов единичной длины. Пусть в течение каждого периода цена акции либо возрастает в u раз с вероятностью p, либо уменьшается с коэффициентом d с вероятностью $(1-p)$. Предположим также, что изменение в каждом периоде происходит независимо от изменений происходящих в других периодах.

Обозначим через S_i цену акции в конце i-того периода. Пусть ξ_i – индикатор случайного события, состоящего в том, что цена выросла в течение i-того периода, $i=1,\dots,n$. Тогда аналогично предыдущим рассуждениям нетрудно получить, что

$$S_i = S_{i-1}u^{\xi_i}d^{1-\xi_i}$$

и

$$ln\frac{S_i}{S} = \xi_i \cdot ln\frac{u}{d} + ln\,d\,l\,.$$

Полагая значение текущей цены акции неслучайной величиной, равной $S_0 = S$, из полученных формул находим, что

$$S_n = S_{n-1}u^{\xi_n}d^{1-\xi_n} = S_{n-2}(u^{\xi_{n-1}}d^{1-\xi_{n-1}})u^{\xi_n}d^{1-\xi_n}$$
$$= \dots = S_0\prod_{i=1}^{n}(u^{\xi_i}d^{1-\xi_i}) = Su^{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}d^{\sum_{i=1}^{n}(1-\xi_i)}.$$

Обозначим через ν_n число единичных периодов до момента времени n, в которых цена двигалась вверх. Тогда $(n-\nu_n)$ будет числом единичных периодов до момента времени n, в которых цена двигалась вниз. Случайная величина ν_n представима в виде суммы бернуллиевских случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_n$:

$$\nu_n = \sum_{i=1}^{n}\xi_i, \quad n-\nu_n = \sum_{i=1}^{n}(1-\xi_i).$$

В итоге получаем, что

$$S_n = Su^{\nu_n}d^{n-\nu_n} \qquad (3.2)$$

Так как случайная величина ν_n принимает целые значения от 0 до n, то возможные значения цены акции в конце n-го периода равны $Su^k d^{n-k}$, где $k=0,\dots,n$.

Чтобы получить вероятностное распределение случайной величины S_n, обратимся к классической модели теории вероятностей, именуемой схемой Бернулли. Представим себе, что каждый рассматриваемый единичный промежуток времени есть эксперимент, «успехом» которого является движение цены вверх, а «неуспехом» – движение цены вниз. Тогда мы имеем n независимых экспериментов с вероятностью «успеха», равной p. Введенная случайная величина ν_n будет числом «успехов» в схеме Бернулли с заданными параметрами. Согласно теории вероятностей такая случайная величина имеет биномиальное распределение:

$$P\{\nu_n = k\} = C_n^k \cdot p^k(1-p)^{n-k},$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ – биномиальные коэффициенты, $k=0,1,\dots,n$.

Из формулы (3.2) отсюда вытекает, что

$$P\{S_n = Su^k d^{n-k}\} = C_n^k \cdot p^k(1-p)^{n-k}. \qquad (3.3)$$

Найдем математическое ожидание случайной величины S_n:

$$\mathrm{M}S_n = \sum_{k=0}^{n} Su^k d^{n-k}C_n^k \cdot p^k(1-p)^{n-k} =$$
$$= S\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (up)^k(d(1-p))^{n-k}.$$

Воспользуемся формулой бинома Ньютона и получим

$$\mathrm{M}S_n = S(up + d(1-p))^n.$$

Но в силу нейтральности к риску заданной вероятности p из равенства следует, что

$$ES_n = Sr^n = S(1+r_f)^n.$$

Таким образом, вероятность p соотносится с величинами u, d и r так, что ожидаемая величина цены акции в момент времени n равна инвестиции в безрисковый актив. Это еще раз подтверждает ее название нейтральной к риску вероятности.

Прологарифмируем теперь равенство (3.2):

$$ln\frac{S_n}{S} = \nu_n\, ln\,u + (n-\nu_n)\,ln\,d = \nu_n\, ln\frac{u}{d} + n\,ln\,d. \qquad (3.4)$$

Из курса классической теории вероятностей известно, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p, равны $\mathrm{M}\nu_n = np$ и $\mathrm{D}\nu_n = np(1-p)$. Поэтому из свойств математического ожидания и дисперсии вытекает, что

$$\mathrm{M}ln\frac{S_n}{S} = np\,ln\frac{u}{d} + n\,ln\,d, \quad \mathrm{D}ln\frac{S_n}{S} = np(1-p)\cdot\left(ln\frac{u}{d}\right)^2.$$

Рассмотрим теперь некоторый уровень возможных значений цены акции X. При расчете цены пут-опциона очень важной величиной является вероятность того, что в момент времени n цена акции не превосходит заданный уровень X: $\mathrm{P}\{S_n \le X\}$. Так как условие $S_n \le X$ эквивалентно неравенству $ln\frac{S_n}{S} \le ln\frac{X}{S}$, из формулы (3.4) и положительности величины $ln\,u/d$ (в силу $u > d$) следует, что

$$\mathrm{P}\{S_n \le X\} = \mathrm{P}\left\{\nu_n\, ln\frac{u}{d} + n\,ln\,d \le ln\frac{X}{S}\right\} = \mathrm{P}\{\nu_n \le x\},$$

где

$$x = \frac{ln(X/S) - n\,ln\,d}{ln(u/d)}. \qquad (3.5)$$

Обозначим через $B(x,n,p)$ функцию биномиального распределения с параметрами n и p. По определению эта величина равна вероятности того, что число «успехов» в схеме Бернулли не превзойдет x. Следовательно,

$$B(x,n,p) = P\{\nu_n \le x\} = \sum_{k=0}^{[x]} C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

где $[x]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x. Тогда искомая вероятность $\mathrm{P}\{S_n \le X\}$ находится по формуле:

$$\mathrm{P}\{S_n \le X\} = B(x,n,p), \qquad (3.6)$$

здесь x удовлетворяет (3.5).

Построенная таким образом биномиальная модель эволюции цены акции является вполне удобной, если число рассматриваемых периодов достаточно мало.

Например, ее применение обосновано в том случае, если мы рассматриваем ежедневные изменения цены, а нас интересует окончательная цена по итогам месяца. Тогда число рабочих дней биржи в месяце – это и есть число периодов модели. В этом случае n чуть больше 20 и нетрудно посчитать распределение случайной величины S_n. Если же нас будет интересовать цена в конце года, когда $n = 250$, то построить точное ее вероятностное распределение весьма проблематично даже с помощью компьютера. В этом случае принято пользоваться гауссовскими приближениями вероятностей на основе центральной предельной теоремы.

Пусть мы исследуем распределение случайной величины S_T – значения цены акции в момент времени T. Допустим, что мы знаем численную оценку параметров a и σ^2 заданного распределения:

$$a = \frac{1}{T}\mathrm{M}\left[\ln\frac{S_T}{S}\right], \quad \sigma^2 = \frac{1}{T}\mathrm{D}\left[\ln\frac{S_T}{S}\right].$$

Вернемся к введенной в начале параграфа биномиальной модели эволюции цен акции $S_0 = S$, $S_{T/n}$, $S_{2T/n}$, …, $S_{nT/n}$. Тогда согласно формуле (3.6), зная параметры биномиальной модели u, d, p и n, нетрудно построить распределение цены акции в момент времени T. Возникает простая проблема, каким образом выписанные параметры модели должны зависеть от вычисленных характеристик a и σ^2. Это можно понять на следующем примере.

Допустим, у нас задан временной ряд дневных цен закрытия (цен последних сделок купли-продажи) некоторой акции на бирже. По этим статистическим данным нетрудно получить значимые оценки логарифмической средней a и волатильности данной бумаги σ^2. Нас интересует распределение цены закрытия следующего дня, заданное с помощи биномиальной модели эволюции цены в течение биржевого дня. В этом случае биржевой день необходимо разбить на равные промежутки времени, например, на пятиминутки, и считать, что в каждом промежутке времени цена заданного актива либо возрастает в u раз с вероятностью p, либо уменьшается с коэффициентом d с вероятностью $1-p$. Для разбиения на пятиминутки, полагая длительность биржевой сессии, равной 8 часам, получаем разбиение дня на 96 равных промежутков (то есть $n = 96$). В этом случае выбор коэффициентов u и d обычно основан на свойстве автомодельности (самоподобия) стандартного броуновского движения w_t. Суть этого свойства состоит в следующем. Для любого коэффициента масштабирования времени $\delta > 0$ для любого $t > 0$ случайные величины $w_{\delta t}$ и $\sqrt{\delta}\cdot w_t$ имеют одинаковое гауссовское распределение с нулевым средним и средним квадратическим отклонением $\sqrt{\delta t}$. Другими словами, если в качестве единицы времени мы выбрали день, то переходя к новому временному интервалу – часу (масштаб времени при этом увеличивается в восемь раз), масштаб значений необходимо увеличивать в $\sqrt{8}$ раз.

Действительно, на практике в качестве единицы времени можно выбирать различные промежутки: минута, пять минут, полчаса, час, день, неделя, месяц, год. Понятно, что для каждого промежутка изменения цен вверх и вниз должны каким-то образом зависеть от длины промежутка. Было бы неправильно рассматривать изменения порядка десятков процентов, взяв за промежуток времени одну минуту или даже один день. Такого рода изменения требуют длительной торговли на рынке. С другой стороны, коэффициенты изменения u и d не могут быть одинаковыми для различных акций. Есть акции, цены на которые изменяются с большой скоростью и большим размахом, есть акции с более устойчивыми изменениями цен. Таким образом, возникает вопрос об оценке изменчивости цен той или иной акции. Таким параметром как раз является волатильность акции σ^2. Дадим удобное на практике (и поэтому общепринятое) определение зависимости коэффициентов u и d от него.

Допустим, что

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right), \quad d \quad \exp\left(-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right).$$

Для этой модели безрисковый коэффициент роста r за один промежуток удобнее выражать, пользуясь непрерывно начисляемой процентной ставкой μ. По определению непрерывно начисляемой процентной ставки за время T/n безрисковый актив увеличивается в $\exp(\mu T/n)$ раз. Следовательно,

$$r = \exp\left(\mu\frac{T}{n}\right).$$

Вероятности p и $1-p$ в этом случае вычисляются как нейтральные к риску:

$$p = \frac{r-d}{u-d}, \quad 1-p = \frac{u-r}{u-d}.$$

На практике обычно пользуются более удобными формулами для p и $1-p$.

Выведим их. Для этого воспользуемся разложением в ряд Тейлора экспоненты:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t) \quad \text{при } t \to 0. \text{ Тогда при}$$
$$n \to +\infty$$

$$\begin{aligned} u &= \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right) \quad 1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ d &= \exp\left(-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right) \quad 1 - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Следовательно,

$$u - d \quad 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.8}$$

С другой стороны, при $n \to \infty$

$$r = \exp\left(\mu\frac{T}{n}\right) \quad 1 + \mu\frac{T}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда из (3.7) вытекает, что

$$r - d \quad \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$u - r \quad \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - \mu\right)\frac{T}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поделив полученное предельное соотношение на (3.8), находим, что при $n \to \infty$ нейтральные к риску вероятности аппроксимируются с помощью формул:

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{\frac{T}{n}}\right),$$

$$1 - p = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{\frac{T}{n}}\right). \qquad (3.9)$$

Построенная модель дает возможность оценивать вероятностные характеристики случайной величины S_T. Например, для заданного уровня рискового капитала X из формулы (3.6) получаем, что вероятность риска равна $P\{S_T \le X\} = B(x,n,p)$, где x определяется согласно (3.5). По определению величин u и d находим, что $ln\left(\frac{u}{d}\right) = 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}$. А значит,

$$x = \frac{ln(X/S) - n\,ln\,d}{ln(u/d)} =$$

$$= \frac{ln(X/S) + \sigma\sqrt{Tn}}{2\sigma\sqrt{T/n}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sigma\sqrt{T}} ln\left(\frac{X}{S}\right) + \frac{n}{2}. \qquad (3.10)$$

Последняя формула вместе со значением вероятности p позволяет вычислять вероятность риска $P\{S_T \le X\}$.

Устремляя n в $+\infty$, биномиальная модель переходит в логнормальную модель. Чтобы это увидеть, необходимо воспользоваться центральной предельной теоремой. Не углубляясь в достаточно серьезные математические рассуждения, сформулируем частный случай центральной предельной теоремы, широко известный в теории вероятностей как теорема Муавра-Лапласа и применяемый для схемы Бернулли. Допустим, что мы проводим n независимых экспериментов, каждый из которых с вероятностью p заканчивается «успехом» и с вероятностью $1-p$ заканчивается «неуспехом». Тогда, как и ранее число успешных экспериментов ν_n имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Теорема Муавра-Лапласа утверждает, что для любого действительного числа y имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\nu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le y\right\} = \Phi(y),$$

где $\Phi(y)$ – функция Лапласа. В силу свойств гауссовского распределения теорему Муавра-Лапласа можно интерпретировать следующим образом: при достаточно больших n случайная величина ν_n имеет распределение, близкое к гауссовскому с параметрами np и $\sqrt{np(1-p)}$. Это означает, что

$$B(x,n,p) = P\{\nu_n \le x\} \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Полученная формула дает возможность оценивать вероятности биномиальных распределений с помощью функции Лапласа. В частности, вероятность риска может быть оценена по следующей формуле:

$$P\{S_T \le X\} = P\{\nu_n \le x\} \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \qquad (3.11)$$

Из формул (3.9) и (3.10) нетрудно получить, что

$$x - np \approx \frac{\sqrt{n}}{2\sigma\sqrt{T}} ln\left(\frac{X}{S}\right) + \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\left(1 + \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{\frac{T}{n}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{2}\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(ln\left(\frac{X}{S}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right),$$

$$np(1-p) = \frac{n}{4} - \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)^2 \frac{T}{4}.$$

Отсюда получаем, что при $n \to \infty$ $\sqrt{np(1-p)} \sim \frac{\sqrt{n}}{2}$. Тогда

$$\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} \to z = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(ln\left(\frac{X}{S}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right).$$

Преобразуя полученное значение z, в итоге имеем известную формулу:

$$z = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} ln\left(\frac{Xe^{-\mu T}}{S}\right) + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}. \qquad (3.12)$$

Таким образом, предельное соотношение дает нам следующую оценку вероятности риска $P\{S_T \le X\}$:

$$P\{S_T \le X\} = \lim_{n\to\infty} B(x,n,p) = \Phi(z).$$

Рассмотрим некоторый промежуток времени $[0,T]$. Пусть S_t – цена некоторой акции в момент времени t ($0 \le t \le T$). Разбивая заданный промежуток времени на n равных частей, нетрудно получить, что

$$ln\frac{S_T}{S} = \nu_n\, ln\frac{u}{d} + n\, ln\, d.$$

Так как при больших n распределение ν_n аппроксимируется гауссовским, а распределение $ln(S_T/S)$ не зависит от n, можно предположить, что $ln(S_T/S)$ есть гауссовская случайная величина с некоторыми параметрами a_T и σ_T. Это значит, что для некоторой стандартной гауссовской случайной величины η (возможно зависящей от T)

$$\xi_T = ln\frac{S_T}{S} = a_T + \sigma_T \cdot \eta.$$

Рассмотрим зависимость числовых характеристик a_t и σ_t от временного параметра t. Конечно, в общем виде для сложных математических моделей, данная зависимость может быть достаточно не простой. Однако, предположим, что случайный процесс ξ_t обладает свойствами однородности и независимости приращений. Первое свойство означает, что для произвольных t и s ($0 < t < t + s \le T$) приращение $\xi_{t+s} - \xi_t$ имеет такое же распределение, как и ξ_s. Это оправдано тем, что логарифмические изменения цен акций в промежутки времени одинаковой длины должны быть статистически равноценны. Под вторым свойством понимается тот факт, что изменения цены в каждом отдельном промежутке времени должны быть независимыми друг от друга. Поэтому приращение $\xi_{t+s} - \xi_t$ не зависит от случайной величины ξ_t. Так как дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий, из предполагаемых свойств заданного случайного процесса вытекает, что

$$a_{t+s} = a_t + a_s ,= \sigma^2_{t+s} \quad \sigma^2_t + \sigma^2_s .$$

Следовательно, a_t и σ_t^2 – линейные функции от t. С учетом, что $a_0 = \sigma_0 = 0$, это означает, что $a_t = at$, $\sigma_t^2 = \sigma^2 t$ для некоторых контстант a и $\sigma > 0$. Построенный случайный процесс ξ_t, $t \in [0, +\infty)$, принято называть *броуновским движением*. Точное его определение основано на том, что для любых $t > 0$ и $s > 0$ приращение $\xi_{t+s} - \xi_t$ не зависит от значений случайного процесса до момента времени t и имеет гауссовское распределение с параметрами as и $\sigma\sqrt{s}$. Параметры a и σ^2 броуновского движения принято называть *коэффициентами линейного сноса и диффузии*. В финансовой литературе σ^2 часто называют *волатильностью*. Соответственно, случайный процесс $S_t = S \cdot \exp\left(at + \sigma w_t\right)$ называется *геометрическим (экономическим) броуновским движением* с параметрами a и σ^2.

Одним из важных выводов геометрического броуновского движения является то, что отношение будущей цены S_T к настоящей цене S есть случайная величина, имеющая логнормальное распределение с параметрами aT и $\sigma\sqrt{T}$:

$$\frac{S_T}{S} = \exp\left(aT + \sigma\sqrt{T} \cdot \eta\right), \qquad (3.13)$$

где η – стандартная гауссовская случайная величина. Поэтому такая модель называется логнормальной моделью эволюции цены акции.

Допустим теперь, что накопления безрискового актива растут на основе непрерывно начисляемого процента μ. Тогда капитал, инвестированный в безрисковый актив в размере S, в момент времени T будет равен $S\exp(\mu T)$. В предположении о нейтральности к риску заданной модели имеем, что ожидаемая цена акции в момент времени должна совпадать с величиной соответствующего безрискового актива:

$$\mathrm{M} S_T = S\exp(\mu T).$$

Но из формулы математического ожидания логнормального распределения следует, что

$$\mathrm{M}\left[\frac{S_T}{S}\right] = \exp\left(aT + \frac{\sigma^2 T}{2}\right).$$

Из полученных двух равенств, сократив на S и T, нетрудно вывести, что $\mu = a + \sigma^2/2$. Подставляя полученное в формулу (3.13), окончательно находим вид случайной величины S_T в логнормальной модели:

$$S_T = S \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T} \cdot \eta\right). \qquad (3.14)$$

3.2. РАСЧЕТЫ ЦЕН ПУТ-ОПЦИОНОВ

Построенные в предыдущем параграфе математические модели эволюции цены акции, позволяют оценивать финансовые риски, связанные с падением цены, рассчитывая оптимальную цену пут-опциона, приобретение которого полностью ликвидирует данный риск. Чтобы сделать это, рассмотрим пут-опцион европейского типа на данную акцию с ценой исполнения X и моментом исполнения T. Как уже было показано в предыдущей главе, случайная величина выплат по пут-опциону в момент его исполнения зависит от цены S базового актива по следующему правилу:

$$f(T, S) = \max\{0, X - S\}.$$

Тогда справедливой ценой опциона будет математическое ожидание случайной величины $f(T, S_T)$, дисконтированное безрисковым процентом. Если распределение цены акции S_T определяется биномиальной моделью эволюции с заданными параметрами u, d, r и n, то искомая цена равна

$$P^{(1)} = \frac{\mathrm{M}\left[\max\{0, X - S_T\}\right]}{r^n}.$$

В силу формулы (3.3) полученное равенство легко преобразуется в следующем виде:

$$C = \frac{1}{r^n}\sum_{j=0}^{n} C_n^j \cdot p^j (1-p)^{n-j} \max\left\{0, X - Su^j d^{n-j}\right\}. \quad (3.15)$$

Пусть m – наибольшее целое значение, при котором $Su^m d^{n-m} \le X$. Прологарифмировав это неравенство после простейших преобразований, находим, что $m = [x]$, где $[x]$ удовлетворяет (3.5). Так как m выбирается, как максимальный номер j, для которого $\max\left\{0, X - Su^j d^{n-j}\right\} > 0$, формулу (3.15) можно переписать следующим образом:

$$P^{(1)} = \frac{1}{r^n}\sum_{j=0}^{m} C_n^j \cdot p^j (1-p)^{n-j}\left[X - Su^j d^{n-j}\right] =$$

$$= Xr^{-n}\sum_{j=0}^{m} C_n^j \cdot p^j (1-p)^{n-j} -$$

$$-Sr^{-n}\sum_{j=0}^{m} C_n^j \cdot p^j (1-p)^{n-j} u^j d^{n-j}.$$

Преобразуем полученное выражение в удобном виде:

$$P^{(1)} = Xr^{-n}\sum_{j=0}^{m} C_n^j \cdot p^j (1-p)^{n-j} -$$

$$-S\sum_{j=0}^{m} C_n^j \cdot \left(p\frac{u}{r}\right)^j \left((1-p)\frac{d}{r}\right)^{n-j}.$$

Обозначим $q = p\frac{u}{r}$. Тогда в силу того, что

$$p = \frac{r-d}{u-d}, \quad 1-p = \frac{u-r}{u-d},$$

нетрудно убедиться, что

$$1-q \quad 1-p\frac{u}{r} = \quad 1 - \frac{ur-ud}{ur-dr} =$$

$$= \frac{ud-dr}{ur-dr} = \quad \frac{u-r}{u-d}\frac{d}{r} \quad (1-p)\frac{d}{r}.$$

В итоге получаем

$$P^{(1)} = Xr^{-n}\sum_{j=0}^{m} C_n^j \cdot p^j (1-p)^{n-j} -$$

$$-S\sum_{j=0}^{m} C_n^j \cdot q^j (1-q)^{n-j}.$$

Теперь воспользуемся обозначением функции биномиального распределения $B(x, n, p)$ с параметрами n и p, чтобы окончательно получить

$$P^{(1)} = Xr^{-n} \cdot B(x,n,p) - S \cdot B(x,n,q). \qquad (3.16)$$

Полученная формула есть обобщение метода нейтральных к риску вероятностей на многопериодный пут-опцион в рамках построенной биномиальной модели оценки стоимости опционов.

Заданная методика определения рациональной стоимости риска падения цены на основе биномиальной модели эволюции цены акции является вполне удобной, если число рассматриваемых периодов достаточно мало. Как уже было замечено в предыдущей главе, в случае большого числа периодов принято пользоваться гауссовскими приближениями вероятностей на основе центральной предельной теоремы. В этом случае биномиальная модель эволюции цен рискового актива должна быть заменена на логнормальную модель, предполагая, что цена акции S_t является геометрическим броуновским движением с параметрами a и σ^2.

На практике часто пользуются более удобной формулой рациональной цены пут-опциона европейского типа, основанной на построении модели оценки стоимости опционов, которую принято называть *моделью Блэка-Шоулса* в честь ее создателей. Чтобы получить эту формулу, нам необходимо совершить предельный переход от дискретной биномиальной модели к непрерывной модели, сохраняя при этом все предположения относительно изменений цены акции. Суть этого перехода состоит в следующем.

Пусть нам необходимо определить текущую стоимость пут-опциона европейского типа на некоторую акцию со временем погашения T. Будем предполагать, что мы знаем численную оценку логарифмических средней a и волатильности σ^2 динамики цен данной акции:

$$a = \frac{1}{T}\mathrm{M}\left[ln\frac{S_T}{S}\right], \quad \sigma^2 = \frac{1}{T}\mathrm{D}\left[ln\frac{S_T}{S}\right]. \qquad (3.17)$$

Разделим интервал времени между настоящим моментом и моментом T на n одинаковых промежутков. В рамках биномиальной модели будем считать, что в каждом промежутке времени безрисковый актив увеличивает инвестиции в него в r раз, а цена заданного рискованного актива либо возрастает в u раз с вероятностью p, либо уменьшается с коэффициентом d с вероятностью $1-p$. При этом хотелось бы подобрать значения r, u и d, а вместе с ними и нейтральную к риску вероятность p так, чтобы при предельном переходе $n \to \infty$ выполнялись соотношения (3.17). Такой выбор с его логическим обоснованием уже делался в предыдущем параграфе. Согласно приведенным там рассуждениям безрисковый коэффициент роста r за один промежуток времени удобно выразить через непрерывно начисляемую процентную ставку μ:

$$r = exp\left(\mu\frac{T}{n}\right),$$

где $\mu = a + \sigma^2/2$. С другой стороны, зная волатильность σ^2, коэффициенты u и d удобно находить по следующему правилу:

$$u = exp\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right), \quad d \quad exp\left(-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right). \qquad (3.18)$$

Как было установлено, условие нейтральности к риску вероятностей p и $1-p$ дает возможность аппроксимировать их по формулам:

$$p \approx \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right), \quad 1-p \approx \frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right). \qquad (3.19)$$

Покажем теперь, что параметры биномиальной модели заданы таким образом, чтобы при $n \to \infty$ имели место равенства (3.17). Пусть за n шагов было ν_n увеличений. Тогда

$$ln\left(\frac{S_T}{S}\right) = \nu_n\, ln\left(\frac{u}{d}\right) + n\, ln\, d.$$

В силу свойств математического ожидания и дисперсии отсюда вытекает, что

$$\mathrm{M}\left[ln\left(\frac{S_T}{S}\right)\right] = \mathrm{M}[\nu_n]\cdot ln\left(\frac{u}{d}\right) + n\, ln\, d,$$

$$\mathrm{D}\left[ln\left(\frac{S_T}{S}\right)\right] = \mathrm{D}[\nu_n]\cdot\left[ln\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2.$$

Так как ν_n имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, то $\mathrm{M}[\nu_n] = np$ и $\mathrm{D}[\nu_n] = np(1-p)$. Это означает, что математическое ожидание и дисперсия логарифмического роста цены акции равны

$$\mathrm{M}\left[ln\left(\frac{S_T}{S}\right)\right] = np\cdot ln\left(\frac{u}{d}\right) + n\, ln\, d,$$

$$\mathrm{D}\left[ln\left(\frac{S_T}{S}\right)\right] = np(1-p)\cdot\left[ln\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2.$$

Подставляя (3.18)-(3.19) в полученные формулы, находим, что с одной стороны,

$$\mathrm{M}\left[ln\left(\frac{S_T}{S}\right)\right] \approx n\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\cdot 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} - n\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} =$$

$$= n\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + na\frac{T}{n} - n\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} = aT.$$

С другой стороны,

$$\mathrm{D}\left[ln\left(\frac{S_T}{S}\right)\right] \approx$$

$$\approx n\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\cdot\left[2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right]^2 =$$

$$= \frac{n}{4}\left(1-\left(\frac{a}{\sigma}\right)^2 \frac{T}{n}\right)4\sigma^2\frac{T}{n} \quad \sigma^2 T - \frac{a^2T^2}{n}.$$

Устремляя n к бесконечности, в итоге имеем, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{M}\left[ln\frac{S_T}{S}\right] = aT, \quad \lim_{n\to\infty}\mathrm{D}\left[ln\frac{S_T}{S}\right] = \sigma^2 T.$$

Осталось поделить на T правые и левые части полученных равенств, чтобы убедиться, что параметры r, u и d выбраны надлежащим образом.

Вернемся к первоначальной задаче определения цены пут-опциона европейского типа на некоторую акцию, текущая цена которой равна S. Пусть T – время исполнения, а X – цена исполнения заданного опциона. По известным значениям логарифмических средней a и волатильности σ^2 динамики цен данной акции (3.17) мы хотим определить рыночную цену риска, состоящего в том, что стоимость акции в момент времени T упадет ниже заданного уровня X. Первое решение этой задачи основано на построении биномиальной модели эволюции цены акции. Для этого необходимо выбрать подходящее n – число периодов, на которые мы поделим интервал времени между настоящим моментом и моментом погашения опциона. Остальные параметры биномиальной модели определяются по формулам (3.18)-(3.19), что дает возможность применения формулы (3.16) для вычисления цены опциона. В итоге получаем, что в рамках уточненной биномиальной модели цена риска определяется формулой:

$$P^{(2)} = Xe^{-\mu T} \cdot B(y,n,p) - S \cdot B(y,n,q), \qquad (3.20)$$

где

$$q = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{\mu}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{\frac{T}{n}}\right).$$

Так как формула цены пут-опциона использует только вероятности биномиального распределения, из нее легко получить более удобную формулу, если произвести предельный переход при $n \to \infty$ и воспользоваться интегральной теоремой Муавра-Лапласа. Как следствие этой теоремы, можно утверждать, что при достаточно больших n функция биномиального распределения $B(x,n,\theta)$ приближается функцией гауссовского распределения с параметрами $n\theta$ и $\sqrt{n\theta(1-\theta)}$. Это означает, что при достаточно больших n $B(x,n,\theta) \approx \Phi\left(\frac{x - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right)$, где $\Phi(u)$ – функция Лапласа. Таким образом, зная зависимость величин θ и θ от переменной n, для оценки вероятности $B(x,n,\theta)$ достаточно вычислить предел:

$$u = \lim_{n\to\infty} \frac{x - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}. \qquad (3.21)$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} B(x,n,\theta) = \Phi(u).$$

В формуле цены пут-опциона (3.20) выписаны две вероятности $B(x,n,\theta)$ для одинакового x и различных θ: $\theta = p$ и $\theta = q$. Вычисляя предел (3.21) для различных θ по отдельности, находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} = z, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} = z - \sigma\sqrt{T},$$

где в силу (3.12)

$$z = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} ln\left(\frac{Xe^{-\mu T}}{S}\right) + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}.$$

В силу теоремы Муавра-Лапласа, устремляя $n \to \infty$ в формуле (3.20), в итоге получаем оценку риска в логнормальной модели эволюции цены акции:

$$P^{(3)} = Xe^{-\mu T} \cdot \Phi(z) - S \cdot \Phi\left(z - \sigma\sqrt{T}\right). \qquad (3.22)$$

В силу свойства функции Лапласа $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$ из этой формулы легко получается известная *формула Блэка-Шоулса* рациональной цены европейского пут-опциона:

$$P^{(3)} = Xe^{-\mu T} \cdot \left(1 - \Phi(d_-)\right) - S \cdot \left(1 - \Phi(d_+)\right), \qquad (3.23)$$

где

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} ln\frac{S}{Xe^{-\mu T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}.$$

3.3. СТРАХОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ РИСКОВ С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ ОПЦИОНОВ

В отличие от развитых стран мира и особенно США в нашей стране еще не сложилась широкая практика торговли опционными контрактами. Существует несколько акций российских корпораций, опционами на которые торгуют на бирже, и объемы этих торгов настолько незначительны, что говорить о возможности свободного приобретения опционного контракта на любой срок и любого номинала не приходится. Поэтому проблема поиска в России продавца опциона, который бы взял на себя риски фондового рынка, является крайне актуальной. В качестве решения такой задачи предлагается создание искусственного (или синтетического) опциона. Под ним принято понимать портфель из безрискового актива и соответствующего этому опциону рискового актива. Для того, чтобы создать динамическое управление портфелем, эквивалентным по своим платежам опциону, необходимо обратиться к уже построенным математическим моделям эволюции цены на акцию.

Идея создания искусственных финансовых инструментов не нова и давно применяется на Западе для различных стратегий инвестирования. Суть ее состоит в построении инвестиционной стратегии, способной в динамике продублировать структуры денежных платежей по опциону, происходящих на бирже. Эта стратегия оказывается динамической, поскольку требует корректировки портфеля во времени в соответствии со сложившимся к этому моменту курсу рискового актива. Данная стратегия после первоначального вложения денежных средств основана на полном самофинансировании. Это означает, что до даты истечения опциона инвестор не вносит дополнительных средств и не забирает их. Так как сама стратегия дублирует опцион, сумма, необходимая для поддержания стратегии, и есть цена опциона. В случае, когда для оценки опциона используется биномиальная модель, изменения портфеля необходимо производить в конце периодов модели. Для логнормальной модели, когда время изменения цены непрерывно, такая стратегия требует непрерывного изменения портфеля, что невозможно на практике. Однако, саму формулу Блэка-Шоулса для определения цены опциона европейского типа можно использовать для создания эквивалентного портфеля.

Формулы (3.16), (3.20) и (3.23) сами определяют оптимальный портфель, наилучшим образом имитирующий платежи по пут-опциону. Стоящий линейный коэффициент при S определяет долю рискового актива в эквивалентном портфеле. Это означает, что в зависимости от выбора модели доля рискового актива в эквивалентном портфеле будет равна $k^{(1)} = -B(x,n,q)$, $k^{(2)} = -B(y,n,q)$, $k^{(3)} = -\left(1 - \Phi(d_+)\right) \quad -\Phi(z)$. Заметим, что для пут-опциона данный коэффициент является отрицательным. Это означает, что в эквивалентном портфеле рисковый актив определяется короткой позицией. Для страхования будущего риска, связанного с владением акции, этот коэффициент показывает долю рискового актива, которую необходимо продать, чтобы создать эквивалентный портфель. В диссертации исследована динамика изменения цены акций Газпрома на протяжении шести месяцев с 1 марта по 1 сентября 2004 года.

В табл. 3.1 представлен поток платежей синтетического пут-опциона на одну акцию Газпрома на протяжении шести месяцев. Коррекция портфеля производилась один раз в конце месяца. В этом примере цена исполнения пут-опциона равна 60 рублей. В качестве доходности безрискового актива за один месяц взята непрерывно начисляемая ставка 1,375%. Логарифмическая волатильность σ акции, рассчитанная как оценка дисперсии в расчете на один месяц равна 11,6%.

Опишем действия инвестора, поддерживающего синтетический пут-опцион с ценой исполнения 60 рублей и временем исполнения 6 месяцев. В начальный момент времени цена акции равна 55,9 рубля. Коэффициент пут-опциона, высчитанный с учетом заданных параметров доходности безрискового актива и волатильности рискового актива, равен –0,427. Это означает, что первым шагом в начальный момент времени инвестор должен продать долю акций в размере 42,7% на сумму 23,88 рубля. До проведения операции мы считаем, что на счету продавца опциона находится сумма 5,96 рубля, равная стоимости опциона, рассчитанная по формуле (3.23). После продажи доли акции портфель будет состоять из 29,84 рубля безрискового актива и короткой позиции по акции в размере 23,88 рубля. К концу первого месяца цена акции выросла до 60,20 рубля. Соответственно доля акций в данном портфеле увеличилась до –0,342. Для того, чтобы скорректировать портфель, необходимо увеличить долю акций в портфеле на 0,086, купив акции на сумму 5,15 рубля. За месяц безрисковый актив увеличится до 30,26 рубля и после коррекции портфеля составит 25,11 рубля. Короткая позиция по акциям в свою очередь составит 20,58 рубля. Продолжая аналогично, в конце шестого месяца мы имеем 33 рубля безрискового актива и короткую позицию по акциям в размере доли, равной 0,47. Закрыв короткую позицию на сумму 27,07 рубля, окончательно инвестор имеет актив в сумме 5,93 рубля. Так как последняя цена акции равна 57,6 рубля и меньше цены исполнения пут-опциона, инвестору придется исполнить опцион, продав акцию покупателю опциона по 60 рублей. Последняя операция уменьшит актив инвестора на 2,4 рубля. В итоге чистая прибыль составит 3,53 рубля на одну акцию.

Конечно, надо признать, что на практике сценарии изменения цены могут быть разными. Для некоторых случаев данная стратегия может быть убыточной, для других – высоко прибыльной. Как показывает моделирование по методу Монте-Карло, чистая текущая стоимость платежных потоков, индуцируемых искусственным опционом, отличается от цены опциона не более, чем на 60%, с достоверностью 95%. В одной из своих статей В.Н. Тутубалин приводит сведения об экспериментах, проведенных для имитации динамического хеджирования опционов по реальным данным о ценах. В данной работе утверждается, что типичный дисбаланс в реальных опытах хеджирования составляет 10-20% от начальной цены опциона. Существенный дисбаланс, когда отклонение от цены опциона больше самой цены в несколько раз, возникает крайне редко. Из тех 3 000 экспериментов хеджирования, о которых говорится в статье, они составляют не более 1%. Главной причиной, по мнению В.Н. Тутубалина, довольно значительных типичных дисбалансов является неточное знание будущей волатильности, которая на самом деле зависит от времени. Если в качестве волатильности использовать значение, получаемое по будущим данным (что на практике невозможно, но в имитационной модели по данным о прошлых ценах вполне возможно), то типичная величина дисбалансов сокращается в четыре-пять раз.

Достоинством приведенной методики является то, что покупателю пут-опциона не нужно находить контрагента. Он может сам использовать стратегию динамического хеджирования для страхования своих активов. В этом случае в качестве контрагента выступает весь фондовый рынок, участники которого берут на себя финансовые риски падения котировок рискового актива. Сам же покупатель опциона несет незначительные потери, не превышающие стоимость опциона, но при этом сохраняет весь актив от возможного падения цен.

Таблица 3.1.

ДИНАМИКА ПЛАТЕЖЕЙ СИНТЕТИЧЕСКОГО ПУТ-ОПЦИОНА НА АКЦИЮ ГАЗПРОМА С ЕЖЕМЕСЯЧНОЙ КОРРЕКТИРОВКОЙ

Этапы (по месяцам)	Цена акции (руб.)	Коэффициент *k*	Изменение коэффициента	Покупка/продажа рискового актива (руб.)	Рисковый актив (руб.)	Безрисковый актив (до коррекции портфеля) (руб.)	Безрисковый актив (после коррекции портфеля) (руб.)
0	55,9	-0,427	-0,427	-23,88	-23,88	5,96	29,84
1	60,2	-0,342	0,086	5,14	-20,58	30,26	25,12
2	56,93	-0,45	-0,108	-6,14	-25,60	25,46	32,00
3	52,59	-0,627	-0,187	-9,85	-33,50	32,03	41,88
4	60,75	-0,372	0,265	16,07	-22,63	42,47	26,41
5	59,3	-0,47	-0,098	-5,78	-27,87	26,76	32,54
6	57,6	0	0,47	27,07	0	33	5,93

Явным плюсом данной системы является возможность использования современной финансовой инженерии в условиях слабо развитого финансового рынка, каким является рынок России. Комбинации различных финансовых инструментов, соединяющиеся на различных финансовых и временных уровнях самыми разными способами, порождают новые финансовые структуры. Распространяя данную методику в России, возникает ситуация для удачного развития самого финансового рынка, а значит, и появления все большего числа новых финансовых услуг.

Остановимся на недостатках этой системы страхования финансового риска. Во-первых, приведенные расчеты не используют операционные издержки, которые обязательно присутствуют при операциях на фондовом рынке. Понятно, что теоретически можно добиваться идеального результата, если корректировать портфель ежесекундно. При этом естественно возникает бесконечно большая величина операционных издержек, которая делает данную методику нереальной. В этом плане возникает замечательная задача по оптимизации управления инвестиционным портфелем, имитирующим опцион. Решение данной задачи дает возможность ответить на вопрос, будет ли реальной стратегия динамического хеджирования или нет в каждом конкретном случае.

Недостаток, связанный с высокими операционными издержками, можно также несколько смягчить, изменив правило коррекции портфеля, связывая его не с определенными моментами времени, а устанавливая пороги в рамках которых портфель остается неизменным. Другими словами, возможная цена акции разбивается на интервалы, внутри которых портфель остается неизменным. Если цена достигает нижнего предела какого-нибудь интервала, то часть акций продается до создания нового портфеля с меньшей долей рискового актива. Если же достигает верхней границы, то формируется новый портфель с большей долей рискового актива путем покупки дополнительной части акций.

Вторым недостатком приведенной методики является ее сильная чувствительность к кризисным явлениям экономики, особенно политического характера. Как замечено в книге [21], страхование портфеля потеряло популярность после краха рынка акций в США в 1987 году. Дело в том, что большое количество портфелей акций управлялось по схемам страхования портфеля в условиях длительного подъема на рынке. Поэтому большинство портфелей было полностью инвестировано в акции – либо непосредственно, либо опосредованно через длинные позиции по индексным фьючерсам. Начальное понижение рынка акций породило поток распоряжений о продаже фьючерсных контрактов, поскольку схемы страхования портфеля стремились сбалансировать портфели путем уменьшения доли акций. Этот поток был таким интенсивным и неожиданным, что индексные фьючерсы стали продаваться со значительным дисконтом по отношению к цене основных акций. Это привело к активизации систем программной торговли, стремившихся использовать арбитражную ситуацию. В соответствие с программами торговли началась продажа акций, что, в свою очередь, еще сильнее понизило индекс. Пошла цепная реакция, последствия которой хорошо известны. Повторение такой ситуации на фондовом рынке нам не грозит, хотя бы потому что количество игроков, использующих такого рода торговые системы, составляют мизерную часть участников фондового рынка. К тому же можно застраховать себя от неожиданных изменений на рынке, используя информационные системы непрерывного мониторинга и автоматического исполнения сделок.

3.4. ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ НА РЕЗУЛЬТАТЫ УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ

В диссертации проведены исследования зависимости результатов искусственного пут-опциона от выбранной частоты корректировки. В качестве основных лагов корректировки были взяты день, неделя, месяц. На рис. 3.2-3.3 показаны результаты зависимости коэффициентов хеджирования $\tilde{k}_t$ и его изменений от динамики цены акции Газпрома для недельных корректировок. Коэффициент хеджирования $\tilde{k}_t$ определялся через коэффициент k искусственного опциона по формуле: $\tilde{k}_t = 1 + k$, а его приращения – $\Delta\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+l} - \tilde{k}_t$, где l – величина лага. Заметим, что введенный коэффициент можно интерпретировать как долю рискового актива в эквивалентном портфеле, поскольку коэффициенты искусственного опциона определялись на одну акцию Газпрома..

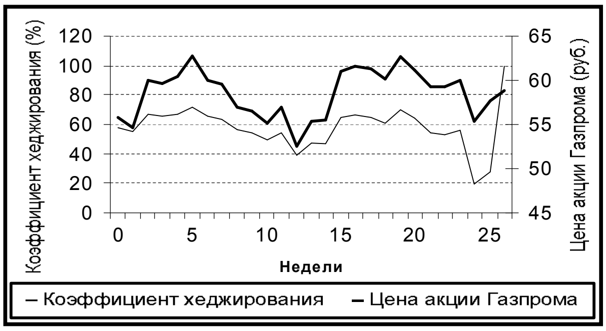

Рис. 3.2. Динамика хеджа в зависимости от цены акции

Рис. 3.3. Динамика изменений цены акций Газпрома и коэффициента

Динамика показывает очевидное подобие движений цены акции и соответствующего коэффициента. Другими словами, трэйдер наращивает позиции рискового актива при возрастании цены акции и сокращает их в обратном случае. Понятно, что изменение хедж-коэффициента совпадает с изменением долей рискового актива в эквивалентном портфеле.

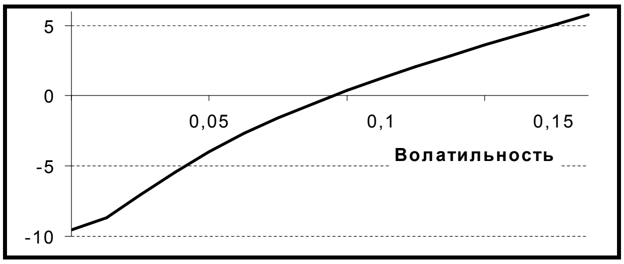

Рис. 3.4. Зависимость получаемый прибыли от волатильности σ

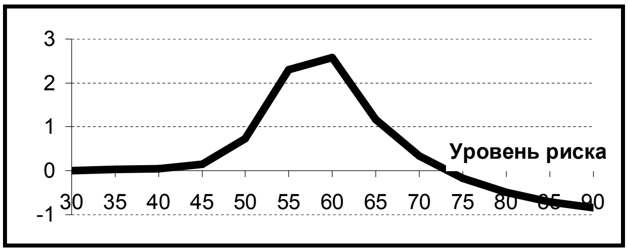

Рис. 3.5. Зависимость получаемой прибыли от уровня риска X

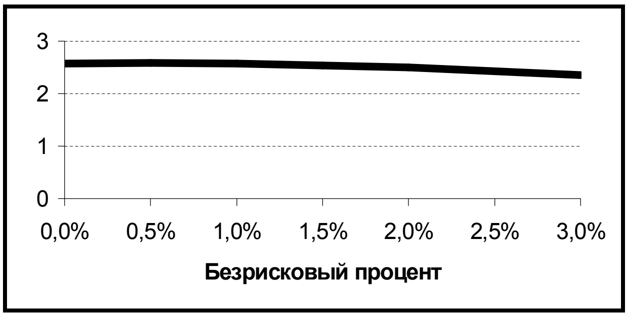

Рис. 3.6. Зависимость получаемой прибыли от безрискового процента μ

В рамках диссертационной работы проведены исследования зависимости динамики финансовой стратегии, дублирующей поток платежей для пут-опциона на акцию Газпрома, от изменения параметров модели управления – волатильности σ, достаточного уровня надежности $\boldsymbol{X}$, непрерывной процентной ставки μ. Результаты исследования приведены на рис. 3.4-3.6.

Как видно изменения безрискового процента практически не влияют на финансовый результат предложенной стратегии. Рис. 3.5 показывает возможность получения убытков при выборе достаточно больших значений уровня риска $\boldsymbol{X}$. Однако, исполнение самого опциона вполне покрывает полученные потери. Поэтому предпочтения при выборе этого параметра остаются за инвестором. Важным выводом проведенного исследования является тот факт, что крайне актуальной для такой модели динамического управления финансовым риском является правильная оценка логарифмической волатильности базового актива. Хотя при больших волатильностях управляющий финансовой стратегией получает достаточную прибыль, цена пут-опциона настолько велика (она составляет более 15% от цены акции), что не может быть привлекательной для субъекта, страхующего риск. Более того, удобным для управления данным портфелем является метод динамической коррекции волатильности во времени. Другими словами, полагая $\boldsymbol{k_t = f(\sigma_t)}$, изменение портфеля происходит на основе прогноза будущей волатильности, корректирующегося с учетом поступивших на данное время статистических данных.

4. GARCH-модели финансовых временных рядов

4.1. ВВЕДЕНИЕ В GARCH-МОДЕЛИ

Сокращение GARCH означает Generalized Autoregressive Conditional Heterockedasticity (Обобщенная Авторегрессионная Условная Гетероскедастичность). Гетероскедастичность подразумевает нестационарную дисперсию (волатильность), т.е. зависящую от времени. Условность предполагает зависимость наблюдений от недавнего прошлого, а авторегрессия описывает механизм, связывающий настоящие наблюдения с прошлыми [75]. Таким образом, GARCH – это метод моделирования финансовых временных рядов, использующий прошлые значения дисперсии в объяснение будущих значений дисперсии.

Финансовые временные ряды имеют устойчивые эмпирические закономерности в своих значениях, например, значимая положительность эксцесса (т.е. «толстые хвосты» в распределении) и «кластерность» волатильности. При использовании этих закономерностей в GARCH моделировании обеспечивается высокая точность прогнозов значений дисперсии доходностей активов. Можно применять GARCH модели в различных областях, таких как риск-менеджмент [96, 32], портфолио-менеджмент, размещение активов, ценообразование опционов [95], обмен валюты и временная структура процентных ставок.

Можно найти высокую значимость GARCH эффектов (гетероскедастичность) для рынка ценных бумаг, не только для акций отдельных компаний, но и для портфелей акций, биржевых индексов и фьючерсов. Эти эффекты являются важными в таких областях как оценка риска и других применениях управления риском, касающихся эффективного размещения активов.

Хотя GARCH модели имеют широкую область применения, они имеют ограничения:

- GARCH модели являются только частью решения, поскольку их как правило применяют для рядов доходностей активов, а финансовые решения редко основываются только на ожидаемой доходности и волатильности;
- GARCH модели часто не ухватывают феномены, связанные с «дикими» рыночными изменениями (например, обвалы и последующие восстановления) и другими непредвиденными случаями, приводящими к значительным структурным изменениям;
- гетероскедастичность не может объяснить полностью все распределения с «толстыми хвостами».

4.2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ПРИМЕНЕНИЯ GARCH-МОДЕЛЕЙ

GARCH модели объясняют определенные характеристики, связанные с финансовыми временными рядами:

- «Толстые хвосты».
- «Кластерность» волатильности.

Распределение доходностей активов часто показывает более толстые хвосты, чем стандартное нормальное или гауссовское распределение.

Финансовые временные ряды обычно проявляют особенность известную как «кластерность» волатильности, когда большие изменения приводят к последующим большим изменениям, а малые изменения – к малым. Знак последующего изменения (положительный или отрицательный) предсказать невозможно.

Если рассматривать финансовые временные ряды как последовательность случайных наблюдений, то эта последовательность, стохастический процесс может обнаружить некоторую степень корреляции в своих значениях. Мы можем использовать эту корреляционную структуру для прогноза будущих значений этого процесса, используя прошлые наблюдения. Использование корреляционной структуры позволяет нам разложить временной ряд на детерминированную составляющую (т.е. прогноз) и случайную компоненту (т.е. ошибку, неопределенность, связанную с прогнозом):

$$y_t = f(t-1, X) + \varepsilon_t. \qquad (4.1)$$

В этой формуле $f(t-1, X)$ представляет детерминированную составляющую текущей доходности как функцию от информации, известной к моменту времени $t-1$, включающую прошлые ошибки $\{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots\}$, прошлые наблюдения $\{y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\}$ и данные других объясняющих временных рядов X. Случайная компонента ε_t есть ошибка прогноза на один период.

Понимание GARCH лежит в различии между условной и безусловной дисперсии процесса $\{\varepsilon_t\}$ [3, 23]. Условность предполагает явную зависимость от прошлых наблюдений. GARCH модели характеризуются условным распределением ε_t. Модель дисперсии, предлагаемая GARCH:

$$\mathrm{D}_{t-1}(y_t) = \mathrm{M}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2, \qquad (4.2)$$

где

$$\sigma_t^2 = k + \sum_{i=1}^{P} G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{Q} A_j \varepsilon_{t-j}^2 . \qquad (4.3)$$

Общим предположением при моделировании финансовых временных рядов является то, что ошибки прогноза некоррелированы и имеют нулевое среднее:

$$\mathrm{M}(\varepsilon_t \varepsilon_T) = \begin{cases} \sigma_t^2, \text{ если } t = T, \\ 0, \text{ если } t \neq T. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Хотя ошибки прогноза некоррелированы, тем не менее, они не являются независимыми. Ошибки прогноза $\{\varepsilon_t\}$ явно представлены формулой:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t ,$$

где

σ_t – условное стандартное отклонение;

z_t – независимая одинаково распределенная случайная величина.

В GARCH моделировании существуют следующие ограничения для параметров условной дисперсии:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{P} G_i + \sum_{j=1}^{Q} A_j < 1, \quad k > 0, \\ &G_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots P, \\ &A_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots Q. \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Первое ограничение, ограничение стационарности, является необходимым и достаточным для существования предела дисперсии процесса $\{\varepsilon_t\}$. Остальные ограничения являются достаточными для того, чтобы условная дисперсия была строго положительна.

Безусловная дисперсия процесса $\{\varepsilon_t\}$ определяется формулой:

$$\sigma_t^2 = \mathrm{M}(\varepsilon_t^2) = \frac{k}{1 - \sum_{i=1}^{P} G_i - \sum_{j=1}^{Q} A_j}. \qquad (4.6)$$

4.3. АНАЛИЗ И ОЦЕНКА GARCH МОДЕЛЕЙ

Будем использовать гибкую модель для описания условного среднего – ARMAX модель, заключающую в себе авторегрессию (AR), скользящие средние (MA) и регрессию (X). Формула для обобщенной ARMAX(R,M,Nx) модели условного среднего:

$$\begin{aligned} y_t = {} & C + \sum_{i=1}^{R} AR_i y_{t-i} + \\ & + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{M} MA_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^{N_X} \beta_k X(t,k), \end{aligned} \qquad (4.7)$$

где X – объясняющая регрессионная матрица.

Условную дисперсию будем моделировать как стандартный GARCH процесс с гауссовскими ошибками. Формула для условной дисперсии:

$$\sigma_t^2 = k + \sum_{i=1}^{P} G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{Q} A_j \varepsilon_{t-j}^2 . \qquad (4.8)$$

Если посмотреть на график цен акций некоторой компании или на график биржевого индекса, можно заметить, что не существует постоянного среднего уровня, вокруг которого развиваются цены. Это говорит о нестационарности временного ряда.

GARCH моделирование предполагает работу со стационарными временными рядами. Использовать GARCH модели для временных рядов, представленных непосредственными значениями цен, в силу нестационарности таких рядов, нельзя. Если мы имеем временной ряд значений цен $\{S_t\}$, необходимо произвести преобразование ряда [75, 91, 93]:

$$y_t = \ln \frac{S_{t+1}}{S_t} = \ln S_{t+1} - \ln S_t, \qquad (4.9)$$

где $\{y_t\}$ – временной ряд, представляющий доходности активов, имеет нулевой средний уровень.

Моделирование GARCH состоит из трех этапов:

- предварительный анализ;
- оценка параметров модели;
- проверка модели на адекватность статистическим данным.

На первом этапе исследуется финансовый временной ряд: производится преобразование цен в доходности, определяется автокорреляция в значениях ряда, выявляется гетероскедастичность в доходностях, проверяется пригодность временного ряда для GARCH-моделирования.

Будем исследовать финансовый временной ряд, отражающий динамику курсов обыкновенных акций РАО «Газпром» (цены закрытия за период с 01.03.2001 г. по 01.09.2004 г., всего 918 значений).

Динамика курсов акций обыкновенных (ао) РАО «Газпром» (рис.4.1) не имеет постоянного среднего уровня, а GARCH-моделирование предполагает работу со стационарными временными рядами, поэтому мы производим преобразование ряда курсов акций $\{S_t\}$ в ряд доходностей $\{y_t\}$.

В результате преобразования получаем временной ряд $\{y_t\}$, значениями которого являются однодневные доходности ао «Газпром».

Далее необходимо проверить корреляцию в значениях доходности финансового временного ряда.

Для качественной проверки временного ряда на коррелированность значений можно использовать автокорреляционную (АКФ) и частную автокорреляционную (ЧАКФ) функции [3, 8, 11].

Диаграммы АКФ и ЧАКФ, представленные на рис. 4.3 и рис. 4.4, не обнаружили значимой корреляции в значениях исходного временного ряда.

Хотя АКФ доходностей показала малую корреляцию, АКФ квадратов значений доходностей тем не менее может выявить значимую корреляцию в моментах второго порядка.

Диаграмма автокорреляционной функции квадратов доходностей $\{y_t\}$, представленная на рис. 4.5, показывает присутствие значимой корреляции на качественном уровне. Для количественной оценки корреляции используются проверки статистических гипотез, реализуемых в LBQ и ARCH тестах.

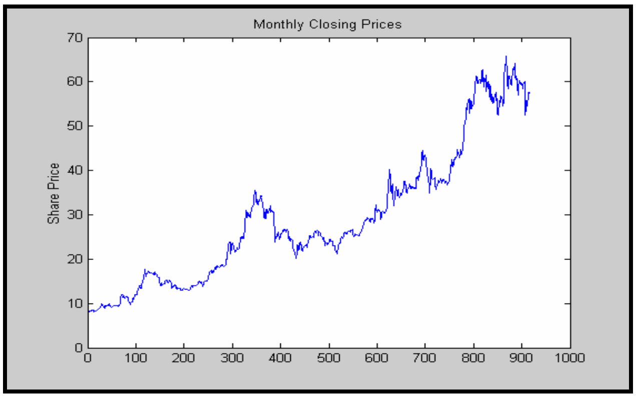

Рис. 4.1. Дневные цены закрытия ао «Газпром»

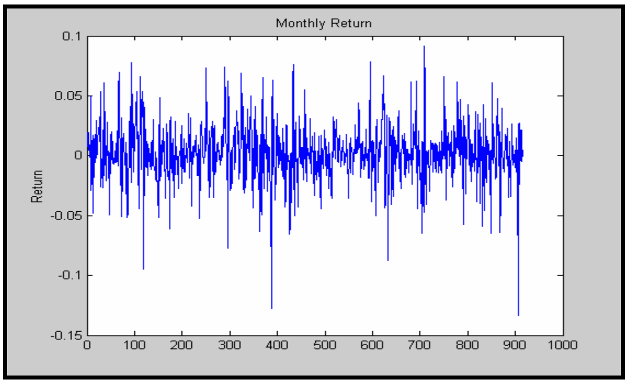

Рис. 4.2. Однодневные доходности ао «Газпром»

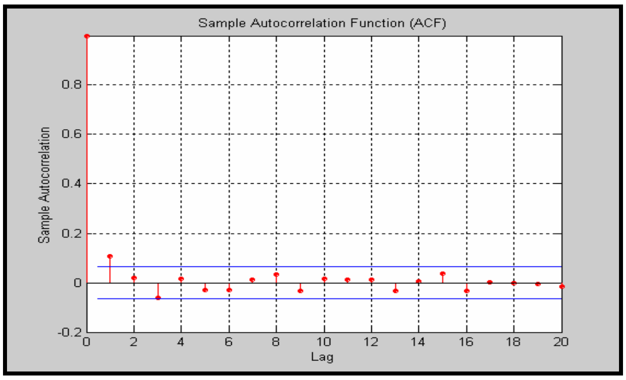

Рис. 4.3. АКФ доходностей $\{y_t\}$

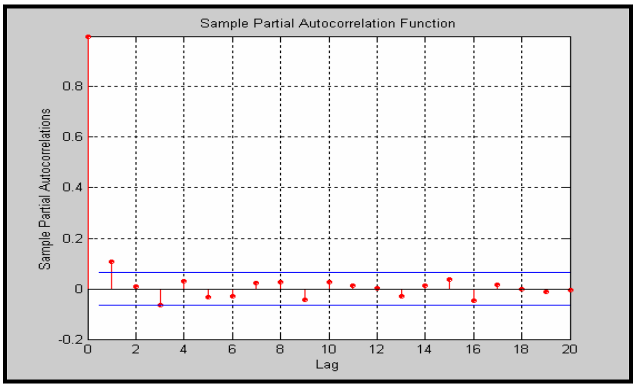

Рис. 4.4. ЧАКФ доходностей $\{y_t\}$

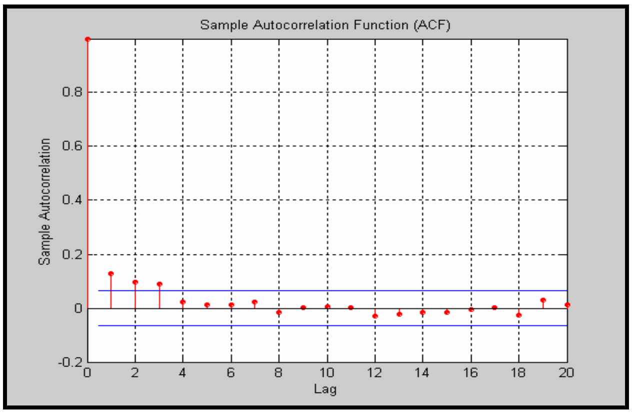

Рис. 4.5. АКФ квадратов доходностей

LBQ тест (Ljung-Box-Pierce Q-test) выполняет проверку значений временного ряда на отклонение от случайного процесса, используя значения автокорреляционной функции.

Нулевая гипотеза: модель подобрана адекватно (нет последовательной корреляции в значениях временного ряда для соответствующих лагов).

Альтернативная гипотеза: модель неадекватна исходным данным.

LBQ тест основан на Q-статистике:

$$Q = N(N+1)\sum_{k=1}^{L}\frac{r_k^2}{(N-k)},$$

где

N – размер выборки;

L – число автокорреляционных лагов, включенных в статистику;

r_k^2 – оценка выборочного коэффициента автокорреляции с лагом k.

Q-статистика имеет асимптотическое распределение χ^2 с L степенями свободы. Если в значениях временного ряда нет автокорреляции для соответствующих лагов, то Q-статистика будет мала. Нулевая гипотеза отвергается, если Q-статистика превышает критическое значение $\chi_L^2(\alpha)$, где α – заданный уровень значимости.

Таблица 4.1.

LBQ ТЕСТ ДЛЯ ДОХОДНОСТЕЙ АО «ГАЗПРОМ».

Лаг	Нулев. гипотеза	Вероят-ность	Q - статистика	Крит. знач.
10	Отвергается	0.0362	19.3335	18.3070
15	НЕ отвергается	0.1062	22.0619	24.9958
20	НЕ отвергается	0.2781	23.2206	31.4104

LBQ тест с уровнем значимости $\alpha = 0,01$, представленный в табл.4.1, показал, что для лага 10 нулевая гипотеза отвергается, для лагов 15 и 20 – не отвергается. Результаты этого теста показывают отсутствие корреляции в значениях доходности.

Тем не менее, LBQ тест для квадратов значений доходности, представленный в табл.4.2, обнаруживает присутствие значимой корреляции в тестируемых данных, нулевая гипотеза отвергается для всех трех лагов.

ARCH тест (Engle's ARCH test) выполняет проверку временных рядов на присутствие ARCH эффектов в их значениях [94].

Таблица 4.2.

LBQ ТЕСТ ДЛЯ КВАДРАТОВ ДОХОДНОСТЕЙ АО «ГАЗПРОМ».

Лаг	Нулев. гипотеза	Вероят-ность	Q - статистика	Крит. знач.
10	Отвергается	0.0011	29.3635	18.3070
15	Отвергается	0.0076	31.4746	24.9958
20	Отвергается	0.0339	32.9785	31.4104

Нулевая гипотеза: значения временного ряда независимы и имеют одинаковое Гауссово распределение, т.е. нет ARCH эффектов.

Альтернативная гипотеза: временной ряд содержит ARCH эффекты порядка M.

ARCH тест проверяет временной ряд на присутствие ARCH эффектов M-го порядка посредством регрессирования квадратов значений временного ряда на константу и M квадратов предшествующих значений временного ряда:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots \alpha_M \varepsilon_{t-M}^2. \qquad (4.10)$$

Если временной ряд не содержит ARCH или GARCH эффектов, то квадрат выборочного коэффициента корреляции R^2 (коэффициент детерминации) будет мал. Статистика TR^2 (T - число квадратов значений временного ряда, включаемых в регрессию) имеет асимптотическое распределение χ^2 с M степенями свободы. Нулевая гипотеза отвергается, если статистика TR^2 превышает критическое значение $\chi_M^2(\alpha)$, где α – заданный уровень значимости.

При проверке ARCH эффектов GARCH(P,Q) процесс эквивалентен ARCH(P+Q) процессу.

Таблица 4.3.

ARCH ТЕСТ ДОХОДНОСТЕЙ АО «ГАЗПРОМ».

Лаг	Нулев. гипотеза	Вероят-ность	TR^2 - статистика	Крит. знач.
10	Отвергается	0.0000	23.0635	18.3070
15	Отвергается	0.0000	25.0938	24.9958
20	Не отвергается	0.0000	27.0628	31.4104

ARCH тест с уровнем значимости $\alpha = 0.05$, представленный в табл. 4.3, для доходностей исходного временного ряда указывает на наличие GARCH эффектов (т.е., гетероскедастичности) в тестируемом временном ряде. Для всех трех лагов нулевая гипотеза отвергается с высокой степенью вероятности.

В результате проведенного предварительного анализа финансового временного ряда, отражающего динамику ао «Газпром», мы обнаружили гетероскедастичность в значениях доходности исходного временного ряда. Это дает нам возможность утверждать, что данный финансовый временной ряд подходит для GARCH-моделирования.

Присутствие гетероскедастичности, наличие ARCH эффектов в значениях временного ряда делает его подходящим для GARCH моделирования.

Для оценки выберем простую (тем не менее, общую) модель условного среднего с GARCH(1,1) процессом в ошибке:

$$y_t = C + \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = k + G_1 \sigma_{t-1}^2 + A_1 \varepsilon_{t-1}^2. \qquad (4.11)$$

В этой модели условного среднего доходность y_t представляется простой константой C плюс некоррелированный белый шум ε_t. Эта модель очень часто является достаточной для описания условного среднего в доходностях финансовых временных рядов. Прогноз дисперсии ошибки σ_t^2 состоит из константы k, плюс взвешенное среднее прогноза последнего периода σ_{t-1}^2 и квадрата последней ошибки ε_{t-1}^2.

Описание численного метода.

В предположении условной нормальности $\{\varepsilon_t\}$ вклад в логарифмическую функцию правдоподобия n-го наблюдения равен:

$$l_n = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \sigma_n^2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_n^2}{\sigma_n^2}, \quad n = 1, \ldots, N. \qquad (4.12)$$

Здесь ε_n и σ_n^2 следует рассматривать как функции от неизвестных параметров θ: $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta)$ и $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(\theta)$.

В вектор θ должны войти параметры (4.7)-(4.8) C, $\{AR_i\}_{i=1}^R$, $\{MA_j\}_{j=1}^M$, $\{\beta_k\}_{k=1}^{N_x}$, k, $\{G_i\}_{i=1}^P$, $\{A_j\}_{j=1}^Q$ и любые другие неизвестные параметры (см. ниже).

Логарифмическая функция правдоподобия равна:

$$l(\theta) = -\frac{1}{2}\left(N \ln 2\pi + \sum_{n=1}^{N} \left[\ln \sigma_n^2(\theta) + \frac{\varepsilon_n^2(\theta)}{\sigma_n^2(\theta)} \right] \right). \qquad (4.13)$$

Оценки максимального правдоподобия по определению должны максимизировать логарифмическую функцию правдоподобия l по неизвестным параметрам θ.

Оценки максимального правдоподобия являются корнями уравнения правдоподобия:

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta^T} = 0. \qquad (4.14)$$

Для того чтобы использовать рекуррентную формулу (4.8) для расчета условной дисперсии, используемой в функции правдоподобия, нужны начальные значения σ_n^2, $n = \min(1, P+1-Q), \ldots, P.$. Один из способов – рассматривать эти начальные значения как параметры, которые требуется оценить. Обозначим эти параметры через $\eta_n (= \sigma_n^2)$, тогда рекуррентная формула примет вид:

$$\sigma_n^2(\theta) = \begin{cases} \eta_n, \; n = \min\{1, P+1-Q\},\dots,P, \\ k + \sum_{i=1}^{P} G_i \sigma_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^{Q} A_j \varepsilon_{n-j}^2, \; n \quad P+1,\dots,N \end{cases} \tag{4.15}$$

Можно также использовать вместо начальных значений безусловную дисперсию:

$$\sigma_n^2 = \sigma^2, \quad n \quad \min\{1, P+1-Q\},\dots,P, \tag{4.16}$$

где

$$\sigma^2 = \frac{k}{1 - \sum_{i=1}^{P} G_i - \sum_{j=1}^{Q} A_j}. \tag{4.17}$$

При этом предполагается, что

$$1 - \sum_{i=1}^{P} G_i - \sum_{j=1}^{Q} A_j > 0, \tag{4.18}$$

то есть, что GARCH-процесс стационарен.

В дальнейшем рассмотрим только первый способ (с параметрами η_n). При этом в вектор θ следует включить и η_n.

Если, GARCH-процесс стационарен, то с асимптотической точки зрения выбор начальных приближений не играет роли.

Для оценивания модели можно применить следующий общий итерационный метод:

$$\theta^{r+1} = \theta^r + \left(\hat{\Sigma}(\theta^r)\right)^{-1} g(\theta^r), \tag{4.19}$$

где $g(\theta) = \dfrac{\partial l(\theta)}{\partial \theta^T}$ – градиент логарифмической функции правдоподобия (вектор-столбец), $\hat{\Sigma}(\theta)$ – оценка информационной матрицы, r – номер итерации.

Стационарная точка итераций $(\theta^{r+1} = \theta^r)$ соответствует решению уравнения правдоподобия:

$$g(\theta^r) = 0. \tag{4.20}$$

Алгоритм (4.19) на практике применяют обычно в несколько модифицированном виде:

$$\theta^{r+1} = \theta^r + \lambda\left(\hat{\Sigma}(\theta^r)\right)^{-1} g(\theta^r), \tag{4.21}$$

где $\lambda > 0$. Такая модификация нужна для повышения устойчивости алгоритма. Например, при выборе $\lambda = 1$ функция правдоподобия может уменьшиться или шаг может попасть в недопустимую область (в GARCH-модели это случай, когда одна из оценок условной дисперсии становится отрицательной). В таких случаях множитель λ уменьшают до тех пор, пока не достигнут требуемого – увеличения функции правдоподобия или попадания в допустимую область.

Информационную матрицу можно оценить разными методами. Это, например, может быть матрица Гессе логарифмической функции правдоподобия со знаком минус [16]:

$$\hat{\Sigma}(\theta) = \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta\partial\theta^T}. \tag{4.22}$$

При этом итерации (4.21) соответствуют классическому методу Ньютона. К сожалению, в модели GARCH матрицу Гессе довольно трудно вычислять.

Другой метод называется методом ВПГ (или методом внешнего произведения градиентов, OPG). В этом методе информационная матрица оценивается следующим способом:

$$\hat{\Sigma}(\theta) = G(\theta)^T G(\theta), \tag{4.23}$$

где G – матрица вкладов в градиент отдельных наблюдений:

$$G(\theta) = \{G_n(\theta)\}_{n=1,\dots,N}, \; G_n(\theta) = \frac{\partial l_n(\theta)}{\partial\theta}. \tag{4.24}$$

Однако наилучшим методом для оценивания GARCH является следующий. В нем оценка информационной матрицы получается по формуле:

$$\hat{\Sigma}(\theta) = \sum_{n=1}^{N} \hat{\Sigma}_n(\theta), \tag{4.25}$$

где $\hat{\Sigma}_n(\theta)$ – информационная матрица для n –го наблюдения *условная* по прошлой информации Ω_n:

$$\hat{\Sigma}_n(\theta) = M\left(\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta^T}\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta} \mid \Omega_n\right) = M\left(\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta^T}\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta} \mid \Omega_n\right) \tag{4.26}$$

Для применения метода нужны формулы для расчета условной информационной матрицы n -го наблюдения, $\hat{\Sigma}_n(\theta)$, и для расчета градиента $g(\theta)$. Градиент удобно разложить на вклады отдельных наблюдений:

$$g(\theta)^T = 1^T G = \sum_{n=1}^{N} G_n(\theta). \tag{4.27}$$

Таким образом, нам достаточно произвести вычисление условной информационной матрицы n -го наблюдения и вклада в градиент n -го наблюдения.

Продифференцируем $l_n(\theta)$, чтобы получить формулу для вклада в градиент n -го наблюдения:

$$G_n(\theta) = \frac{\partial l_n(\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_n^2}\frac{d\sigma_n^2}{d\theta} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_n^2}{\sigma_n^2}\frac{1}{\sigma_n^2}\frac{d\sigma_n^2}{d\theta} - \frac{\varepsilon_n}{\sigma_n}\frac{1}{\sigma_n}\frac{dh_n}{d\theta}. \tag{4.28}$$

Здесь и в дальнейшем будем опускать аргумент θ. Введем обозначения:

$$\xi_n = \frac{\varepsilon_n}{\sigma_n}, \; \nu_n = \xi^2 - 1,$$

$$Q_n = \frac{1}{\sigma_n}\frac{d\varepsilon_n}{d\theta}, \; S_n = \frac{1}{\sigma_n^2}\frac{d\sigma_n^2}{d\theta}. \tag{4.29}$$

В этих обозначениях вклад в градиент n -го наблюдения равен $G_n = \xi_n Q_n + \frac{1}{2}\nu_n S_n$. Поскольку условно по прошлой информации Ω_n вектора Q_n и S_n являются детерминированными, то

$$\hat{\Sigma}_n = M\left(G_n^T G_n \mid \Omega_n\right) = M\left[\left(\xi_n Q_n + \frac{1}{2}\nu_n S_n\right)^T \left(\xi_n Q_n + \frac{1}{2}\nu_n S_n\right) \mid \Omega_n\right]. \tag{4.30}$$

Несложно показать, что $E(\xi_n^2) = 1$, $E(\xi_n \nu_n) = 0$, $E(\nu_n^2) = 2$. Отсюда:

$$\hat{\Sigma}_n = Q_n^T Q_n + \frac{1}{2} S_n^T S_n. \tag{4.31}$$

Ниже подробно разбирается, как вычислять градиенты $d\sigma_n^2/d\theta$ и $d\varepsilon_n/d\theta$, которые нужны для вычисления Q_n и S_n.

Искусственная регрессия.

Эти преобразования показывают, что r -й шаг итерационного алгоритма (4.21) имеет в данном случае вид:

$$\Delta^r = \theta^{r+1} - \theta^r =$$
$$= \left(Q^{r^T} Q^r + \frac{1}{2} S^{r^T} S^r\right)^{-1} \left(Q^{r^T} \xi^r + \frac{1}{2} S^{r^T} \nu^r\right), \qquad (4.32)$$

где Q_t, S_t, ξ_t, ν_t – матрицы и вектора, составленные из Q_t, S_t, ξ_t, ν_t соответственно. Шаг этого алгоритма, как несложно увидеть, можно вычислить с помощью следующей регрессии:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \frac{1}{2}\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{1}{2}S \end{pmatrix} \Delta + \textbf{остатки}\,. \qquad (4.33)$$

Заметим также, что оценка ковариационной матрицы в этой регрессии, полученная на последней итерации (когда метод сошелся), является состоятельной оценкой ковариационной матрицы оценок максимального правдоподобия в GARCH-модели:

$$D(\hat{\theta}) = \frac{\xi^T \xi + \frac{\nu^T \nu}{2}}{N} \left(Q^T Q + \frac{S^T S}{2}\right)^{-1}. \qquad (4.34)$$

Таким образом, эта регрессия представляет собой то, что называется *искусственной регрессией*.

В качестве критерия остановки можно взять нецентральный коэффициент детерминации из искусственной регрессии:

$$R_{nc}^2 = 1 -$$
$$- \frac{\textbf{сумма квадратов остатков}}{\textbf{сумма квадратов зависимой переменной}}. \qquad (4.35)$$

Можно считать, что метод сошелся, если регрессия практически не объясняет зависимую переменную, т.е. если величина R_{nc}^2 мала $R_{nc}^2 < \phi$. На практике неплохо работает правило остановки с $\phi = 10^{-11}$.

Вычисление градиентов остатков.

Для полного описания алгоритма требуется указать способ вычисления градиентов $d\sigma_n^2/d\theta$ и $d\varepsilon_n/d\theta$.

Поскольку по определению:

$$\varepsilon_n(\theta) = y_n - C - \sum_{i=1}^{R} AR_i y_{n-i} -$$
$$- \sum_{j=1}^{M} MA_j \varepsilon_{n-j} - \sum_{k=1}^{N_X} \beta_k X(n,k),$$

то

$$\frac{d\varepsilon_n}{d\theta} = (-1, -y_{n-1}, \ldots, -y_{n-R}, -\varepsilon_{n-1}, \ldots, -$$
$$-\varepsilon_{n-M}, -X(n,1), \ldots, -X(n, N_X), 0^T).$$

Если авторегрессоры, скользящие средние и регрессоры отсутствуют, то есть, если y_n – это непосредственно GARCH-процесс ε_n с нулевым математическим ожиданием, то градиент равен нулю и, соответственно, $Q_n = 0^T$. При этом искусственная регрессия упрощается до регрессии $1/\sqrt{2}\nu$ на $1/\sqrt{2}S$ (множитель $1/\sqrt{2}S$ не влияет на оценки регрессии, но должен входить в ковариационную матрицу, поэтому его лучше не отбрасывать).

Вычисление градиентов условных дисперсий.

Обозначим $d\sigma_n^2/d\theta = H_n$. Формулу для этих величин получим, дифференцируя по θ соотношение (4.15).

При $n = min(1, P+1-Q), \ldots, P$ вектор-строка H_n, будет состоять из нулей, только на месте параметра η_n будет стоять 1. При $n > P$ вектор H_n вычисляется рекуррентно:

$$H_n = \frac{d\sigma_n^2}{d\theta} + \sum_{i=1}^{P} G_i H_{n-i} + 2\sum_{j=1}^{Q} A_j \varepsilon_{n-j} \frac{d\varepsilon_{n-j}}{d\theta},$$
$$n = P+1, \ldots, N. \qquad (4.36)$$

Здесь $d\sigma_n^2/d\theta$ – непосредственная производная условной дисперсии по параметрам:

$$\frac{d\sigma_n^2}{d\theta} =$$
$$= \begin{array}{ccccccccc} A & AR & MA & \beta & k & G & A & \eta \\ (0 & 0^T & 0^T & 0^T & 1 & \sigma_{n-1}^2, \ldots, \sigma_{n-P}^2 & \varepsilon_{n-1}^2, \ldots, \varepsilon_{n-Q}^2 & 0^T)\end{array}.$$

Сверху в формуле подписаны параметры, по которым берется производная.

Начальные приближения.

В алгоритме большую роль играет выбор начальных приближений параметров $\theta = \theta^0$. Неправильный выбор может вызвать переполнение при вычислениях. Можно предложить следующие начальные приближения. Начальные приближения константы $C^0 = 0$, авторегрессоров $AR^0 = 0$ и скользящего среднего $MA^0 = 0$. Для вектора коэффициентов регрессии β можно использовать оценки обычного метода наименьших квадратов:

$$\beta^0 = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y. \qquad (4.37)$$

Затем на основе остатков из регрессии можно вычислить оценку безусловной дисперсии:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^2. \qquad (4.38)$$

Параметры G_i^0 и A_j^0 выбираются положительными и такими, что $1 - \sum_{i=1}^{P} G_i^0 - \sum_{j=1}^{Q} A_j^0 > 0$. Можно взять, например, $G_i^0 = \frac{1}{4P}$ и $A_j^0 = \frac{1}{4Q}$ (при $Q > 0$). Другой вариант – выбирать G_i^0 и A_j^0 случайно.

Затем на основе оценки безусловной дисперсии и коэффициентов G_i^0 и A_j^0 вычисляется начальное приближение для k:

$$k^0 = \hat{\sigma}^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{P} G_i^0 - \sum_{j=1}^{Q} A_j^0\right). \qquad (4.39)$$

В качестве начальных приближений параметров η_n можно взять оценку безусловной дисперсии: $\eta_n^0 = \hat{\sigma}^2$.

Алгоритм вычислений.

Сначала вычисляются начальные приближения параметров. Следует следить, чтобы они оказались в допустимой области, т.е. вычисленные на их основе условные дисперсии все были положительными.

После этого идут итерации:

1. Вычислить остатки по формуле (4.36).
2. Вычислить условные дисперсии σ_n^2 по рекуррентной формуле (4.15).
3. Вычислить градиенты остатков $d\varepsilon_n/d\theta$.
4. Вычислить градиенты условных дисперсий H_n .
5. Вычислить Q,S,ξ,ν .
6. Оценить искусственную регрессию и получить направление изменения параметров Δ .
7. Проверить выполнение правила остановки ($R_{nc}^2 < \phi$).
8. Выбрать коэффициент λ так, чтобы новое значение параметров $\theta^{r+1} = \theta^r + \lambda\Delta^r$ оказалось в допустимой области и давало больший уровень функции правдоподобия, чем θ^r , т.е. $l(\theta^{r+1}) > l(\theta^r)$.
9. Начать новую итерацию.

После того, как итеративный алгоритм сойдется, на основе ковариационной матрицы из искусственной регрессии вычисляются стандартные ошибки параметров и t-статистики по обычным формулам.

В результате процесса оптимизации получились оценки параметров, представленные в табл. 4.4.

Таблица 4.4.

ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ.

Параметр	Оценка	Ошибка	t-статистика
C	0.0017581	0.00078987	2.2257
k	0.00017939	4.4601e-005	4.0222
G_1	0.53882	0.10324	5.2188
A_1	0.15942	0.035038	4.5498

Подставив полученные оценки параметров в формулы, определяющие выбранную модель, получим модель условного среднего с GARCH(1,1) процессом в ошибке, наиболее подходящую исходным данным:

$$y_t = 0{,}0017581 + \varepsilon_t ,$$

$$\sigma_t^2 = 0{,}00017939 + 0{,}53882\sigma_{t-1}^2 + 0{,}15942\varepsilon_{t-1}^2 .(4.40)$$

4.4. ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

После выполненной оценки параметров необходимо проверить модель на адекватность статистическим данным. Вначале изучим взаимосвязь между остатками модели, условными стандартными отклонениями (УСО) и исходными доходностями, представленными на рис. 4.6.

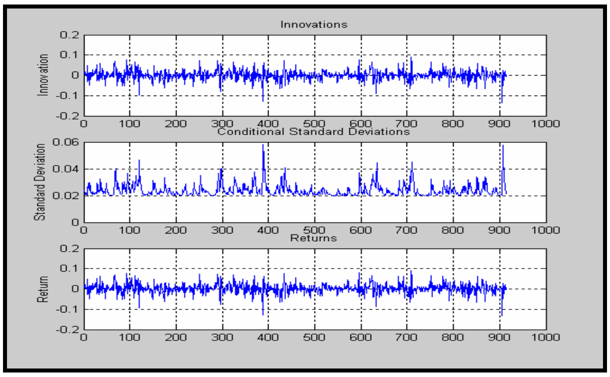

Рис. 4.6. Остатки модели, УСО и доходности

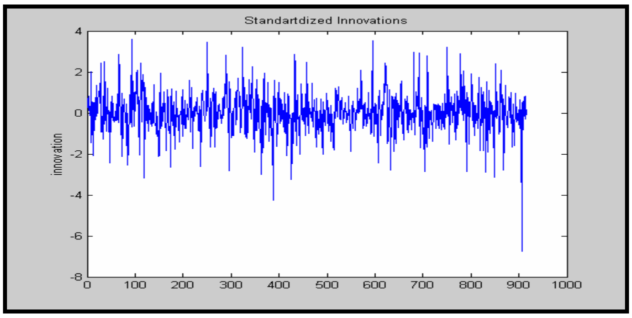

Рис. 4.7. Стандартизированные остатки

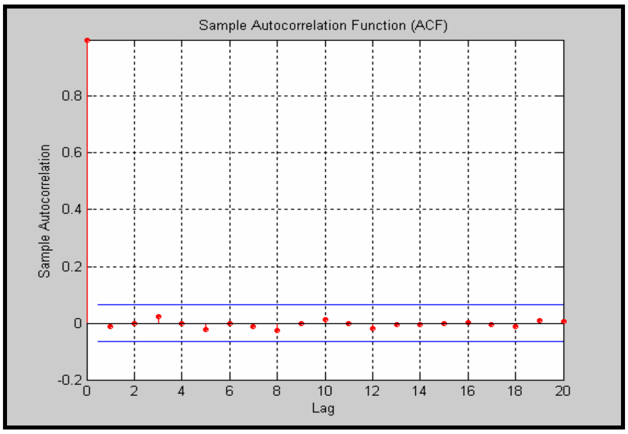

Рис. 4.8. АКФ квадратов стандартизированных остатков

Хотя остатки модели (верхний график рис. 4.6) обнаруживают кластеры волатильности в своих значениях, заметим, что стандартизированные остатки (остатки, деленные на их стандартное отклонение) показывают малую «кластерность» волатильности (рис. 4.7).

С помощью автокорреляционной функции проверяем стандартизированные остатки модели на присутствие остаточной гетероскедастичности.

Диаграмма автокорреляционной функции, представленная на рис.4.8, не обнаруживает ARCH-эффектов в значениях стандартизированных остатков. Это дает нам возможность утверждать, что оцененная модель на качественном уровне адекватна исходным данным. Для количественной оценки адекватности модели используем LBQ и ARCH тесты стандартизированных остатков.

Таблица 4.5.

LBQ ТЕСТ КВАДРАТОВ СТАНДАРТИЗИРОВАННЫХ ОСТАТКОВ

Лаг	Нулев. гипотеза	Вероят-ность	*Q* - статистика	Крит. знач.
10	Не отвергается	0.9954	2.1102	18.3070
15	Не отвергается	0.9999	2.5450	24.9958
20	Не отвергается	1.0000	2.7755	31.4104

Таблица 4.6.

ARCH ТЕСТ КВАДРАТОВ СТАНДАРТИЗИРОВАННЫХ ОСТАТКОВ

Лаг	Нулев. гипотеза	Вероят-ность	TR^2 - статистика	Крит. знач.
10	Не отвергается	0.7055	7.2103	18.3070
15	Не отвергается	0.6317	12.6191	24.9958
20	Не отвергается	0.8763	13.0245	31.4104

Нулевая гипотеза не отвергается для всех лагов LBQ и ARCH тестов, представленных в табл.4.6 и табл.4.7, соответственно. Этот факт указывает на то, что в стандартизированных остатках оцененной модели нет значимых ARCH-эффектов, и это, в свою очередь, позволяет нам утверждать, что модель условного среднего с GARCH(1,1) процессом в ошибке по формуле (4.40) адекватно отражает динамику финансового временного ряда, соответствующего доходностям обыкновенных акций АО «Газпром», и может эффективно использоваться для оценки и прогноза волатильности этих акций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования решены следующие задачи: проведен анализ финансовых рисков с учетом вида экономического субъекта, подверженного риску, специфики его деятельности на финансовом рынке; произведена классификация основных методов управления финансовыми рисками и соответствующих им финансовых инструментов; построена математическая модель количественной оценки финансовых рисков и их управления, позволяющая анализировать финансовое состояние экономического субъекта с учетом его финансовых рисков; проведено исследование динамических свойств финансовых потоков, возникающих при моделировании искусственных финансовых инструментов; разработана новая методика управления финансовым риском, позволяющая минимизировать возможные будущие потери без дополнительных затрат; исследовано влияние ошибки в оценках параметров математической модели на результаты управления финансовыми рисками; экспериментальным путем проверена возможность применения созданной методики страхования финансовых рисков на фондовом рынке России (на примере акций Газпрома); разработана модель прогнозирования будущей волатильности финансового актива, позволяющая получать более эффективные результаты управления финансовыми рисками; получены результаты экспериментальных исследований, показывающие важность правильного прогноза будущей волатильности для оценки финансового риска и его динамического управления.

Выводы

1. Влияние риска на финансовую деятельность существенно зависит от вида экономического субъекта, подверженного данному финансовому риску. Основными действующими лицами финансовой системы являются домохозяйства, фирмы и правительственные организации. Домохозяйства занимают особое место, поскольку согласно теории финансов конечная функция финансовой системы – способствовать формированию оптимальной структуры потребления и размещения ресурсов домохозяйств в различные активы. Экономические субъекты, такие как компании и правительство, существуют с той целью, чтобы облегчать реализацию этой конечной функции. Таким образом, финансовые риски, характерные для домохозяйств, отличаются от рисков, присущих для деятельности фирм и правительственных организаций.

2. В условиях, когда избежать риска или предотвратить полностью ущерб нельзя, а принятие риска на себя несет существенные финансовые издержки, наиболее важным приемом управления риском становится перенос риска на другие лица. Все методы переноса финансовых рисков могут быть классифицированы по возможности получения прибыли в результате уменьшения финансового риска на следующие три группы: хеджирование, страхование, диверсификация.

3. В работе показано, что опционы и страховые полисы для покупателя являются финансовыми инструментами одного типа, позволяющими полностью избежать риска убытков, но оставляющие при этом возможность получения прибыли в благоприятном случае. Для этих инструментов приведен сравнительный анализ их характеристик, дающий возможность работать с опционами как со страховыми договорами.

4. Построенная математическая модель оценки финансовых рисков обобщает имеющиеся на практике методики оценки финансовых рисков и позволяет проводить сравнение оценок с целью более успешного принятия решения в финансовой деятельности хозяйствующего субъекта. Введенные в диссертации относительные величины возможного ущерба могут быть использованы в качестве оценки финансового риска без учета абсолютной величины резервного капитала.

5. В рамках построенных математических моделей оценки финансового риска в диссертации рассмотрена концепция оценки риска дисперсией или средним квадратическим отклонением. Результатом данного исследования сделан вывод, что в некоторых случаях оценка риска этими числовыми характеристиками случайной величины не несет никакой информации о величине самого риска и не может быть использована для принятия решений.

6. Оценки финансовых рисков, связанных с изменением цен на фондовом рынке, удобно вычислять, делая расчет ожидаемой величины платежей опционов, если этот форвардный контракт полностью страхует от данного риска. В этом случае следует пользоваться биномиальными или логнормальной моделями эволюции цены акции на фондовом рынке.

7. В работе предложена инвестиционная стратегия, способная в динамике продублировать денежные платежи по опциону, происходящие на бирже. Данная стратегия после первоначального вложения денежных средств основана на полном самофинансировании. Достоинством приведенной методики является то, что покупателю опциона не нужно находить контрагента. Он может сам использовать стратегию динамического хеджирования для страхования своих активов. В этом случае в качестве

контрагента выступает весь фондовый рынок, участники которого берут на себя финансовые риски падения котировок рискового актива.

8. Исследования зависимости динамики финансовой стратегии, дублирующей поток платежей для пут-опциона на акцию Газпрома, от изменения параметров модели управления показали, что крайне актуальной для такой модели динамического управления финансовым риском является правильная оценка логарифмической волатильности базового актива. Более того, удобным для управления данным портфелем является метод динамической коррекции волатильности во времени.

9. Результаты проведенного эксперимента по управлению финансовым риском на основе предложенной методики показали возможность использования данной стратегии динамического управления риском.

10. Финансовые временные ряды имеют устойчивые эмпирические закономерности. Эти закономерности выявлены и формализовано описаны в ходе диссертационного исследования. Разработанная автором методика моделирования рядов доходностей финансовых инструментов, используя условно-гауссовские модели, позволяет получать оценки и прогнозы условной дисперсии (волатильности) исследуемых финансовых временных рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. – М.: Статистика, 1983.
2. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и эконометрика. – М.: ЮНИТИ, 1998.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976.
4. Балабанов И.Т. Риск – менеджмент. – М.: Финансы и статистика, 1996. – 188 с.
5. Балабанов И.Т. Основы финансового менеджмента. Как управлять капиталом? – М.: Финансы и статистика, 1995. – 384 с.
6. Балабушкин А.Н. Опционы и фьючерсы. М.: 1996. – 176 с.
7. Берзон Н.И., Буянова Е.А., Кожевников М.А., Чаленков А.В. Фондовый рынок: Учебное пособие для высших учебных заведений экономического профиля. – М.: Бита – Пресс, 1998. – 400 с.
8. Боди З., Мертон Р. Финансы./ Перев. с англ. – М.: «Вильямс», 2000. – 592 с.
9. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – Вып. 1, 2.
10. Бочаров В.В. Финансово – кредитные методы регулирования рынка инвестиций. – М.: 1993. – 144с.
11. Бригхем Ю., Гапенски Л. Финансовый менеджмент. Полный курс. / Пер. с англ. под ред. В.В. Ковалева. – СПб.: «Экономическая школа», 1997.
12. Бриллинджер Д. Временные ряды: обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980.
13. Буренин А.Н. Фьючерсные, форвардные и опционные рынки. – М.: Тривола, 1995. – 240 с.
14. Ван Хорн Дж. К. Основы управления финансами: Пер. с англ./ Гл. ред. серии Я.В. Соколов. – М.: Финансы и статистика, 1996. – 800 с.
15. Васильев В.А., Летчиков А.В. Управление финансовыми рисками: основные понятия и математические модели. – Екатеринбург–Ижевск: Изд-во Института Экономики УрО РАН, 2004. – 104 с.
16. Винс Р. Математика управления капиталом. Методы анализа рисков для трэйдеров и портфельных менеджеров. – М: Альпина Паблишер, 2001. – 400 с.
17. Волков Е.А. Численные методы – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.
18. Воронцовский А.В. Инвестиции и финансирование. Методы оценки и обоснования. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. – 528 с.
19. Воронцовский А.В. Методы обоснования программ инвестиционной деятельности. // Вестник СПбГУ. Сер.5. 1996. Вып.2. С.62-70.
20. Воронцовский А.В. Обоснование программ инвестиций и кредитования. // Известия СПбУЭФ. 1996. N 4.
21. Воронцовский А.В. Основы теории выбора портфеля ценных бумаг // Вестник СПбГУ. Сер.5.Вып.1 С.83-94.
22. Галиц Л. Финансовая инженерия: инструменты и способы управления финансовым риском. – М: ТВП, 1998. – 576 с.
23. Доугерти К. Введение в эконометрику: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2001. – XIV, 402 с.
24. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963.
25. Жуков Е.Ф. Ценные бумаги и фондовые рынки: Учебное пособие для вузов. – М.: банки и биржи, ЮНИТИ, 1995. – 224 с.
26. Капитоненко В.В. Финансовая математика и её приложения: Учебное пособие для вузов. – М.: Изд-во ПРИОР, 2000. – 144 с.
27. Капитоненко В.В. Инвестиции и хеджирование: Учебно – практическое пособие для вузов. – М.: Изд-во ПРИОР, 2001. – 240 с.
28. Ковалев В.В. Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. – М.: Финансы и статистика, 1995. – 432.
29. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
30. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: Изд. «Питер», 2000.
31. Кочетыгов А.А. Финансовая и актуарная математика: Учебное пособие, Тул. Гос. Ун-т. 1998. – 200 с.
32. Кочетыгов А.А. Финансовая математика: Серия «Учебники, учебные пособия». – Ростов на Дону: Изд-во «Феникс», 2004. – 480 с.
33. Кочович Е. Финансовая математика. Теория и практика финансово – банковских расчетов: Пер. с серб./Предисловие Е.М. Четыркина. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 268 с.
34. Крейнина М.Н. Финансовый менеджмент: Учебное пособие. – М.: Изд – во «Дело и сервис», 2001. – 400 с.
35. Кудрявцев А.А. Актуарные модели финансовой устойчивости страховых компаний. СПб.: Институт страхования, 1996.
36. Лётчиков А.В. Лекции по финансовой математики. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 240 с.
37. Лобанова Е.Н., Лимитовский М.А. Финансовый менеджмент. – М.: Изд-во консалтинг. Компании Дека, 2000. – 194 с.
38. Лукасевич И.Я. Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1998. – 400 с.
39. Лукашин Ю.П. Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг // Экономика и матем. методы. – 1995. – Т. 31 Выпуск 1. – С. 139 – 149.
40. Лукашин Ю.П. Нетрадиционный корреляционный анализ временных рядов// Экономика и матем. методы. – 1992. – Т. 28 Выпуск 3. – С. 406 – 413.
41. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. М.: Дело, 1998.
42. Маркарьян Э.А., Герасименко Г.П. Финансовый анализ. – М.: ПРИОР, 1996. – 160 с.
43. Мелихов М.Б., Кочетыгов А.А. Моделирование и анализ стохастических процессов в экономике. Учебное пособие. М.: Изд-во МГУК, 2000. – 363 с.
44. Мельников А.В. Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. – М.: ТВП, 1997.
45. Меньшиков И.С. Финансовый анализ ценных бумаг: Курс лекций. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 360 с.
46. Меньшиков И.С., Шелагин Д.А. Рыночные риски: Модели и методы. – М.: Вычислительный центр РАН, 2000 – 53 с.

47. Найт Френк. Понятия риска и неопределенности. Пер. с англ. / TESIS 1994 Вып.5. С.12-28.
48. Новоселов А.А. Математическое моделирование финансовых рисков. Теория измерений. – Новосибирск: Наука, 2001.
49. О'Брайен Дж., Шривастава С. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами (FAST): Пер. с англ. – М.: «Дело ЛТД», 1995. – 208 с.
50. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: Расчет и риск. – М.: ИНФРА – М, 1994. – 192 с.
51. Петраков Н.Я. Ротарь В.И. Фактор неопределенности и управление экономическими системами. – М.: Наука, 1985.
52. Радионов Н.В., Радионова С.П. Основы финансового анализа: Мате-матические методы, системный подход. – СПб.: Альфа, 1999. – 592 с.
53. Рогов М.А. Риск-менеджмент. – М.: Финансы и статистика, 2001 – 119 с.
54. Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки. – М.: Мир, 1983. – 167 с.
55. Ротарь В.И., Шоломицкий А.Г. Об оценивании риска в страховой деятельности // Экономика и математические методы. – 1996. – Т. 32 Выпуск 1. – С. 96 – 105.
56. Рынок ценных бумаг: Учебник / Под ред. В.А. Галаганова, А.И. Басова. М.: Финансы и статистика, 1998. – 352 с.
57. Рэдхэд К., Хьюс С. Управление финансовыми рисками. М.: Инфра-Мб 1996. (Пер.с англ.: Redhead K., Huhhes S. Financial Risk Management.).
58. Севрук В.Т. Банковские риски. М.: «Дело ЛТД», 1994. – 72 с.
59. Тренев Н.Н. Управление финансами: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 496 с.
60. Уотшем Т.Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах: Учебное пособие для вузов / Пер. с англ. Под ред. Ефимовой М.Р. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999. – 527 с.
61. Усоскин В.М. Современный коммерческий банк. Управление и операции. – М.: ИПЦ «ВАЗАР – ФЕРРО», 1994. – 320 с.
62. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. – М.: Изд-во мех. мат. фак-та МГУ. 1996. – 221 с.
63. Фалин Г.И. Математический анализ рисков в страховании. – М.: Российский юридический издательский дом. 1994. – 130 с.
64. Финансы. Денежное обращение. Кредит: Учебник для вузов / Дробозина Л.А., Окунева Л.П., Андросова Л.Д. и др.; Под ред. проф. Дробозиной. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 479 с.
65. Финансовый менеджмент: теория и практика. Учебник / Под ред. Е.С. Стояновой. – М.: Изд-во перспектива, 1997. – 574 с.
66. Хованов Н.В. Математические модели риска и неопределенности. – СПб.: СПбГУ, 1998.
67. Холт Р. Основы финансового менеджмента. – М.: «Дело», 1993.-128 с.
68. Хорн Дж.К.Ван Основы управления финансами. Пер.с англ. – М.: «Финансы и статистика», 1996. – 800 с.
69. Черкасов В.Е. Финансовый анализ в коммерческом банке. – М.: ИНФРА – М, 1995. – 272 с.
70. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: «Дело ЛТД», 1995. – 320 с.
71. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник. – М.: «Дело ЛТД», 2002. – 400 с.
72. Четыркин Е.М., Васильев Н.Е. Финансово – экономические расчеты: Справочное пособие. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 302 с.
73. Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции. / Пер. с англ. – М.: «Инфра-М», 1997 – 1024 с.
74. Ширинская Е.Б., Пономарева Н.А., Купчинский В.А. Финансово – аналитическая служба в банке: Практическое пособие. – М.: ФКБ – ПРЕСС, 1998. – 144 с.
75. Шеремет А.Д., Сайфулин Р.С. Методика финансового анализа. – М.: ИНФРА – М, 1996. – 196 с.
76. Ширяев А.Н. Стохастические проблемы финансовой математики // Обозрение прикладной и промышленной математики. – М.: ТВП, 1994. Т. 1. №5. С. 780-820.
77. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. – М.: ФАЗИС, 1998. – 512 с.
78. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. – М.: ФАЗИС, 1998. – 544 с.
79. Энгл Р.Ф., Боллерслев Т. ARCH-модели – Handbook of Econometrics Volume 4, Chapter 49, 2000 http://www.elsevier.nl/hes/books/02/04/contents/body0204.htm#chapter49.
80. F. Black, M. Sholes. The pricing of options and corporate liabilities. // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637-659.
81. R.C. Merton. The theory of rational option pricing. // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. No 4. P. 141-183.
82. R.C. Merton. Continuous-Time Finance. – London: Basil Blackwell, 1992.
83. M. Miller, F. Modigliani. The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment. // American Economic Review. 1958. V. 48. P. 261-297.
84. M. Miller, F. Modigliani. Dividend policy, growth, and the valuation of shares. // Journal of Business. 1961. V. 34. P. 411-433.
85. H. Markowitz. Portfolio selection. // Journal of Finance. 1952. V. 7. P. 77-91.
86. H. Markowitz. Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments. – New York: John Wiley & Sons, 1959.
87. M. Kendall. The analysis of economic time-series. Part 1. Prices. // Journal of the Royal Statistical Society. 1953. V. 96. P. 11-25.
88. W. Sharpe. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. --- Journal of Finance. 1964. V. 19. P. 425-442.
89. S.M Ross. The arbitrage theory of capital asset pricing. // Journal of Economic Theory. 1976. V. 13. P. 341-360.
90. S.M. Ross. An elementary introduction to mathematical finance. – Cambridge University Press, 2003. – 253 p.
91. L. Bachelier. Theorie de la speculation. // Annales de l'Ecole Normale Superieure. 1900. V. 17. P. 21-86.
92. P.A. Samuelson. Rational theory of warrant pricing. // Industrial Management Review, 1965, V. 6. P. 13-31.
93. GARCH Model with Cross-sectional Volatility; GARCHX Models / Soosung Hwang. Faculty of Finance City University Business School, December 2001. http://www.city.ac.uk/cubs/ferc/wpapers/garchx7.pdf.
94. A Structured GARCH Model of Daily Equity Return Volatility / Gregory Connor, 2001. http://www.lse.ac.uk/collections/accountingAndFinance/ staff/connor/files/bvgarchgc.PDF
95. ARCH and GARCH Models / Bovas Abraham. Dept of Statistics & Actuarial Sciences University of Waterloo, Canada. 2000. http://www.math.uwaterloo.ca/~schenour/stat929.pdf.
96. Estimating and forecasting volatility of stock indices using asymmetric GARCH models and (Skewed) Student-t densities / Jean-Philippe Peters. Ecole d'Administration des Affaires, University of Liege, Belgium, 2001. http://www.-eaa.egss.ulg.ac.be/rogp/peters/Data/asgarch.pdf.
97. Evaluating the Black-Scholes Model and the GARCH Option Pricing Model / Bin Chang. Queen's University Kingston, Ontario, Canada, August, 2002. http://business.queensu.ca/qfe/docs/Bin_Change_Thesis.pdf.
98. Introduction to ARCH & GARCH models / Roberto Perrelli. Department of Economics University of Illinois, 2001. http://www.econ.uiuc.edu/~econ472/ARCH.pdf.
99. Best's Enterprise Risk Model: A Value-at-Risk Approach / Seabury Insurance Capital, April, 2001 http://www.casact.org/coneduc/specsem/erm/2001/handouts/freestone1.pdf.

Лялин Вадим Евгеньевич