3. ФИНАНСОВЫЙ АНАЛИЗ

3.1. ПРИНЦИПЫ ДВИЖЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Царев И.Г. к.х.н., заместитель начальника отдела

Федеральное агентство по строительству и жилищно-коммунальному хозяйству (Росстрой)

В настоящей работе решается задача записи основных уравнений движения экономической системы в аналитическом виде, а также задача поиска адекватных методов управления движением указанной системы. Для решения поставленных задач использован математический аппарат естественных наук. При этом предлагается единый метод решения, на котором могли бы базироваться основные экономические законы. Речь идет о таких основополагающих концепциях как, например, принцип наименьшего действия Гамильтона в аналитической механике, принцип Ле-Шателье в термодинамике, концепция статистического ансамбля в статистической физике, закон действующих масс в химии и т.д. При этом используется как микроскопический (микроэкономический) подход, когда выписываются уравнения движения для каждого элемента системы (экономического субъекта), так и феноменологический (макроэкономический) подход, когда изучаются основные закономерности явления при помощи общих экономических показателей.

Введение

Данная статья является завершающей в серии из трех работ, две из которых были опубликованы в 3 и 4 номерах журнала АиФА за 2006 год. В указанных работах предложено взглянуть на экономическую науку с точки зрения естественнонаучных дисциплин.

Экономические науки традиционно считаются составной частью общественных наук. В отличие от наук естественных и технических, где многие законы описаны уравнениями, законы общественных наук сформулированы в виде высказываний, либо в форме неравенств. Кроме того, в экономической науке существует «миф», что для описания экономической системы нельзя применять законы, аналогичные законам физики, так как экономическая система намного сложнее, и ее функционирование основано на других принципах. Но ведь никаких «законов физики» в природе не существует, есть законы природы, часть которых выделена в область знания, называемую «физикой». Если мы считаем, что общество является частью природы и принадлежит материальному (а не потустороннему) миру, то законы, сформулированные в различных областях знания, изучающих этот материальный мир, должны быть аналогичны. В свою очередь и экономическая система не может быть сложнее самой природы.

Автор исходит из гипотезы, что поведение различных систем (физических, химических, биологических, экономических и т.д.) основано на общих принципах, в противоположность существующему мнению, что экономическая система слишком сложна и обладает слишком специфическими чертами, чтобы ее описывать с применением математического аппарата естественных наук. Хотя математика используется в экономической науке весьма широко, в то же время, единой концепции, на которой могли бы базироваться основные экономические законы, в экономике не существует. Речь идет о таких основополагающих концепциях как, например, принцип наименьшего действия Гамильтона в аналитической механике, принцип Ле-Шателье в термодинамике, концепция статистического ансамбля в статистической физике, закон действующих масс в химии и т.д. Если применить указанные принципы в экономике в виде аналогичных интегро-дифференциальных уравнений и интерпретировать полученные законы и закономерности таким образом, чтобы они не противоречили известным экономическим законам, то мы не только подтвердим гипотезу общности, но и сможем значительно расширить наши представления о функционировании экономической системы, так как математический аппарат и способы решения различных задач в естественных науках значительно лучше разработаны, чем в науках об обществе. В этом случае полученные результаты будут иметь прорывной характер.

В данной работе ставится задача применить математический аппарат, созданный в свое время для решения физических задач и задач кибернетики, в экономической науке. При этом автор не стремился к математически строгому обоснованию вводимых определений. Впрочем, для экономиста, как и для физика, это в большинстве случаев не так важно, ему нужна лишь уверенность, что строгое доказательство может быть получено.

Экономические теории исследуют с применением математического аппарата состояния равновесия экономических систем и ограничиваются высказываниями, когда речь заходит о кризисах и прочих неустойчивых состояниях в экономике. Дифференциальные уравнения, которые адекватным образом описывают неустойчивые состояния, заведомо нелинейны. Сам математический аппарат, соответствующий всему циклу нелинейных систем, существует давно. Он заложен в знаменитых работах Пуанкаре и Ляпунова, преследовавших, правда, совершенно другие цели. Аппарат этот существенно труднее и сложнее, чем линейный, гораздо менее разработан, и конечно, гораздо менее привычен, и это лежит в природе вещей.

Так как природа бесконечно сложна, то при всяком теоретическом исследовании какого-либо реального явления мы всегда вынуждены в большей или меньшей степени упрощать, идеализировать наблюдаемый процесс. В первую очередь мы стремимся учесть основные решающие факторы, определяющие именно те черты процесса, которые нас в данное время интересуют. Мы заменяем бесконечно сложное природное явление некой моделью, которая, по нашему мнению, позволит нам адекватно описать и исследовать интересующий нас процесс. Ответ на вопрос о том, как далеко мы можем идти в этом направлении и все же получить удовлетворительные результаты, может дать, в конечном счете, только опыт. Как подчеркивали Л.И. Мандельштам и А.А. Андронов, выбор такой идеализации очень часто далеко не тривиален и требует глубокого понимания сущности происходящих явлений.

Заметим, что указания о допустимости той или иной идеализации могут быть получены не только из сравнения результатов теоретического рассмотрения с данными опыта, но и из сопоставления результатов двух различных теорий, одна из которых развита с использованием данной идеализации, а другая – без этой идеализации. Общеизвестно, что когда удается подобрать удачную математическую модель для описания какого-либо реального процесса, то полученное описание, в свою очередь, позволяет по-новому взглянуть на изучаемое явление, обратить внимание на те стороны процесса, которые до этого находились в тени.

Чтение работы не предусматривает специальной математической подготовки. Все основные пояснения даны в тексте, а в конце статьи даны подробные математические приложения.

1. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ В ЭКОНОМИКЕ

1.1. Определение принципа наименьшего действия

Любое экономическое событие должно происходить в неком пространстве. Пространство экономической системы подробно определено в работе [Царев, 2006, 4]. В качестве координат $\left(\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\ldots,\boldsymbol{n}\right)$ этого пространства $\boldsymbol{R}^n$ выбраны количества благ (активов, товаров) нашей системы, выраженные в неких условных единицах, а также дополнительные координаты $\left(\dot{\boldsymbol{q}}_i, \boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\ldots,\boldsymbol{n}\right)$, количества благ (активов, товаров) нашей системы, которые производятся и потребляются в системе за определенный промежуток времени (единицу времени).

Пространство $\boldsymbol{R}^{2n}$ координат $\left(\boldsymbol{q}_i, \dot{\boldsymbol{q}}_i\right)$ называется *фазовым пространством*. Выбранные значения координат *полностью* определяют *состояние* системы или точку в пространстве, называемую *изображающей точкой*. Движение системы (ее изображающей точки) в пространстве описывается *фазовой траекторией* – геометрическим местом точек, где система побывала за время своего движения. Траектории пространства $\boldsymbol{R}^n$ могут пересекаться, так как в заданной точке система может иметь разные скорости, и ее состояние определено не полностью. Фазовые траектории никогда не пересекаются, так как в каждой точке состояние системы определено однозначно, и, следовательно, однозначно задано дальнейшее движение. Таким образом, не требуется задания никаких производных более высокого (чем нулевой и первый) порядка, например, $\ddot{q}_i, \dddot{q}_i$, для полного описания движения системы. Этот нетривиальный факт является законом природы. Когда координаты полностью определяют систему (полностью описывают именно те характеристики системы, которые важны для нас), то говорят, что выбранные координаты *существенны*.

Вариационное исчисление занимается отысканием экстремумов (минимумов и максимумов) функций, область определения которых – бесконечномерное пространство – пространство кривых. Экстремум какой-либо функции, заданной на бесконечномерном пространстве кривых находится при помощи специального метода – метода варьирования.

Рассмотрим движение произвольной системы (в том числе экономической) из одной точки пространства в другую. Вообще говоря, система может совершить этот переход по разным траекториям, каждая из которых представляет собой некую кривую. Возможный набор траекторий задается уравнениями динамической системы и может быть, бесконечным. Однако при «обычных условиях» (т.е. в большинстве случаев, кроме некоторых исключительных) система будет двигаться таким образом, чтобы длина этой кривой была минимальной из всех возможных. Этот принцип движения динамической системы, который также является законом природы, носит название «*принцип наименьшего действия Гамильтона*». С точки зрения принципа наименьшего действия природа достигает своей цели прямейшим путем, следовательно, с наименьшей затратой средств. Поэтому более удачен был бы термин «принцип наименьшей затраты средств при наибольшем действии». Но после того, как термин «действие» санкционирован Гельмгольцем и Планком, всякая замена его другим термином была бы бесперспективной.

В исторически более ранней трактовке принцип наименьшего действия был сформулирован в виде, так называемого, принципа Мопертюи, однако мы остановимся на принципе наименьшего действия Гамильтона, а рассмотрение принципа Мопертюи сделаем ниже.

Так как длина траектории из точки (***0***) в точку (***1***) является некой функцией $\boldsymbol{\Phi}$ координат $\boldsymbol{q}_i$, которые, в свою очередь, являются функциями времени $\boldsymbol{t}$, то мы можем записать:

$$\boldsymbol{\Phi}(q_i) = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt\,, \qquad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\Phi}$ называется *функционалом* $\boldsymbol{L}$ или *действием*, а функция $\boldsymbol{L}$, называемая *функцией Лагранжа* или *лагранжианом* такова, что действие $\boldsymbol{\Phi}$ имеет минимальное значение из всех возможных. Это минимальное значение функционала $\boldsymbol{\Phi}$ называется его *экстремалью*. Тот факт, что функция Лагранжа содержит только $\boldsymbol{q}_i$ и $\dot{\boldsymbol{q}}_i$, но не более высокие производные, является выражением приведенного выше утверждения, что состояние системы полностью определяется заданием координат и скоростей.

Выясним, как меняется значение функционала при переходе от экстремальной траектории к другой, достаточно близкой. Эта близкая траектория может быть получена путем малой «деформации» экстремали, как говорят, с помощью варьирования (рис. 1).

При этом все $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$, т.е. при варьировании экстремали начальная и конечная точки остаются неподвижными. Время также не варьируется, т.е. $\delta t = 0$.

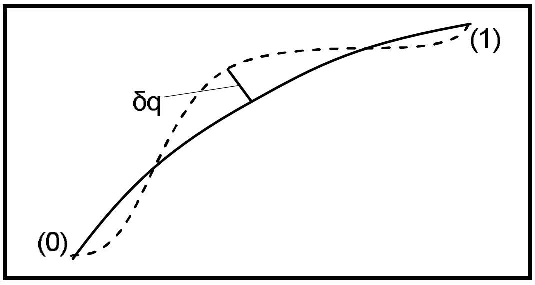

Рис. 1. Вариация траектории

Необходимым условием экстремальности функции является обращение в нуль совокупности членов ее дифференциала.

$$\delta\Phi = 0 = \delta\int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt = \sum_i \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt =$$

$$= \sum_i \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\right)dt\,. \qquad (1.2)$$

Интегрируя по частям второй подынтегральный член

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \delta q_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right), \qquad (1.3)$$

получим:

$$\delta\Phi = 0 = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Bigg|_{t_0}^{t_1} + \sum_i \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i\,dt\,. \qquad (1.4)$$

Первый член равен нулю в силу задания граничных условий $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$. Остается интеграл, который должен быть равен нулю при произвольных и независимых значениях δq_i. Это возможно только в том случае если подынтегральное выражение тождественно обращается в нуль.

Таким образом, мы получаем уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,. \qquad (1.5)$$

Эти дифференциальные уравнения называют *уравнениями Эйлера-Лагранжа* для функционала $\boldsymbol{\Phi}$. Они устанавливают связь между ускорениями, скоростями и координатами, т.е. представляют собой *уравнения движения системы* независимо от ее типа.

Принципом наименьшего действия движение динамической системы определяется полностью: путем решения следующих из этого принципа уравнений движения можно найти как форму траектории, так и зависимость положения на траектории от времени.

1.2. Экономический смысл принципа наименьшего действия

Существенным свойством экономической системы является наличие двух полюсов общественного воспроизводства – производства и потребления. Между двумя этими полюсами происходит процесс реализации – распределение и обмен произведенных благ.

Определим первый член уравнений (1.5) Эйлера-Лагранжа $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ как ответственный за «полюс производства», а второй член $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ как ответственный за «полюс потребления».

Введем величину $\dot{p}_i$

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad (1.6)$$

где p_i – цена.

В первом случае $\dot{p}_i$ определим как первую производную по времени цены предложения, а во втором – как первую производную по времени цены спроса.

Таким образом, принцип наименьшего действия в экономической системе отражает *общее экономическое равновесие*, т.е. ситуацию, при которой на всех рынках одновременно достигается равенство между спросом и предложением. В результате переход системы из одного состояния в другое совершается по кратчайшему пути, т.е. спрос и предложение растут максимально быстро.

В процессе развития (движения) экономической системы не все произведенные блага потребляются, некоторые могут накапливаться. В первую очередь это относится к тем благам, которые могут быть использованы многократно (ликвидные активы – наличные деньги, золото, депозиты; товары длительного пользования; недвижимость; земля и т.д.), однако могут накапливаться и блага, используемые в потреблении только один раз, если они имеют достаточный срок хранения без потери их потребительских свойств. Совокупность этих накопленных активов, принадлежащих субъектам экономической системы, образует *богатство*. Общий запас богатства страны определяется показателем так называемого «реализуемого имущества», под которым понимаются физические и финансовые активы, характеризующиеся достаточно высоким уровнем ликвидности (быстрой реализуемости). *Величина накопленного со временем богатства вычисляется как функционал* Φ. При наиболее быстром развитии экономической системы, когда спрос и предложение растут с максимальной скоростью, богатство системы принимает минимальное значение из всех возможных (является экстремалью функционала).

Как мы уже знаем из [Царев, 2006, 4], можно произвести замену координат в нашей системе. Мы можем перейти от координат $(\dot{q}_i, q_i)$ к координатам $(\dot{q}_i, p_i)$ или координатам (q_i, p_i), которые также будут независимыми и существенными. Какую систему координат использовать в дальнейшем, будет определяться только соображениями удобства рассмотрения. При этом

$$p_i = \sum_j \alpha_{ij}\dot{q}_j, \qquad (1.7)$$

$$TR = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad (1.8)$$

где TR – общая выручка (доход).

С другой стороны мы определили (1.6) член $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ уравнений Эйлера-Лагранжа как первую производную по времени и цены предложения, т.е. для цены предложения мы можем записать следующее уравнение:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (1.9)$$

Тогда с точностью до произвольной функции координат мы можем записать выражение для функции Лагранжа, которое одновременно является выражением для общей выручки, при этом без ограничения общности считаем, что $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$:

$$L = \frac{TR}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j. \qquad (1.10)$$

Непосредственная проверка при дифференцировании этого выражения по $\dot{q}_i$ дает уравнение (1.7).

Мы получили, что общая выручка представляется в виде однородной функции второй степени (квадратичной формы) от выпусков благ. Аналогичная форма в механике называется кинетической энергией. Эта форма всегда невырождена, т.е. определитель, составленный из ее коэффициентов, отличен от нуля. В противном случае матрица α_{ij} имеет, по крайней мере, два совпадающих собственных значения и часть координат $\dot{q}_i$ будет зависима.

Если мы запишем функцию Лагранжа как разницу функции TR и некой функции координат TB

$$L = 1/2\left(TR(\dot{q}_i) - TB(q_i)\right), \qquad (1.11)$$

то легко проверить, что уравнение (1.5) выполняется. Частная производная функции координат TB по скорости всегда обращается в нуль.

Подставив это выражение в уравнения Эйлера-Лагранжа (1.6) найдем, что

$$\dot{p}_i = \frac{1}{2}\frac{\partial TB}{\partial q_i}, \qquad (1.12)$$

где p_i – цена спроса.

Подобно тому, как функция TR является аналогом кинетической энергии в механике, функция TB является аналогом потенциальной энергии. Но в отличие от функции TR, функция TB в экономической теории не определена. Мы можем определить эту функцию как стоимость объема купленного блага или функцию общего закупа TB (total buying). Эта функция координат, по сути, отражает скорость потребления созданного богатства и является способом воспроизводства человеческого общества. В этом смысле мы можем говорить о том, что потребленные блага не утрачиваются бесследно, они воспроизводят человеческую жизнь.

Если функция общей выручки во всех точках пути экономической системы равна функции закупа, то функция Лагранжа всегда равна нулю, и система заведомо движется по экстремали. Однако в реальной экономической системе эта ситуация невозможна, потому что не все произведенные блага потребляются, часть из них накапливается в виде богатства.

Разложим функцию закупа в ряд по степеням координат в ее экстремальной точке, которую примем за начало координат. В этой точке первые производные обращаются в нуль. Если положение системы выбрано достаточно близким к началу координат, то мы можем ограничиться только членами второго порядка, а члены более высокого порядка отбросить

$$TB = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 TB}{\partial q_i \partial q_j} \mu_{ij} q_i q_j = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} q_i q_j . \qquad (1.13)$$

Другими словами, эта функция также представляет собой однородную функцию второй степени относительно координат.

1.3. Принцип Мопертюи и интегралы движения

Рассмотрим значение дифференциала функционала (1.4) не только в начальной и конечной точках, а в произвольной промежуточной точке. Подынтегральное выражение (второй член дифференциала действия) и член $\delta q_i(t_0)$ по-прежнему тождественно обращаются в нуль, а δq_i по определению является произвольной дифференцируемой функцией, принимающей малые значения. Если мы отбросим эти члены, то мы оставим в стороне временную часть задачи и установим для этой цели упрощенную форму принципа наименьшего действия. Тогда

$$\delta\Phi = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i . \qquad (1.14)$$

Мы определили цену предложения (1.9) как $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$.

Получаем выражение

$$\delta\Phi = \sum_i p_i \delta q_i . \qquad (1.15)$$

Интеграл вида

$$\Phi = \int_{q_0}^{q_1} \sum_i p_i dq_i \qquad (1.16)$$

для упрощенной формы принципа наименьшего действия называют *укороченным действием*. Когда вектор состояния q_1 является конечной точкой траектории, то $\delta\Phi = 0$.

Укороченное действие позволяет нам вычислять интегральную функцию Φ с использованием функций цены и количества благ, вместо интегрирования функции Лагранжа по времени.

Получающийся таким образом вариационный принцип определяет траекторию системы; этот принцип называют обычно принципом *Мопертюи*. Впервые в несколько туманной формулировке этот принцип был сформулирован Мопертюи в 1747 г. Ему указали на письмо Лейбница, относящееся к 1707 г. (оригинал этого письма не сохранился), но он ревностно защищал свой приоритет, не останавливаясь даже перед использованием своей власти в качестве президента Берлинской академии. Однако более определенную математическую форму принципу придали только Эйлер и, в особенности, Лагранж в 1760 г.

Когда мы рассматриваем варьируемую траекторию в произвольной промежуточной точке, то исходя из определения функционала и выражения (1.14), мы можем записать

$$L = \frac{d\Phi}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial t} . \qquad (1.17)$$

Обозначим $H = -\partial\Phi/\partial t$ и окончательно получим

$$L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - H = \sum_i p_i \dot{q}_i - H . \qquad (1.18)$$

Если мы подставим полученное выражение в уравнение (1.6), то получим следующие уравнения:

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} ;$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} . \qquad (1.19)$$

Полученные выражения называются в физике *уравнениями Гамильтона* или *каноническими уравнениями*, а величину H – гамильтонианом.

Если лагранжиан является функцией координат и скоростей $L(q_i, \dot{q}_i)$, то гамильтониан является функцией координат и импульсов $H(q_i, p_i)$. Переходя к гамильтониану, мы тем самым производим замену координат.

Для однородной функции $f(q_i)$ n-ой степени имеет место формула Эйлера: $\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} q_i = nf$, тогда, исходя из уравнения (1.10), получим

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2L = TR . \qquad (1.20)$$

Тогда, исходя из (1.18) и (1.11), мы можем записать:

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = TR - L =$$
$$= 1/2\left(TR(\dot{q}_i) + TB(q_i)\right). \qquad (1.21)$$

При движении системы с изменением ее координат изменяются и зависящие от координат функции. Существуют, однако, такие функции, которые сохраняют при движении постоянные значения, зависящие только от начальных условий. Эти функции называются *интегралами движения*. Покажем, что гамильтониан является интегралом движения, причем постоянство значения гамильтониана имеет весьма глубокое происхождение, связанное с основными свойствами пространства и времени – их однородностью и изотропией.

Если система не взаимодействует ни с какими внешними объектами, то она называется *замкнутой*. В силу однородности времени функция Лагранжа системы не зависит явно от времени. Поэтому полная производная функции Лагранжа по времени может быть записана следующим образом:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i =$$
$$= \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L\right) = 0 . \qquad (1.22)$$

Отсюда видно, что величина $H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$ остается неизменной при движении замкнутой системы, т.е. является одним из ее интегралов движения. В механике эта величина называется энергией системы. Единственное использованное свойство функции Лагранжа – отсутствие явной зависимости от времени – приводит к выводу закона сохранения энергии системы.

1.4. Скорость накопления богатства

Как уже упоминалось в работе [Царев, 2006, 4] экономическая система ввиду большого количества субъектов и разнообразности отношений между ними является очень сложной и запутанной. Если мы будем пытаться смоделировать сложные цепочки этих отношений, то вряд ли добьемся существенных результатов. Для описания такой системы было введено понятие представляющего ансамбля, когда вместо запутанной траектории системы в фазовом пространстве, изображающей состояние одной системы в различные моменты времени, можно формальным образом ввести в рассмотрение одновременно очень большое (в пределе – бесконечное) число совершенно одинаково устроенных систем.

В отношении отдельной подсистемы (отдельного экономического субъекта) это означает, что можно не рассматривать весь его путь в системе. Мы можем сразу представить все возможные ситуации, в которых может оказаться наш субъект, и рассматривать эти ситуации одновременно.

Функции предложения и спроса представляют собой не фактические объемы благ, которые экономические субъекты продают и покупают, а те количества, которые субъекты согласны продать или приобрести при определенных ценах.

Если мы примем все возможные комбинации количеств и цен всех благ для всех экономических субъектов за начальные условия, считая, что каждая комбинация соответствует принципу оптимальности, то каждой такой комбинации для каждого субъекта соответствует своя точка в фазовом пространстве экономической системы, совокупность которых образует представляющий ансамбль экономической системы.

Через каждую такую точку проходит свой путь системы (своя экстремаль). Возьмем расширенное $2n+1$-мерное пространство $(p_i, q_i, t;\ j = 1, \ldots, n)$, в котором рассмотрим множество прямых путей (экстремалей Φ). В этом пространстве возьмем произвольную замкнутую кривую C, из каждой точки которой проведем соответствующий прямой путь. Такой путь однозначно определяется (после задания начальной точки) из системы канонических уравнений Гамильтона. Получим замкнутую трубку прямых путей

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H, \qquad (1.23)$$

откуда

$$\Phi = \oint_C \left(\sum_i p_i \delta q_i - H\delta t \right). \qquad (1.24)$$

Полученное выражение *называют интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана*. Инвариантность (неизменность) интеграла Пуанкаре-Картана может быть положена в основу рассмотрения движения системы, так как из этой инвариантности вытекает, что движение системы подчиняется каноническим уравнениям Гамильтона.

Рассмотрим интеграл Пуанкаре-Картана вдоль контура C, состоящего из одновременных состояний системы. Такой контур получается, если трубку прямых путей рассечь гиперплоскостью $t = \text{const}$. Для такого контура $\delta t = 0$ и основной интегральный инвариант принимает вид

$$\Phi_1 = \oint_C \sum_i p_i \delta q_i. \qquad (1.25)$$

Этот интеграл был впервые введен Пуанкаре. Позже Картан распространил этот интеграл и на контуры, состоящие из неодновременных состояний. В выражение для Φ_1 не входит H. Следовательно, *интеграл Пуанкаре* является инвариантом для любой гамильтоновой системы и является *универсальным интегральным инвариантом*.

Указанный интеграл удобно рассматривать в $2n$-мерном фазовом пространстве. Вместо фазового пространства рассмотрим отдельно n фазовых плоскостей (q_i, p_i) для каждого блага. Спроектируем произвольный контур, расположенный в фазовом пространстве на эти плоскости. Тогда для любого i

$$\oint_{C_i} p_i \delta q_i = \pm \Phi_i, \qquad (1.26)$$

где Φ_i – площадь области, ограниченной контуром C_i в плоскости (q_i, p_i). Знак плюс берется, если контур обходится по часовой стрелке (т.е. в направлении кратчайшего поворота оси p_i к оси q_i), и знак минус – в противном случае. Площадь Φ_i дает нам величину богатства, образованного накопленным активом i. Совокупность активов дает общую величину богатства

$$\Phi_1 = \sum_i \pm \Phi_i. \qquad (1.27)$$

Таким образом, при движении системы меняются контуры C и C_i, изменяются и площади Φ_i, *но алгебраическая сумма этих площадей остается неизменной*. Это и есть геометрическая интерпретация инвариантности интеграла Пуанкаре.

Интеграл Пуанкаре-Картана и интеграл Пуанкаре называются относительными интегральными инвариантами первого порядка. Термин «относительный» означает, что область интегрирования представляет собой замкнутый контур; первый порядок означает, что в подынтегральное выражение дифференциалы входят линейно.

Мы интерпретировали Φ как богатство. Инвариантность интеграла означает, что состав богатства в выбранный момент времени, определяемый составом входящих в него благ, может меняться, однако размер богатства в этот момент остается неизменным.

Относительный интегральный инвариант первого порядка Φ_1 при помощи формулы Стокса может быть представлен в виде абсолютного интегрального инварианта второго порядка

$$\oint_C \sum_i A_i \delta x_i = \iint_S \sum_{i<j}^{1,\ldots,k} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \delta x_i \delta x_j. \qquad (1.28)$$

Эта формула в применении к интегралу Пуанкаре дает выражение

$$\boldsymbol{\Phi_1} = \oint_C \sum_i \boldsymbol{p_i \delta q_i} = \iint_\Phi \sum_i \boldsymbol{\delta p_i \delta q_i} \ . \qquad \textbf{(1.29)}$$

Цена, при которой объем спроса равен объему предложения, называется равновесной. Очевидно, что в этой точке кривые спроса и предложения (предельных издержек) пересекаются (рис. 2).

Возьмем в пространстве координат $(\dot{q}_i, p_i)$ контур C таким образом, чтобы на каждой фазовой плоскости каждого блага контур C_i совпал с кривой спроса и кривой предложения, при этом контур обхода выберем по часовой стрелке. Получаем интеграл:

$$\oint \boldsymbol{p_i \delta \dot{q}_i} \ . \qquad \textbf{(1.30)}$$

Часть площади, лежащей выше линии равновесной цены, называется потребительским излишком или излишком потребителя. Часть площади, лежащей ниже линии равновесной цены, называется излишком производителя.

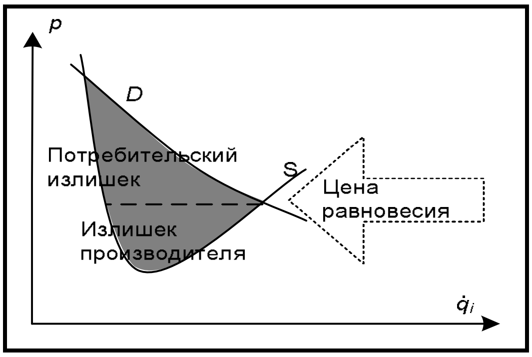

Рис. 2. Излишки потребителя и производителя

Излишек производителя есть разность между суммой денег, полученной за проданную продукцию (общей выручкой), и той минимальной суммой, за которую различные производители готовы продать свою продукцию.

Излишек потребителя есть разность между уплаченной суммой денег и той максимальной суммой, которую различные потребители готовы уплатить за купленную продукцию.

Сумма излишков потребителя и производителя образует общественный выигрыш всех торговых сделок с данным благом.

Интегрируя по частям подынтегральный член в (1.30)

$$\boldsymbol{p_i \delta \dot{q}_i} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(\boldsymbol{p_i \delta q_i}) - \boldsymbol{\dot{p}_i \delta q_i},$$

и используя выражение (1.6) и выражение (1.26), получим

$$\oint \boldsymbol{p_i \delta \dot{q}_i} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(\oint \boldsymbol{p_i \delta q_i}) - \oint \boldsymbol{\dot{p}_i \delta q_i} = \boldsymbol{\dot{\Phi}_i} - \oint \delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\dot{\Phi}_i} \ . \ \textbf{(1.31)}$$

Интеграл по контуру дает лагранжиан и возвращается в исходную точку. Лагранжиан должен иметь минимальное значение из всех возможных, а минимальное расстояние между совпадающими начальной и конечной точкой, очевидно, равно нулю.

Тогда для каждой отрасли (каждого блага) в нашей системе мы получим, что общественный выигрыш равен скорости накопления богатства с помощью указанного блага. Скорость накопления богатства равна площади фигуры, образованной нашим контуром.

Мы приняли все возможные комбинации количеств и цен всех благ для всех экономических субъектов за начальные условия, считая, что каждая комбинация соответствует принципу оптимальности. При таком рассмотрении мы учли все возможные комбинации количеств и цен всех благ для всех экономических субъектов, по которым они были готовы совершить сделку в рассматриваемый момент времени и по которым они ее на самом деле произвели.

Интеграл по времени от общественного выигрыша торговых сделок образует богатство общества, образованное рассматриваемым благом. Сумма по всем благам образует интегральный инвариант Пуанкаре. Потребительский излишек, как и рассмотренный ранее излишек производителя, широко используется в микроэкономическом анализе. В частности, изменение величины потребительского излишка служит количественной характеристикой воздействия изменения цены на благосостояние потребителя.

1.5. Уравнения движения около положения равновесия

Как уже упоминалось выше, принцип наименьшего действия задает движение системы при «обычных условиях», т.е. для большинства случаев. При таком движении система проходит через непрерывную последовательность равновесных состояний и двигается, при этом, по кратчайшему пути. Если вывести систему из равновесия, то она отклоняется от своей экстремали, при этом путь системы удлиняется.

В физике положением равновесия называется такое положение системы, в котором система будет находиться все время, если в начальный момент времени она находилась в этом положении при нулевых скоростях. Указанное свойство справедливо и для экономической системы.

Мы имеем два определения положения равновесия экономической системы – как равенство объема спроса объему предложения и как локальный максимум функции полезности.

Положение равновесия называется *устойчивым*, если при достаточно малых отклонениях системы от этого положения и достаточно малых начальных скоростях система не выйдет за пределы сколь угодно малой окрестности этого положения.

В отношении механической системы еще Торричелли (1644 г.) было известно, что положение системы тел, находящихся под действием сил тяжести, будет устойчивым, если центр тяжести этой системы тел занимает наинизшее из возможных положений. Лагранж обобщил этот принцип Торричелли в виде теоремы. Если в некотором положении системы потенциальная энергия имеет строгий минимум, то это положение является положением устойчивого равновесия системы.

В 1892 г. А.М. Ляпунов в своей знаменитой диссертации «Общая задача об устойчивости движения» поставил вопрос об обращении теоремы Лагранжа – о критериях неустойчивости положения равновесия. Этот вопрос полностью не решен. Частичное решение этого вопроса дают две теоремы Ляпунова и теорема Четаева, в которых устанавливаются некоторые достаточные условия неустойчивости положения равновесия.

Без нарушения общности можем считать, что рассматриваемое положение равновесия системы находится в начале координат. Тогда координаты любого другого положения системы характеризуют отклонение этого положения от положения равновесия и потому сами называются отклонениями системы.

Экономическая система будет находиться в равновесии, если оба члена уравнений Эйлера-Лагранжа одновременно равны нулю

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 . \qquad (1.32)$$

Таким образом, в положении равновесия цены являются стабильными, т.е. первые производные по времени от цен обращаются в нуль. Так как цены коррелируют со скоростями $\dot{q}_i$ (1.7), то скорости также сохраняют нулевые значения в этой точке. Следовательно, при известной идеализации, экономическая система может находиться в состоянии равновесия неограниченное время.

Составим уравнения Лагранжа исходя из выражений (1.8), (1.13)

$$\sum_i \left(\alpha_{ij}\ddot{q}_i + \beta_{ij} q_i\right) = 0 , \qquad (1.33)$$

где члены $\beta_{ij} q_i$ называются потенциальными силами.

Если помимо потенциальных сил, определяемых потенциалом ***ТВ*** и зависящих от координат, на систему действуют еще непотенциальные силы, зависящие от скоростей, то мы можем разложить эти силы в ряд и ограничиться членами первого порядка $\gamma_{ij}\dot{q}_i$.

В этом случае дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\sum_i \left(\alpha_{ij}\ddot{q}_i + \gamma_{ij}\dot{q}_i + \beta_{ij} q_i\right) = 0 . \qquad (1.34)$$

Системы, которые при соответствующей идеализации описываются уравнениями такого вида, называются *гармоническими осцилляторами*.

2. МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Мы выяснили принцип движения экономической системы и научились получать из этого принципа уравнения движения указанной системы. Однако, будучи социальной, экономическая система осуществляет движение в виде определенных форм. От этих форм зависят методы управления движением системы. Ниже мы рассмотрим имеющиеся формы движения, а также соответствующие методы управления движением экономической системы. В данной главе будет значительно больше высказываний и значительно меньше формальных математических выкладок, что связано с объективными причинами, а именно с отсутствием определения меры стоимости.

2.1. Формы движения «социальной материи»

По справедливому замечанию Маркса (т.27, с. 405) *история* – не что иное, как деятельность преследующего свои цели человека, и люди имеют историю потому, что, они должны производить свою, жизнь, и притом определенным образом (т.3, с. 29). Производство опять-таки предполагает общение индивидов между собой, форма же этого общения и есть *общество*. По мере развития общества возникают и развиваются различные общественно-природные силы, что в свою очередь определяет последовательное возникновение и развитие различных способов производства человеческой жизни. *Способ производства* есть процесс присвоения обществом природы. Природа присваивается не в абстрактно-доисторической, давно не существующей форме, а в общественно-определенной форме, то есть в оболочке исторически предшествующего основного производственного отношения. Новый способ производства в качестве «общества» присваивает прежний в качестве «природы» (общество присваивает само себя). При этом старое производственное отношение становится производительной силой нового производственного отношения. Таким образом, то, что присваивается обществом в качестве природы, представляет собой «матрешку», в самой сердцевине которой скрыта абстрактно-девственная, дочеловеческая природа, присвоенная в форме основного производственного отношения первичного, архаического способа производства. Каждому способу производства, взятому в исторической последовательности, соответствует новый слой этой матрешки – новое производственное отношение, выступающее как форма присвоения предшествующего способа производства.

Если мы рассматриваем экономическую систему как разновидность динамической системы, то классификацию различных способов производства мы должны построить на основе классификации форм движения, присущих обществу. Природные движения имеют свою иерархию. Так движение живой мышцы базируется на системе химических процессов, те, в свою очередь, определяются физическими законами движения и т.п. Подобная иерархия движений имеется и в обществе, причем выделяют три формы общественного движения [Платонов].

Технология (от греч. technë – искусство, мастерство, умение) – первая из трех таких главных форм движения «социальной материи» – организует в единую цепочку различные природные движения, склеивая их при помощи *энергетических связей*. *Энергия* (от греч. energeia – действие, деятельность) общая количественная мера различных форм движения природной материи. Технологии соответствуют доисторические способы производства, которые не имеют частной собственности.

Организация (франц. organization, от позднелат. organize – сообщаю стройный вид, устраиваю) – вторая форма общественного движения – объединяет различные технологии (процессы) для реализации некой программы или цели посредством информационно-управленческих связей (определенных правил и процедур). Соответственно, в рамках организации существует информация (от лат. information – разъяснение, изложение) как новая количественная мера различных процессов, определенная на базе энергии. Указанному виду общественного движения соответствует первобытнообщинный, азиатский и рабовладельческий способы производства. Азиатский способ производства возникает как обеспеченное военным путем господство одной общины (царский род) над другими. Основным производственным отношением является внеэкономическое принуждение, насилие (дань, военная добыча) или властное (административное) отношение в своем «чистом», исходном виде. Первичным, неразложимым далее объектом эксплуатации выступают целостные общины. Господствующая община – исторически первая форма государства – первый эксплуататорский класс. Община, – господствующая форма деятельности предыдущего способа производства, становится производительной силой. В рамках рабовладельческого способа производства «голое» внеэкономическое принуждение опосредуется законом (отношением регламентации). В качестве основного производственного отношения закон присваивает насилие в качестве производительной силы. Закон устанавливает порядок, вид и меру насилия, применяемого только в каждом конкретном случае нарушения регламентированных им отношений, и превращает голое насилие в санкцию за нарушение регламентации.

Экономика (от греч. oikonomikë – искусство ведения домашнего очага) – третье общественное движение – сплавляет в единое целое разрозненные организации (производства), пронизывая их эфиром стоимостных связей. В рамках экономики возникает и расширенно воспроизводится стоимость – количественная мера производственных процессов, которая должна определяться на базе информации. Этому виду движения соответствуют такие способы производства как феодализм, абсолютизм и капитализм. Основным производственным отношением феодального способа производства выступает право в форме вассалитета, феодального права. В отличие от закона, жестко предписывающего определенные действия, право лишь устанавливает систему ограничений. Закон как свод регламентации в качестве производительной силы феодального права превращается в закон как свод ограничений, в котором фиксируется право. Не следует смешивать право как производственное отношение с правовой надстройкой. Аналогично закон (отношение регламентации) нужно отличать от института законодательства, где фиксируется это отношение. Между феодализмом и капитализмом, как и в предыдущей «триаде» между первобытнообщинным строем и рабовладельческим, находится еще один переходный способ производства, существовавший при абсолютной монархии – абсолютизм. Право из господствующего способа производства превращается в то, что можно купить. Основной формой зависимости крестьян становится денежная рента. Основным производственным отношением абсолютизма является товарно-денежное отношение. Деньги становятся средством перехода в более высокое сословие. Для высших сословий, средством получения денег является сословное право. Имеющие деньги приобретают права, имеющие права спускают их за деньги. Массы выкупившихся крестьян пополняют ряды свободных ремесленников, объединяющихся в цеха. В городах под сенью Магдебургского права расцветают могущественные купеческие гильдии, расширение торговли приводит к образованию национального рынка. Финансовая мощь абсолютного монарха в опоре на наемное войско и свободные города используется для ликвидации феодальной раздробленности. В свою очередь, при капитализме товарно-денежные отношения присваиваются в качестве производительной силы и образуют лишь «материю» капитала, однако сам он – качественно новая форма существования этой материи, самовозрастающая стоимость. В качестве капитала деньги приобретают новое свойство – теперь это средство делать новые деньги.

Человек является производителем мышечной энергии в составе технологии. Однако общество склонно окружать романтическим ореолом фигуры инженера и банкира, хотя они оба не более чем агенты процессов производства информации и стоимости. Никому пока не удавалось определить величину этой стоимости, не соотнеся ее предварительно с величиной энергии, определяемой технологией их производства и величиной информации, закодированной в виде знаков на монетах и купюрах.

2.2. Информация и управление

Мера энергии и закон ее сохранения были установлены давно и эти достижения легли в основу физической науки. Мера информации – не так давно в работах Клода Шеннона, и теперь информация является основным понятием кибернетики. Законов информации известно немного, причем связаны они, в основном, с проблемой ее оптимальной передачи. Фундаментального закона, подобного закону сохранения энергии, для информации неизвестно вовсе. Меру же стоимости еще только предстоит строго определить в будущем, и это станет не менее фундаментальным научным достижением, чем два предыдущих результата.

Первые отчетливые предложения об общих способах измерения количества информации принадлежат, по видимому, Р. Фишеру (в связи с вопросами математической статистики) и Р. Хартли (в связи с вопросами хранения информации в запоминающих устройствах и передачей информации по каналам связи). Свое окончательное выражение эти предложения нашли в теории информации, созданной американским ученым К. Шенноном в 1948 г. [Шеннон].

Допустим, некое событие i может произойти в одном из $\boldsymbol{N}$ дискретных вариантов $(\boldsymbol{i = 1,..., N})$. Или, как говорят, система имеет ***N состояний***. Некая величина $\boldsymbol{x}$ в нашей системе принимает в каждом из этих событий определенное значение $\boldsymbol{x_i}$. *Вероятность*, т.е. числовая характеристика степени возможности появления данного варианта события, равна $\boldsymbol{p_i}$, причем $\sum \boldsymbol{p_i} = \boldsymbol{1}$. Соотношение, которое устанавливает связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления, называется *законом распределения случайной величины*. Если каждый вариант равновероятен, то каждое $\boldsymbol{p_i = 1/N}$.

Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины определяется формулой:

$$\langle \boldsymbol{x} \rangle = \sum \boldsymbol{x_i p_i} . \qquad (2.1)$$

Шеннон определил *количество информации* ***I***, необходимое, чтобы точно указать, какой из вариантов события в системе осуществится, как математическое ожидание логарифма вероятности:

$$\boldsymbol{I} = -\sum \boldsymbol{p_i ln p_i} . \qquad (2.2)$$

Знак минус стоит для того, чтобы значение величины ***I*** было положительным.

Очевидно, что если существует единственный вариант события, то количество информации для его указания равно нулю $\boldsymbol{1 \cdot ln 1 = 0}$, а для $\boldsymbol{N}$ равновероятных вариантов $\boldsymbol{I = lnN}$.

Величина информации системы равна величине *энтропии* ***S*** системы (от греч. entropia – поворот, превращение), т.е. меры степени неопределенности случайной величины (меры вероятности пребывания системы в данном состоянии). При этом информацию называют мерой упорядоченности системы, а энтропию – мерой ее неупорядоченности. Так два понятия, имеющих прямо противоположные смыслы, имеют, тем не менее, равные значения их величин. Хотя величины энтропии и информации равны, их изменения в системе равны только по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Когда система полностью неупорядочена, ее энтропия максимальна, а информация равна нулю. Когда состояние системы полностью определено (система полностью упорядочена) ее энтропия равна нулю, а информация, соответственно, максимальна. Следовательно $dS = -dI$.

Понятие энтропии (точнее изменения энтропии системы) введено в 1865 г. Р. Клаузиусом как результат деления изменения количества теплоты в системе, на температуру системы

$$dS = dQ/T. \qquad (2.3)$$

Людвиг Больцман ввел в 1872 г. статистическое истолкование энтропии, записав соотношение

$$S = k\ln W, \qquad (2.4)$$

где

k – постоянная Больцмана, которая понадобилась для соблюдения размерности $Дж/К$;

W – термодинамическая вероятность (число состояний системы).

Действительно, если мы представим различные части нашей системы по отдельности, то их термодинамические вероятности при вычислении термодинамической вероятности всей системы должны перемножаться, а энтропии частей при вычислении энтропии всей системы должны складываться. Так как логарифм произведения величин равен сумме логарифмов величин, то соотношение Больцмана вполне правдоподобно, хотя приведенные рассуждения и не показывают существования функциональной зависимости между S и W.

В случае N равновероятных вариантов состояния величина энтропии с точностью до постоянной Больцмана совпадает с величиной информации $S = k\ln N$. С другой стороны энтропию, а значит и информацию, можно определить как результат деления соответствующей формы энергии на соответствующую температуру. По всей видимости, должно существовать некое аналогичное соотношение для определения стоимости на основе информации.

Формула богатства (37) в [Царев, 2006, 3] с точностью до нормирующих множителей совпадает с определением количества информации по Шеннону и дает направление для создания такого определения стоимости

$$\Phi = -\sum_i p_i q_i^0 \ln\frac{p_i}{A_i}.$$

Теперь нам надо сформулировать само понятие управления, а также определить, что представляет собой управление по отношению к такой системе, как экономическая.

Управление понимают как функцию некой системы, которая обеспечивает сохранение определенной структуры данной системы, поддержание режима ее движения, реализацию ее программы и целей.

В конце XIX в. в связи с изобретением паровой машины (и различных других машин) возникла проблема устойчивости ее работы. Эти события ознаменовали возникновение теории управления технологическими процессами.

Кибернетикой (теорией управления информацией) – называют науку о процессах управления и переработки информации. В целом это так, но это не все. Физика тоже изучает всевозможные преобразования энергии, но к этому ее содержание не сводится. Слово «кибернетика» достаточно древнее. Оно встречается у Платона и происходит от греческого слова, означающего «кормчий». Затем его употребил Анри Ампер как обозначение науки об управлении государством. В 1948 г. вышла книга математика Норберта Винера «Кибернетика», провозгласившая возникновение новой науки о процессах управления и процессах переработки информации в технике, обществе и живых организмах. Ее развитию способствовали Джон фон Нейман, Клод Шеннон и многие другие выдающиеся ученые [Неймарк, 1985].

Как мы видим, в конце позапрошлого века возникла теория управления технологией, в середине прошлого века возникла новая наука – теория управления информацией. Однако, пока не определена мера стоимости, о теории управления стоимостью, как о науке, приходится только мечтать. Конечно, в каком-то виде эта дисциплина существует, но, как сказал Иммануил Кант, «наука лишь постольку наука, поскольку в нее входит математика». Мы можем попробовать обозначить возможный подход для решения задачи управления экономической системой.

Согласно (1.8) общая выручка представляется в виде квадратичной формы от выпусков благ и в то же время равна квадрату величины предпринимательской способности (9) в [Царев, 2006, 4].

$$TR = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = g^2.$$

В то же время функция предпринимательской способности задает вектор скорости движения экономической системы (12) [Царев, 2006, 4]

$$g = \dot{s}.$$

Скорость движения экономической системы по траектории есть величина предпринимательской способности, а вектор скорости в каждой точке пути направлен вдоль траектории. Это означает, что *задача управления экономической системой* состоит в том, чтобы *задать правильное направление вектора предпринимательской способности*. Или, другими словами, задача управления экономической системой состоит в том, чтобы направить усилия людей в нужную сторону.

2.3. Методы управления экономической системой

Совместная деятельность людей предполагает управление процессом производства при помощи определенных методов. Очевидно, что методы управления должны возникать и развиваться вместе с развитием различных способов производства. Более того, одним из первых критериев качества управления является именно соответствие методов управления способу производства. Мы установили, что существуют такие формы общественного движений как технология, организация и экономика. Соответственно, мы должны выделить технологические, организационные и экономические методы управления. Технологические методы управления применяются в семейных или родовых производственных отношениях, если мы рассматриваем первичную ячейку общества – семью, либо род (при наличии сохранившихся кровно-родственных связей). Нам, конечно, интересны более развитые организационные и экономические методы управления. Именно к их рассмотрению мы и перейдем.

Из наших рассуждений следует, что *организационные методы* нужно применять *для управления потоками информации* в нашей системе, а *экономические методы*, соответственно, необходимы *для управления потоками стоимости*. В то же время, экономика представляет собой совокупность организаций спаянных в единое целое стоимостными связями, что, конечно, не отрицает наличие между ними организационных (информационно-управленческих) связей, а также технологических (энергетических) связей.

Если представить организацию как динамическую систему (54) в [Царев, 2006, 3]

$$\dot{x} = f(x, u, a), \qquad (2.5)$$

где x – k -мерный вектор, описывающий состояние объекта;

u – m -мерный вектор, задающий управляющее воздействие на объект.

a – n -мерный вектор параметров системы, то управление этой системой состоит в последовательности принятия и реализации решений u, каждое из которых вызывает переход системы в следующее состояние. Правило, по которому выбирают последовательность решений, называется стратегией управления.

Рассмотрим теперь, какие методы управления применяются *внутри* организации. По сути, единственным методом управления любой организацией является регламент (франц. reglement, от regle – правило) – т.е. совокупность правил, определяющих порядок ее деятельности. Этот регламент может быть гласным или негласным, писанным (т.е. зафиксированным в виде некого документа или инструкции) или неписанным. Набор правил также может быть самым разнообразным. Правила эти устанавливаются руководством организации, либо руководством вышестоящей организации (хотя многоуровневые организации мы можем рассматривать как одну большую организацию). Правила бывают двух типов: предписания (если так, то делай то-то) и ограничения (от сих до сих можно, а от сих до сих нельзя). Правила не предусматривают вероятностной трактовки, они всегда однозначны. В этом случае наша динамическая система является детерминированной марковской системой или детерминированным конечным автоматом. Это означает, что в регламент не встраивают никаких регуляторов. В результате мы имеем *организационные методы управления*, называемые, согласно теории управления, *программным управлением* системой и применяемые исключительно *внутри* организации.

Все решения по управлению организацией, которые предполагают несколько вариантов, имеют отношение к *внешним целям* организации. При этом переход организации в следующее состояние происходит с некоторой вероятностью, которая зависит от принятого решения. Таким образом, руководству организации необходимо проанализировать ту ситуацию, которая имеется к настоящему моменту и, исходя из имеющейся информации, выдать соответствующее управляющее воздействие. В данном случае мы наблюдаем некий регулятор, находящийся, по всей видимости, в головах руководства. Общий принцип действия любого регулятора – это *принцип обратной связи*. Конкретные значения управления на каждом шаге заранее неизвестны. Имеется только некий закон или правило, согласно которому мы можем найти это управление. В этом случае мы имеем стохастическую марковскую систему или стохастический автомат, и нам необходимо решать задачу оптимизации. В результате мы имеем *экономические методы управления*, называемые, согласно теории управления, *оперативным управлением* системой и предназначенные для достижения *внешних целей* организации.

Организационные методы задают *граничные и начальные условия* $(\dot{x}_0, x_0)$ в системе (2.5), т.е. условия Коши для дифференциального уравнения, которые определяют одноединственное решение уравнения из множества возможных. Экономические методы используют *обратную связь* в экономической системе, т.е. встроенный регулятор, который управляет системой, используя ее параметры a.

Можно возразить, что экономические методы управления могут применяться внутри организации. Так, например, могут применяться различные способы расчета заработной платы работников. Существует не только повременная, но и сдельная, аккордная и т.д. заработная плата, а также премии, социальный пакет и тому подобное. Т.е. суммарное денежное содержание работника заранее неизвестно, и его величина зависит от некоторого регулятора. На это можно ответить, что в силу закона конкуренции относительная стоимость любого товара определяется минимальным количеством труда, требуемого для его производства. Отсюда, естественно, следует, что относительная стоимость труда, или заработная плата, тоже определяется минимальным количеством труда, нужным для производства всего того, что необходимо для содержания рабочего. На практике это приводит к тому, что как только заработная плата превышает некий установленный в организации уровень, руководство пересматривает расценки, применяет некие штрафы и т.д., для сохранения заработной платы на упомянутом уровне. В данном случае сдельная заработная плата в сравнении с повременной выполняет ту же роль, которую выполняет палка с кормом, привязанная перед мордой мула в сравнении с палкой, которой этого мула погоняют.

Не зря говорят, что справедливая оплата труда это стимул для хорошей работы. Стимул (от лат. stimulus, букв. – остроконечная палка, которой погоняли животных, стрекало), побуждение к действию, побудительная причина поведения.

2.4. Роль государства в экономической системе

Определим теперь такой важный элемент экономической системы как государство.

В отечественной теории государства и права рассматривают два основных подхода к типологии государств (если понимать под типом способ существования государства, обладающий существенными качественными признаками): формационный (марксизм) и цивилизационный (автор А. Тойнби). Кроме того, можно упомянуть точку зрения Э. Позднякова («Философия политики»), который считает государство внешней формой существования народа и Д. Норта, который, определяя государство через социальный контракт между гражданами и государственным аппаратом, выделяет «контрактный» и «эксплуататорский» типы [North].

Представления о роли и функциях государства в области материального производства также простираются от философии «экономики невмешательства» или «экономики свободных рынков», до принципа полного государственного регулирования, командной экономики.

Очевидно, что все многообразие представлений по данной теме возникло не на пустом месте и каждая теория опирается на некие реальные факты. Тем не менее, если раскрывать данную тему методом сравнения различных теорий между собой, как это принято в общественных науках, то есть опасность получить набор малосвязанных между собой мыслей.

В связи с тем, что мы определили экономику как совокупность организаций, мы, в первую очередь, определим государство как одну из организаций экономики. Люди создают организации для достижения своих целей, поэтому мы можем определить государство (или *политический союз*), как организацию, в которой осуществляют свои цели индивиды, принадлежащие к господствующей социальной группе (так называемой, господствующей верхушке). Данное определение на первый взгляд представляется неполным, так как видимая деятельность государства значительно шире, чем осуществление интересов господствующей верхушки. Но, согласно Максу Веберу, государство нельзя определить исходя из содержания его деятельности, так как почти нет таких задач, выполнение которых политический союз не брал бы в свои руки. С другой стороны, нет такой задачи, о которой можно было бы сказать, что она *исключительно* присуща тем союзам, которые называют «политическими». Поэтому, с одной стороны, необходимо понимать каковы *конечные цели любой деятельности государства*, с другой стороны, дать определение государства можно, в конечном счете, только исходя из специфически применяемого им *средства* – физического насилия. Государство есть та форма общения (в данном случае господства людей над людьми), которая внутри определенного общества претендует на монополию легитимного (законного) физического насилия. Именно, исходя из принципа легитимности в теории государства и права, государство определяется как всеобщая (публичная) форма власти для установления и действия права в качестве общеобязательного закона.

Из сказанного выше можно заключить, что государство представляет собой одну из организаций экономической системы, которая помимо всех свойств, присущих любой организации, обладает еще одним специфическим свойством – данная организация способна осуществлять управление всеми остальными организациями. В то же время, опять же согласно Максу Веберу, руководство или управление обществом посредством государственного аппарата, по сути, ничем не отличается от управления любой другой организацией или предприятием.

Великая депрессия 1929-33 г. рыночной системы Запада породила представление о невозможности соблюдения принципа невмешательства в рыночный механизм, и необходимости государственного регулирования экономики. После краха социалистического лагеря считается, что организационные методы управления экономикой в виде административно-командной системы СССР потерпели полную неудачу и в современных условиях необходимо развивать экономические методы. Два этих урока истории породили «брожение умов», и был сделан вывод о том, что государство должно применять экономические методы управления *внутри народного хозяйства*, хотя, как мы установили выше, эти методы применимы только для достижения *внешних целей* любой организации, в данном случае – государства. В результате возникли следующие «мифы».

Утверждается, что капиталистический способ производства существует до сегодняшнего времени. Экономисты признают, что он существенно изменился, что имеет место смешанная экономика, занимающая промежуточное место между командной и рыночной типами экономических систем, – тем не менее, упрямо твердят, что это очередной этап капиталистического способа производства.

Считается, что в государственном секторе, который представлен государственными предприятиями, как части общего рынка, необходимо также внедрять экономические отношения. Т.е. в условиях рынка государство, управляя общественным хозяйством внутри страны, должно выступать в качестве предпринимателя.

Дальнейший ход рассуждений приводит к тому, что каждым отдельным государственным предприятием, как составным элементом государственного сектора, нужно управлять экономическими методами.

В негосударственном секторе предлагается, наоборот, регламентировать разгул конкуренции посредством различных организационных методов.

Проблема в том, что эта логика рассуждений не верна.

Во-первых, капиталистического рынка и конкуренции, как способа хозяйствования предпринимателей, в классическом понимании в настоящее время не существует ни в России, ни в развитых странах. Фаза классического капитализма (развивающегося на базе завершенной промышленной революции) продолжалась от 40 (Германия) до 70 (Англия) лет. Правящая элита развитых капиталистических стран в условиях глубокого экономического кризиса идет на глубокое вмешательство в производственные отношения и, сохраняя свою власть, объективно выходит за рамки класса капиталистов, становится над ним. В более явной форме это осуществил фашизм в Германии, в более скрытой – правящий класс США при администрации Рузвельта. Элита, используя развитые элементы управления, опираясь на механизм тайной власти, шаг за шагом ограничивает сферу «анархии общественного производства» и постепенно овладевает системой общественных отношений, преобразуя их в интересах правящего меньшинства. Современное западное общество – это уже не капитализм, так как капитал уже не является в нем господствующим производственным отношением, он, являясь внешним слоем «матрешки» общественно-природных способов производства, присвоен в качестве производительной силы новым основным производственным отношением. Уклад, который господствует сегодня над капиталом, естественно назвать элитаристическим, а управляемую им общественную систему в целом – *элитаризмом*. Но при этом не возникает никакой новой формы общественного движения, помимо технологии, организации и экономики. При элитаризме на «матрешке» не возникает никаких «новых слоев» производственных отношений. Новые отношения возникают при «снятии предыдущих слоев». Элитаризм соответствует предыдущей форме движения социальной материи – организации, но на новом уровне.

Во-вторых, государственный аппарат не имеет встроенных регуляторов кроме, быть может, весьма специфических регуляторов в головах тех государственных мужей, которые используют государственную службу для извлечения личной выгоды. В силу отсутствия регуляторов упомянутый аппарат и государственные монополии всегда выступали в качестве *организации*, олицетворяя собой власть и закон, то есть административные отношения и отношения регламентации. При правильном и эффективном государственном управлении доэлитаристических способов производства государственный аппарат создает свод правил и требует его безусловного выполнения от всех участников экономической системы. Так, например, необходимые условия существования рынка совершенной конкуренции – наличие связи между производителями и потребителями, свободный выбор партнера, отсутствие возможности влияния на цены, конкуренция, обусловленная механизмом спроса и предложения, и наличие механизма разрешения конфликтов. Поэтому государство в капиталистическом обществе создает инфраструктуру рынка, объясняет, что все люди равны, принимает антимонопольное законодательство, не вмешивается в рыночный процесс и развивает гражданское право. Государство *активно влияет* на структуру рынка и *регулирует* правоотношения его участников, оставляя в неприкосновенности рыночный механизм.

И, наконец, в третьих, как мы уже установили, управление государственными предприятиями, как, впрочем, и любыми другими организациями, невозможно осуществлять экономическими методами. Методы управления могут быть только организационными, – административные отношения либо отношения регламентации. В свою очередь, регламентация конкуренции в негосударственном секторе посредством различных организационных методов закономерно приводит к подрыву конкурентного преимущества. Можно показать, что в результате оба сектора экономики вытесняются в теневой. Эти две ошибки – основная причина существования теневого сектора.

2.5. Анализ социалистических методов управления

Путь экономической системы СССР является демонстрацией порочности практики управления государственным сектором при помощи экономических методов.

Провозглашенный Сталиным «большой скачок к социализму», замена НЭПа на сталинский социализм – пример, так называемого, деспотического или азиатского (построенного на голом насилии), а вовсе никакого не социалистического, способа производства. Этот способ производства, если не учитывать многочисленные жертвы среди населения, всегда оказывался очень эффективным, позволив построить египетские пирамиды, китайскую стену, громадные ирригационные сооружения, а также выиграть военно-промышленное соревнование у вермахта, а затем создать атомное и ракетное оружие в условиях послевоенной разрухи.

Ограничение произвола власти рамками закона, предпринятое Хрущевым на XX съезде КПСС знаменовал переход от азиатского способа производства к рабовладельческому.

С целью присвоения экономической силы производительного труда можно делегировать права и полномочия отдельным лицам и организациям распоряжаться теми или иными элементами производительных сил и частью изготовленной продукции, т.е. попробовать ввести экономические методы управления государственным сектором. Государственная монополия сохраняет права собственника, изымает большую часть прибавочного продукта в качестве «оброка», права производителя распоряжаться остатком существенно ограничивает. Мы получаем классический «хозрасчет», введенный в свое время мартовским и сентябрьским пленумами ЦК КПСС 1965 г. – в рамках господствующего регламентационного уклада (государственной монополии) искусственно вводится феодальный уклад. В результате феодально-ведомственные бароны-разбойники, узурпируя и произвольно толкуя права, предоставляемые предприятиям государством, ставят их в вассальную зависимость от себя.

Такое развитие толкает к дальнейшему введению элементов рыночных отношений. Государственная монополия обязывает производителей самостоятельно реализовывать произведенную продукцию, переходя от взимания «оброка» к изъятию фиксированного процента с выручки – «денежной ренты». Перед нами программы «перестройки» и «ускорения» 1985 г. Введенные товарно-денежные отношения – абсолютистский уклад в рамках регламентационного.

Дальнейшим логическим шагом является предоставление руководителям государственных предприятий права использовать полученную прибыль для расширения производства, а значит, – права покупать и продавать основные фонды, нанимать дополнительную рабочую силу, свободно устанавливать заработную плату – со всеми вытекающими отсюда последствиями. Так называемый «дикий капитализм» в варианте Гайдара-Бурбулиса после 19 августа 1991 г. – капиталистический уклад в рамках регламентационного.

Существующая сегодня ситуация в российской экономике, это не отказ от социалистических методов хозяйствования во имя развития рыночных методов. Это закономерный итог внедрения экономических отношений в государственный сектор. Иллюзия состоит в том, что государственная монополия, поддерживая жесткий контроль и взимая налоги с культивируемых ею частных укладов, может, якобы, увеличить свой доход. Государственная форма собственности никогда не сможет удержать контроль над развитием частных фирм уже хотя бы потому, что экономические формы деятельности являются эволюционно более высокими, чем организационные, и неизменно торжествуют над ними. Чиновники, получающие зарплату, никогда не смогут проконтролировать обладающих широкими возможностями, влиятельных частных (или всего лишь «самостоятельных») производителей, которые скупают аппарат «на корню», обращая контролеров государственной монополии в собственных агентов-лоббистов при центральной власти. *Уклады закономерно выходят из-под контроля государственной монополии и не приносят ей ожидаемого дохода*. Внедрение экономических методов начиная с 1965 г. закономерно привело к потере управляемости государственным сектором экономики. Подобный тип развития имеет примеры в истории. Так, Платонов упоминает о легистах («фацзя») в Китае III в. до н.э. и о эллинистическом государстве Птолемеев в Египте.

2.6. Современные методы управления

Как мы уже говорили выше, смена капиталистического способа производства элитаристическим не означает появления качественно новой формы движения «социальной материи». *Экономика* заменяется глобальной организацией, которая использует вместо указов, постановлений, распоряжений и приказов в рамках административного уклада и правовых норм в рамках уклада регламентационного *специальные средства нормативного проектирования*, которые мы рассмотрим ниже в виде, так называемой, адаптивной модели управления.

Уничтожение экономических отношений означает их замену на нормативы распределения, обмена и потребления. Если экономические методы управления *используют* параметры ***a*** в системе (2.5), то специальные средства нормативного проектирования *изменяют* эти параметры. Причем изменение этих параметров должно происходить ***в нужном направлении*** для достижения поставленной цели.

Пример такой системы (71) рассмотрен в работе [Царев, 2006, 3]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})) = \bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}),$$
$$\dot{\boldsymbol{a}} = -\boldsymbol{\mu}\nabla_{a}\dot{\boldsymbol{\Phi}}.$$

В результате экономисты исчезают вместе с экономикой, а все общественное хозяйство постепенно превращается в единую организацию.

Элитаризм, как и социализм, постепенно устраняет частную собственность, но только на смену ей приходит не общественная собственность, а корпоративно-элитаристическая собственность правящего слоя. Превратиться в элиту, управляющую собственностью класса капиталистов как единым целым, для этого класса, означает, строго говоря, ликвидировать самого себя – такова плата за сохранение власти.

В явной форме действие подобных нормативов наблюдается в самом значимом для современной экономики военно-промышленном и аэрокосмическом секторе. Мы с удивлением обнаруживаем, что проблемы цены и целесообразности, при прочих равных условиях, совершенно не имеют значения для заключения контракта. Наибольшее значение придается стране – производителю продукции. Говорить об экономических методах регулирования этого сектора просто смешно.

Бесплатные для потребителей программы переподготовки кадров, программы внедрения энергосберегающих технологий (ТАСИС), филантропические программы Джоржа Сороса и прочие подобные программы также не преследуют явных экономических целей. Все, что приходит нам в голову, за отсутствием рационального объяснения, периодически обвинять этих людей в шпионаже.

Создание таких нормативов стало возможным после такого качественно нового скачка научно-технического прогресса, как изобретение компьютера.

«Распределительные» нормативы решают проблемы дефицитности. Место конкуренции капиталов занимает специально созданная система распределительных отношений. Она распределяет стоимость, направляемую на расширенное воспроизводство, между элементами совокупного общественного капитала. В рамках мировой системы производства эти задачи решают организации вроде Всемирного банка, МВФ, МБРР, внутри страны проблему пытаются решить посредством различных целевых программ.

«Обменные» нормативы решают проблемы распределения ресурсов. Отношение рыночного обмена между производителями превращается в сознательно установленное отношение регламентации (организационное отношение) между общегосударственным центром и каждым из производителей. Экспортно-импортный банк США, например, сознательно финансирует контракты на приобретение продукции американских предприятий, это целевая государственная программа, во главу угла которой ставятся отнюдь не сиюминутные экономические соображения.

«Потребительные» нормативы решают проблемы качества и технологии производства продукции. «Энергетический кризис», *выдуманный* странами большой семерки в 70-е годы, имел своей целью заставить предприятия и страны мира перейти от экстенсивного пути развития к интенсивному, убедить не экономическими, а идеологическими (по сути, организационными) методами перейти от индустриального к постиндустриальному обществу. Эта задачу им удалось решить.

Информация в рамках компьютерных технологий низводится до процессов электрической *энергии*. *Организация*, например, бухгалтерия крупного предприятия, заменяется на бухгалтерскую *технологическую* систему, управляемую одним человеком, что было невозможно сделать раньше, имея вместо компьютера счеты или даже арифмометр. Так классическая бюрократическая организация, описанная М. Вебером, превращается в «виртуальную сетевую корпорацию» – адаптивную организацию нового типа. Тем самым фигура инженера, как участника процесса производства информации, низводится до роли рабочего.

В развитых странах за последнее десятилетие сложился информационный сектор экономики. Также завершается образование информационного поля Земли, новой информационной инфраструктуры. Многие зарубежные исследователи приходят к выводу о становлении и развитие постиндустриального информационного общества. Встречаются суждения о реиндустриализации производства и о вступлении человека в новый информационный этап своего развития. – Эти суждения находятся в полном соответствии с нашими выводами.

Технология в условиях постиндустриального общества низводится до *искусственной природы*. В рамках предприятия это означает замену машинного производства с придатком в виде мышечной энергии человека на гибкие автоматизированные системы. Роль рабочего, как источника информационно (посредством выработанных навыков) организованной мышечной энергии выполняет компьютер – информационно (программно) организованная электрическая энергия. Тем самым труд компьютера, в отличие от всех ранее существовавших средств производства, является источником прибавочной стоимости. В рамках общественного хозяйства, это означает переход от экстенсивного пути развития к интенсивному, и, как следствие, – ноосферному индустриальному производству. Ноосфера (от греческого noos – разум и сфера), новое эволюционное состояние биосферы, при котором разумная деятельность человека становится решающим фактором ее развития. Понятие «Ноосфера» введено французскими учеными Э. Леруа и П. Тейяром де Шарденом в 1927 г. В.И. Вернадский развил представление о ноосфере, как качественно новой форме организованности, возникающей при взаимодействии природы и общества.

Логическим завершением развития современного постиндустриального общества явится неорабовладельческий способ производства, который оформится в качестве господствующего с ростом государственного сектора. В нем «говорящие орудия труда» будут заменены на орудия труда, управляемые компьютером. По мере развития современного способа производства происходит и, будет происходить в дальнейшем, быстрое расслоение трудящихся масс и потеря ими качества пролетариата, а также прямое вытеснение из сферы производства и маргинализация. По завершении уничтожения экономических отношений будет достигнута классовая однородность: общество превратится в единый класс, «эксплуатирующий» производительную силу технологии. По сути, именно это состояние общества Маркс называл социализмом. «Одержав победу, пролетариат никоим образом не становится абсолютной стороной общества, ибо он одерживает победу, только упраздняя самого себя и свою противоположность. С победой пролетариата исчезает как сам пролетариат, так и обуславливающая его противоположность – частная собственность» [т. 2, с. 39]. – Это означает уничтожение экономики. Не случайно Маркс не пользовался выражением «социалистическая экономика», т.к. на деле совокупность экономических отношений есть как раз то, что должно быть уничтожено. У Ленина, в тех немногих местах, где это сочетание встречается, речь всегда идет о «социализме в известном смысле» – переходном периоде, необходимом для развития производительных сил до требуемого уровня. Выражение «социалистическая экономика» у Ленина несет ту же смысловую окраску, что и сочетания «социалистическая спекуляция» или «социалистическая проституция».

Неорабовладельческий способ производства и современное постиндустриальное общество многими своими чертами напоминает Римскую Империю. Растет социально-обеспечиваемая армия бездельников, провозглашающая по отношению к правящей элите известный лозунг – «хлеба и зрелищ». В такой ситуации закономерно провозглашение декларации прав человека, приоритета человека перед государством и создание «правового» либо «социального» типа государства. Экономическое могущество постиндустриального общества основано на эксплуатации «третьего мира» в качестве источника сырья, размещения промышленности первичной переработки сырья и рынка сбыта. Попытки стран «третьего мира» поднять цены на сырье и накопить денег на развитие экономики вызывают адекватное повышение цен на промышленную продукцию. Страны третьего мира будут вовлекаться, и эксплуатироваться постиндустриальной цивилизацией пока эта цивилизация не рухнет под ударами «варварских» формаций.

На обломках великой империи «золотого миллиарда» возникнет новый способ производства, уничтожающий организационные отношения и информационно-управленческие связи, т.е. присваивающий следующие слои «матрешки». В ходе их уничтожения исчезнут такие фигуры как работник аппарата, статистик, начальник цеха, связист и прочие производители-потребители информации. Возникнет искусственно созданная качественно *новая технология* обработки информации, объединяющая в масштабах всего общества все процессы в единый технологический комплекс. Для этого нужен еще один скачок в развитии технологии, аналогичный изобретению компьютера. Должны появиться орудия труда обладающие *искусственным интеллектом*. Человек окажется полностью вне этого технологического комплекса, и будет выполнять по отношению к сфере материального производства лишь функцию развития.

На этом этапе произойдет преобразование производственно – технологического комплекса в самовоспроизводящуюся, *искусственную природу*, взамен абстрактно-девственной дочеловеческой природной сердцевины «матрешки», пользование плодами которой будет осуществляться в индивидуальной форме, никак не опосредуемой обществом. Абстрактно-девственная природа останется только в заповедниках.

Приведенные выше высказывания могут показаться излишне абстрактными и оторванными от реальности. Однако применение изложенных принципов для анализа, например, российской действительности позволяет заметить многие ошибки, совершенные и совершаемые в последние годы.

Вера в то, что государство в 1991 году отказалось от административных методов управления экономикой и стало использовать рыночные методы, жива и поныне. Полный отказ от первых под предлогом «снижения административных барьеров» и попытки использования вторых в качестве «государственного координатора бизнеса» яркий тому пример.

Но с каждым годом экономистов все больше удивляет ситуация перманентного «переходного состояния», которая никак не желает заканчиваться. Это дает повод оппозиционным группам подвергать правительство уничижительной критике. Более того, ряд ученых экономических умов начинают публиковать явно заказные работы, в той или иной степени лоббирующие интересы определенных политических сил. На этом негативном фоне практически никаких свежих и кардинальных идей по изменению системы государственного управления в научных журналах не приводится.

Переходное или, другими словами, подвешенное состояние не может длиться вечно. В результате государство из инстинкта самосохранения начинает, во-первых, напрямую вмешиваться в ключевые, по его мнению, отрасли экономики и, во-вторых, самоустраняется из второстепенных, по его же мнению, отраслей.

С одной стороны, резкое усиление давления государства на крупный бизнес, наблюдаемое в последние годы, дает повод говорить о «политике государственной экспансии» и «тенденции движения к государственному капитализму». При этом полагают, что государственный капитализм есть такая конструкция, в которой государственная власть берет на себя функции хозяйственного управления для мобилизации общества на выполнение некоторой общенациональной задачи.

С другой стороны, чиновники договорились до необходимости ухода государства из ряда отраслей экономики. В качестве одной из основных идей предлагается «маленькое эффективное государство», которое «не вмешивается в рыночный механизм».

Но если государство начинает выходить на внутренний рынок в качестве предпринимателя, эта попытка неизменно обречена на провал. Также, если в условиях такой огромной страны как Россия, «маленькое эффективное государство» не будет «вмешиваться в рыночный механизм», то этим обязательно займется другое «большое государство». Но это государство будет действовать в интересах уже совсем другого народа.

Попытка административной реформы собственного государственного аппарата, предпринятая президентским указом от 9 марта 2004 года № 314, обусловлена тем, что существовавший до этого указа аппарат не отвечал насущным задачам управления. Наверное, было бы правильно если уж не разработать предложенные выше специальные компьютерные средства нормативного проектирования, то хотя бы как-то предварительно апробировать новую схему распределения функций между предложенной трехзвеньевой структурой органов исполнительной власти, а потом уже применять ее ко всему правительству. Вместо этого оказалось, что указ Президентом РФ подписан, назначения сделаны, но нет не только четкого распределения функций между новыми органами исполнительной власти, подготовленных проектов положений об этих органах, моделей должностей госслужащих с установлением их полномочий и распределением обязанностей. Выяснилось, что нет даже ясного представления как этот аппарат должен работать, не говоря уже о том, что, по словам самого Президента, часть структур в новой схеме вообще забыли!

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы завершили цикл из трех статей, посвященных анализу экономической системы при помощи математического аппарата, который изначально был создан в процессе развития сугубо естественнонаучных дисциплин.

В устоявшемся взгляде на область человеческого познания окружающего мира на одном краю мы наблюдаем абстрактные законы природы, при помощи которых человек может проникнуть как в глубины космоса, так и в глубины микромира, а на другом краю мы видим неуловимые законы существования социума, которые упорно не поддаются логическому осмыслению и аналитическому описанию. Из такого виденья мира вытекает необходимость отделить общество от природы и рассматривать их как отдельно существующие субстанции, управляемые разными законами. В данных работах предпринята попытка заполнить эту пропасть. В статьях не ставилась задача открыть неизвестные ранее экономические законы. Суть работы заключается в том, что результаты гениальных математиков и физиков были применены для обоснования законов, полученных гениальными экономистами.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Векторы и скаляры

Величину, которая характеризуется не только числовым значением, но и направлением (направленный отрезок) называют *вектором*. В отличие от векторов величины, не имеющие направления, называют *скалярами*. Пока мы не рассматривали векторы, специальное слово «скаляр» можно было не вводить в употребление.

При движении в пространстве можно указать три линейно независимых вектора (любые три вектора, не параллельные одной плоскости). Совокупность этих векторов называется *базисом*. Очень удобно ввести в рассмотрение, так называемые, *единичные векторы* координатных осей $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ (векторы, направленные вдоль координатных осей $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ и длиной, равной безразмерной единице). Тогда произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ можно записать в виде:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_x i} + \boldsymbol{a_y j} + \boldsymbol{a_z k}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{a_x}, \boldsymbol{a_y}, \boldsymbol{a_z}$ – проекции вектора на оси базиса.

Один вектор трехмерного пространства полностью определяется тремя скалярами (проекциями вектора на оси базиса). При выборе другой системы координат проекции вектора изменятся. Такие величины принято называть «тензорными» в отличие от скаляров (таких, например, как температура и т.д.), которые от выбора системы координат не зависят. Сами же векторы остаются неизменными при замене осей декартовой системы координат (инвариантными). Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол – прямой.

Каждый вектор линейного $\boldsymbol{n}$-мерного пространства можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации $\boldsymbol{n}$ векторов базиса.

Скалярным произведением двух векторов называется *число*, равное произведению длины одного вектора на проекцию второго вектора на направление первого

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{ab}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta. \qquad (2)$$

Через $|\boldsymbol{a}|$ обозначена длина вектора $\boldsymbol{a}$ (она называется также *модулем* этого вектора), через θ – угол между направлениями векторов. Скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату модуля (длины) вектора $\boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}|^2$, так как $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$. Скалярное произведение двух перпендикулярных векторов (в том числе единичных векторов координатных осей $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) равно нулю, так как $\theta = \pi / 2$, $\cos\theta = 0$ (такая система осей называется *ортогональной*).

$$\boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{a_x i} + \boldsymbol{a_y j} + \boldsymbol{a_z k}) *$$
$$*(\boldsymbol{a_x i} + \boldsymbol{a_y j} + \boldsymbol{a_z k}) = \boldsymbol{a_x^2} + \boldsymbol{a_y^2} + \boldsymbol{a_z^2};$$

$$\boldsymbol{ab} = (\boldsymbol{a_x i} + \boldsymbol{a_y j} + \boldsymbol{a_z k}) * (\boldsymbol{b_x i} + \boldsymbol{b_y j} + \boldsymbol{b_z k}) =$$
$$= \boldsymbol{a_x b_x} + \boldsymbol{a_y b_y} + \boldsymbol{a_z b_z}.$$

При сложении двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, имеющих между своими направлениями угол φ, получаем величину $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{ab}\cos\varphi. \qquad (3)$$

Например, в газе относительная скорость $\boldsymbol{c}$ одной молекулы относительно другой определяется по этой формуле. Так как скорости молекул $\boldsymbol{a}$ могут иметь любые произвольные направления, а средние значения их величин в равновесном газе одинаковые, то усреднение данного соотношения по всем возможным углам дает величину:

$$\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^2, \; |\boldsymbol{c}| = \sqrt{2}|\boldsymbol{a}|. \qquad (4)$$

Если векторы имеют одинаковое или противоположное направление (лежат на одной или на параллельных прямых), то они называются *коллинеарными*. Одинаковые векторы противоположного направления называют *полярными*.

Векторным произведением двух векторов называется вектор перпендикулярный этим двум, длина которого равна площади параллелограмма, образованного исходными векторами

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{ab}] =$$
$$= \boldsymbol{i}(\boldsymbol{a_y b_z} - \boldsymbol{a_z b_y}) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{a_z b_x} - \boldsymbol{a_x b_z}) + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{a_x b_y} - \boldsymbol{a_y b_x}),$$

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta, \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \; \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \; \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

Направление вектора $a\times b$ определяется из требования, чтобы три вектора a, b и $[ab]$ образовывали *правовинтовую* систему. Все такие тройки разделяют на два класса, носящих название право- и левовинтовых. Тройки одного и того же класса могут быть приведены в совпадение *вращением*. Тройки разных классов переходят друг в друга путем *зеркального отражения*. Такие вектора называют *аксиальными* в отличие от полярных векторов, направление которых не зависит от выбора троек или координат.

Весьма важно, что не существует инвариантного геометрического определения этих двух классов троек: чтобы определить, например, правые тройки, необходимо конкретно указать какую-либо тройку (ссылкой на пальцы человеческой руки, на буравчик определенной нарезки и т.п.). Очевидно, что все имеющие геометрический и физический смысл соотношения не могут зависеть от того, какой из классов троек мы условимся называть правым. Это утверждение принято формулировать так: все соотношения должны быть *зеркально инвариантны*.

Запишем выражения для скалярного и векторного произведения в виде таблиц через координаты векторов:

таблица скалярного произведения

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ i & 1 & 0 & 0 \\ j & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{array}; \qquad (6)$$

таблица векторного произведения

$$\begin{array}{cccc} & i & j & k \\ i & 0 & k & -j \\ j & -k & 0 & i \\ k & j & -i & 0 \end{array}. \qquad (7)$$

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Смешанное или векторно-скалярное произведение трех векторов является скаляром и численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, записывается в виде:

$$a\times b\cdot c = b\times c\cdot a = (c\times a)\cdot b = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей.

Если смешанное произведение векторов равно нулю, то эти векторы *компланарны* – они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Двойное векторное произведение трех векторов равно

$$[a[bc]] = b(ac) - c(ab) = -[[bc]a]. \qquad (9)$$

Если векторы являются функциями переменной t, то можно дифференцировать векторы по этой переменной с соблюдением обычных правил

$$d(a+b)/dt = \dot{a} + \dot{b},\ d(\varphi a)/dt = \varphi\dot{a} + \dot{\varphi} a,$$

$$d(ab)/dt = (\dot{a}b) + (a\dot{b})$$

и т.д.

Скорость вращения вектора r, построенного из начала координат до какой-либо точки (так называемого радиуса вектора) равна: $v = \dot{r}$. С другой стороны $d\,r = r\times d\,\alpha$, т.е. $v = r\times \omega$, где $\omega = \dot{\alpha}$.

Комплексные числа

Одной из неразрешимых проблем математики действительных чисел является вычисление корня из отрицательного числа либо вычисление логарифма отрицательного числа, в этом случае говорят, что таких величин для вещественных чисел не существует. Для вычисления таких корней и логарифмов в курсе алгебры вводится *мнимая единица*, которая обозначается через i. Эта величина определяется условием $i^2 = -1$. Величины вида $z = x + iy$ (где x и y вещественные числа) называются *комплексными числами*. Комплексное число можно изображать точкой на плоскости. При этом по оси абсцисс откладывают величину x (т.е. *вещественную часть*), а по оси ординат – величину y (она называется *мнимой частью*). Алгебраические действия с комплексными числами производятся по обычным правилам. Два комплексных числа, отличающихся только знаком мнимой части, называют *сопряженными*:

$$z = x + iy, z^* = x - iy. \qquad (10)$$

Вместо того, чтобы говорить о точке z, можно говорить о векторе z, т.е. о направленном отрезке, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой z. Положение точки на плоскости можно характеризовать ее расстоянием от начала координат r и углом φ между вектором z и осью x (такое представление эквивалентно переходу к полярной системе координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$). В этом случае существует еще две записи комплексного числа, называемые *показательной формой* и *тригонометрической формой*,

$$z = r\exp(i\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (11)$$

где r – *модуль* комплексного числа, равный длине отрезка,

φ – аргумент комплексного числа.

Соотношение

$$\exp(i\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (12)$$

называется формулой Эйлера.

В математическом анализе доказаны равенства:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots;$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots; \qquad (13)$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

для произвольных x.

Такие функции, которые разлагаются в сходящийся степенной ряд, называются аналитическими. Из этих равенств получаются формулы Эйлера

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x); e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x).$$

Следовательно,

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};\ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \qquad (14)$$

При мнимых показателях показательная функция становится периодической:

$$\exp(i2n\pi) = 1 .$$

Также отметим, что

$$\exp(i\pi) = -1 .$$

Логарифм комплексного числа записывается в виде

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2n\pi)$$

и имеет бесчисленное множество значений.

Корень комплексного числа равен:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\exp\left(i\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \qquad (15)$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Любое алгебраическое уравнение степени n имеет n комплексных корней. Например, $x^3 = 1$ имеет корни 1; $-½+i\sqrt{3}/2$; $-½-i\sqrt{3}/3$, в то время как нахождение числа вещественных корней нелегкая задача.

Замечательно, что введение комплексных чисел является *последним* расширением числовой системы. С введением комплексных чисел становится возможным найти логарифм отрицательного числа

$$\ln(-1) = i(\pi + 2n\pi) ,$$

а также решать уравнения вида

$$\cos\varphi = 2 ,$$

при этом

$$\varphi = \pm\ln(2 + \sqrt{3})i + 2n\pi .$$

Матрицы

Пусть задана система уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ y_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{aligned} . \qquad (16)$$

Легко установить, что система решается однозначно при условии:

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0 .$$

В противном случае

$$x_1 = x_2$$

и

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} .$$

Мы можем переписать систему уравнений в виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

или

$$y = \alpha x , \qquad (17)$$

где y и x – векторы,

α_{ij} – матрица линейных преобразований от вектора x к вектору y,

$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ – *определитель матрицы*.

В геометрическом смысле этот определитель равен площади параллелограмма, натянутого на векторы y_1, y_2 , если принять векторы x_1, x_2 за базис. Тут имеется одна неточность: площадь в элементарно-геометрическом смысле есть величина положительная, определитель же может быть и отрицательным. Этот недостаток можно устранить, приписав площади параллелограмма определенный знак: площадь параллелограмма, считается положительной, если обход контура параллелограмма совершается по часовой стрелке (т.е. в сторону кратчайшего поворота вертикальной оси ординат к горизонтальной оси абсцисс). Заметим, что идея снабжать площади фигур определенным знаком, в зависимости от направления обхода, применяется не только к параллелограммам, но и оказывается полезной в целом ряде вопросов, позволяя формулировать результаты наиболее общим и окончательным образом.

В случае матрицы большего размера геометрическая интерпретация становится невозможна, однако существенные свойства как векторов, так и определителей сохраняются.

Пусть дан вектор u с координатами $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ Вектор u может быть представлен в виде *матрицы*, состоящей из одного столбца u_i … Группа линейных преобразований

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j ,$$

или

$$v = \alpha u , \qquad (18)$$

где

i – число строк,

j – число столбцов,

которая позволяет перейти от вектора u к вектору v, состоящему из одной строки, называется *матрицей* α (или α_{ij}).

Координаты вектора u вообще говоря являются функциями. В этом случае α называется *оператором*. Мы ввели понятие оператора точно так же как перед этим ввели понятие функции. В математике есть ряд операций разных уровней: функции действуют на числа, операторы – на функции, функторы – на операторы и т.д.

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженного на одно и то же число.

Справедливость указанных преобразований вытекает из естественных аналогичных преобразований соответствующей системы уравнений. Матрицу, полученную из исходной при помощи элементарных преобразований, называют *эквивалентной*.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*.

Для матрицы любого размера определитель вычисляется по формуле:

$$\Delta = \sum_j (-1)^{i+j} \alpha_{ij} A_{ij} , \qquad (19)$$

где A_{ij} – *минор* – определитель матрицы, полученной вычеркиванием строки и столбца, пересекающихся на элементе α_{ij} .

Определитель есть функция, линейная по каждому аргументу, т.е. обладающая свойствами:

$$f\left(\sum_i x_i\right)=\sum_i f(x_i),\ f(mx)=mf(x). \qquad (20)$$

Кроме линейности определитель обладает еще двумя свойствами:

- Если два вектора из n, из которых составлен определитель, равны между собою, то значение определителя равно нулю. Определитель, составленный из базисных векторов равен единице.
- Если определитель матрицы равен нулю, то говорят, что она *вырождена*. Если среди миноров порядка r вырожденной матрицы хотя бы один отличен от нуля, и все миноры порядка выше r равны нулю, то число r называется *рангом* этой матрицы. Ранг матрицы легко вычислить, если привести ее к каноническому виду при помощи элементарных преобразований.

От перемены мест двух векторов, входящих в определитель, его значение меняет знак.

Если α преобразует различные векторы в различные, т.е. неравенство $u \neq v$ влечет за собой $\alpha u \neq \alpha v$, матрица называется неособенной. Сложение матриц производится по правилу

$$\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}.$$

Пусть произведена операция α над результатом операции β, проделанной над вектором u. Если можно перейти непосредственно от u к конечному результату действия обоих операторов при помощи единственной операции γ, то оператор γ называется произведением операторов α и β:

$$\gamma u=\alpha(\beta u).$$

Символически это записывается

$$\gamma=\alpha\beta$$

или

$$\gamma_{ij}=\sum_k \alpha_{ik}\beta_{kj}. \qquad (21)$$

Следует заметить, что в большинстве случаев оператор $\alpha\beta$ отличается от $\beta\alpha$, поскольку порядок, в котором производятся операции, не безразличен. Разность

$$\alpha\beta-\beta\alpha \qquad (22)$$

назовем коммутатором операторов α и β.

Если коммутатор двух операторов равен нулю, то говорят, что операторы перестановочны. В этом случае

$$\alpha\beta=\beta\alpha.$$

Очевидно, что понятие произведения двух матриц приложимо не только к *квадратным* матрицам, когда число строк равно числу столбцов, или матрицам в одну строку или один столбец, но и к прямоугольным матрицам, но только в том случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Умножение матриц – некоммутативная операция, но легко показать, что эта операция ассоциативна, т.е.

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma.$$

Из правила умножения матриц непосредственно видно, что определитель произведения матриц равен произведению определителей:

если $\alpha\beta=\gamma$, то $|\alpha||\beta|=|\gamma|$.

Понятно, что это замечание имеет смысл только в случае квадратных матриц.

У *диагональной* матрицы все элементы равны нулю, кроме расположенных на главной диагонали

$$\alpha_{ii}\neq 0, \alpha_{ij}=0.$$

У *нулевой* $[0]$ матрицы все элементы равны нулю. *Единичная* матрица $[1]$ – это диагональная матрица, все элементы которой равны единице. Здесь удобно ввести символ Кронекера $\alpha_{ij}=\delta_{ij}$, который равен нулю при $i \neq j$ и единице при $i=j$.

Транспонированную матрицу $\tilde{\alpha}$ можно получить из матрицы α, заменив строки столбцами

$$\tilde{\alpha}_{ij}=\alpha_{ji}. \qquad (23)$$

Матрица, транспонированная матрице произведения, равна произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке.

Квадрат модуля вектора будет равен

$$\sum u_i^2=\tilde{u}u. \qquad (24)$$

Вектор-столбец при транспонировании превращается в вектор-строку.

Если квадратная матрица имеет n строк и столбцов, то число n называют *порядком матрицы*.

Если

$$v_i=\sum_j \alpha_{ij}u_j,$$

то обратные преобразования

$$u_i=\sum_j \alpha_{ij}^{-1}v_j \qquad (25)$$

определяют обратную матрицу α^{-1}.

$$(\alpha\beta...\omega)^{-1}=\omega^{-1}...\beta^{-1}\alpha^{-1}.\ v=\alpha u,\ u=\alpha^{-1}v=\alpha^{-1}\alpha u,$$

значит

$$\alpha^{-1}\alpha=[1],\ \alpha_{ij}^{-1}=\frac{(-1)^{i+j}A_{ij}}{\Delta}. \qquad (26)$$

При вычислении обратной матрицы предполагается, что исходная матрица невырождена. Всякая невырожденная матрица имеет обратную. В противном случае определить обратную матрицу невозможно.

При *преобразовании* системы координат вектор u_i переходит в вектор U_j при помощи матрицы преобразования координат σ_{ij},

$$u=\sigma U. \qquad (27)$$

Если число независимых векторов (размерность) прежнего и нового пространства различно, то матрица преобразования прямоугольна. Система осей координат называется *ортогональной*, если скалярное произведение двух любых ненулевых векторов, параллельных различным осям равно нулю. *Ортогональное преобразование координат* преобразует пространство, отнесенное к ортогональным осям координат, в новое пространство, также отнесенное к ортогональным осям. При ортогональном преобразовании достаточно, чтобы сохранялись длины векторов

$$\tilde{u}u=\tilde{U}U.$$

Но

$$u=\sigma U,$$

откуда

$$\tilde{u}=\tilde{U}\tilde{\sigma},$$

поэтому

$\tilde{U}U=\tilde{U}\tilde{\sigma}\sigma U$, т.е. $\tilde{\sigma}\sigma=[1]$ или $\tilde{\sigma}=\sigma^{-1}$.

Пусть

$$v = \alpha u, \ u = \sigma U, \ v = \sigma V.$$

Тогда

$$\sigma V = \alpha \sigma U,$$

откуда

$$V = \sigma^{-1} \alpha \sigma U = \tilde{\sigma} \alpha \sigma U. \qquad (28)$$

Эрмитовой называется матрица, в которой элементы, симметричные по отношению к главной диагонали, – комплексные сопряженные

$$\alpha_{ij} = \alpha^*_{ji}. \qquad (29)$$

Эрмитово-сопряженная матрица α^+ получается транспонированием исходной матрицы α и заменой полученных элементов на комплексно-сопряженные. При этом

$$\alpha^+ = \alpha, \ (\alpha\beta...\omega)^+ = \omega^+ ... \beta^+ \alpha^+.$$

Квадрат модуля комплексного вектора будет равен

$$\sum u_i^2 = u^+ u. \qquad (30)$$

Скалярное произведение двух комплексных векторов равно

$$u \cdot v = u^+ v. \qquad (31)$$

Определенное таким образом скалярное произведение уже не коммутативно.

Ортогональное комплексное пространство называется *унитарным*. При унитарном преобразовании эрмитово-сопряженная и обратная матрицы совпадают

$$V = \sigma^{-1} \alpha \sigma U = \sigma^+ \alpha \sigma U. \qquad (32)$$

Если вектор u таков, что преобразования, которые выполняет над ним матрица α, сводятся к его удлинению или сжатию, то он называется *собственным вектором*, его направление – *собственным направлением* и коэффициент его удлинения или сжатия λ – *собственным значением матрицы* α:

$$\alpha u = \lambda u. \qquad (33)$$

Если две матрицы коммутируют, то у них одинаковые собственные направления. Все собственные значения эрмитовой матрицы вещественны, а собственные направления ортогональны. Для симметричной матрицы собственные направления также ортогональны, так как такая матрица представляет собой частный случай эрмитовой.

Определитель матрицы вида:

$$\sum_j \alpha_{ij} u_j - \lambda u_i = 0 \ \text{ или } \ (\alpha - \lambda[1])u = [0]$$

равен:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} a_i \lambda^{n-i} + a_n = 0 \qquad (34)$$

и является *характеристическим уравнением* матрицы α. Коэффициент a_1 не что иное, как сумма элементов главной диагонали

$$\sum_i \alpha_{ii}. \qquad (35)$$

Эту сумму называют *следом* матрицы α. Коэффициент a_n равен определителю $|\alpha|$ матрицы α. По теореме Виета след матрицы равен сумме, а определитель – произведению собственных значений матрицы. Характеристическое уравнение остается инвариантным при всех преобразованиях системы координат.

Если матрица вырождена, то она имеет два совпадающих собственных значения. Предположим, что характеристическое уравнение матрицы α имеет лишь простые корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Тогда n собственных направлений различны. Их можно принять за оси координат. Обозначим через u_{ij} проекцию на ось i собственного вектора j. Тогда матрицей преобразования координат σ станет матрица $\lfloor u_{ij} \rfloor$.

В новой системе координат матрица α, преобразованная по правилу $\sigma^{-1}\alpha\sigma$, получит диагональный вид $\lfloor \lambda_i \rfloor$.

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных называется система вида

$$a_{ij} x_j = b_i, \qquad (36)$$

где числа a_{ij} называют коэффициентами системы,

b_i – *свободными членами*.

Расширенной матрицей называется матрица, дополненная столбцом свободных членов

$$(\alpha | b). \qquad (37)$$

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю.

Решением системы называются значения неизвестных $x_j = c_j$, при подстановке которых все уравнения системы превращаются в верные равенства. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы дает *теорема Кронекера-Капели*:

- система совместна, тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы;
- если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение;
- если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Однородная система всегда совместна, она имеет *нулевое (тривиальное) решение* $x_j = 0$.

Если ранг однородной системы равен размеру матрицы, то тривиальное решение единственно. Если ранг однородной системы меньше размера матрицы, то она имеет бесчисленное множество решений.

Для невырожденной системы с квадратной матрицей единственное решение можно записать в виде

$$x = \alpha^{-1} b. \qquad (38)$$

При внимательном рассмотрении указанного выше *матричного способа* решения системы можно заметить, что

$$x_j = \Delta_j / \Delta, \qquad (39)$$

где Δ_j – определитель матрицы, полученной заменой j-го столбца коэффициентов столбцом свободных членов.

Полученное выражение называют *формулами Крамера*. Их существенным недостатком является большая трудоемкость вычислений.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного вида).

Квадратичной формой называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:

$$\sum_i \sum_j \alpha_{ij} x_i x_j \text{ .} \qquad (40)$$

В матричной записи квадратичная форма имеет вид:

$$\tilde{x} \alpha x \text{ .} \qquad (41)$$

Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования $\tilde{\sigma}\alpha\sigma$ может быть приведена к каноническому виду:

$$\sum_i \alpha_{ii} x_i^2 \text{ .} \qquad (42)$$

Ранг матрицы квадратичной формы, называемый рангом квадратичной формы, равен числу отличных от нуля коэффициентов канонической формы и не меняется при линейных преобразованиях.

Для того, чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы были положительны (отрицательны).

Производные и дифференциалы

Как известно, производная $f'_x = df/dx$ гладкой функции $f(x)$ геометрически представляет собой направление (угловой коэффициент) касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке. Дифференциалом функции в этой точке называют величину изменения функции при бесконечно малом изменении ее аргумента

$$df = f'_x \Delta x \text{ .} \qquad (43)$$

Следовательно, дифференциал является функцией двух не зависящих друг от друга величин – точки дифференцирования и приращения. Таким образом, производная представляет собой дробь, состоящую из величин df и dx .

Когда аргумент x сам является функцией другого аргумента t, мы можем записать производную сложной функции

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = f'_x \dot{x} \text{ .} \qquad (44)$$

Для функции нескольких переменных принята следующая символика: если производная от функции $z(x_i)$ по переменной x_i взята как обычная производная при условии постоянства величин $x \neq x_i$ (которые стоят в виде индекса справа внизу), то такая производная называется частной и записывается в виде

$$(\partial z/\partial x_i)_{x \neq x_i} \text{ .} \qquad (45)$$

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных, это обычная производная при условии, что остальные переменные закреплены.

Геометрически частные производные функции двух переменных $z = f(x, y)$ представляют собой направления касательных к сечениям поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$.

Дифференциалом функции нескольких переменных называют уравнение вида:

$$dz = \sum_i A_i(x_i) dx_i = \sum_i \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)_{x \neq x_i} dx_i \text{ .} \qquad (46)$$

Стоящее в правой части выражение называется *дифференциальным выражением Пфаффа* или *пфаффовой формой*. Если интеграл от этого выражения не зависит от пути интегрирования, то в этом случае пфаффова форма является *полным дифференциалом*.

Для полного дифференциала запишем уравнение (46) в виде

$$dr = \sum_i A_i(x_i) dx_i - dz = 0 \text{ .}$$

Если функция может быть представлена в виде полного дифференциала при соответствующем наборе переменных, то указанная функция образует в пространстве этих переменных *поверхность состояния*, задаваемую соответствующим *уравнением состояния* ($r = const$ или $dr = 0$). В этом случае сколь угодно близко от поверхности состояния существуют точки, которые не могут быть достигнуты путем перемещения по поверхности состояния. Разная величина констант интегрирования для r дает разные поверхности состояния, которые не пересекаются между собой.

Например, К. Каратеодори (1909) предложил формулировку второго закона термодинамики, альтернативную традиционной (клаузиусовской) формулировке о невозможности самопроизвольного перехода теплоты от более холодного к более нагретому телу. Каратеодори *постулировал принцип адиабатной недостижимости*: адиабатные поверхности (поверхности состояния при $dQ = 0$, где Q – теплота) не пересекаются между собой, следовательно, в любой близости от всякого состояния системы существуют смежные состояния, которые не могут быть достигнуты адиабатным путем. На первый взгляд может показаться, что Каратеодори сформулировал второй закон термодинамики чисто теоретически, без привлечения каких-либо опытных фактов (т.е. не постулировал, а «доказал» этот закон). В действительности это не так. Принцип адиабатной недостижимости является постулатом (т.е. предложением, принимаемым без доказательства) в такой же мере, в какой является постулатом принцип Клаузиуса.

Чрезвычайно важно выяснить признак, который позволил бы однозначно определять, является пфаффова форма полным дифференциалом или не является. Такой признак был найден Л.Эйлером.

Теорема Бернулли-Эйлера: Вторые смешанные производные непрерывной функции равны между собой

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}$$

или

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)_{x \neq x_j} = \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)_{x \neq x_i} \text{ .} \qquad (47)$$

Для случая трех переменных эти условия могут быть представлены в компактной форме: rot $\boldsymbol{A}$ = 0.

Если для дифференциала функции можно найти такую функцию $\lambda(x_i)$ – называемую интегрирующим множителем, в результате умножения на которую пфаффова форма превращается в полный дифференциал, то такая пфаффова форма называется *голономной*. Пфаффовы формы не имеющие интегрирующего множителя называют *неголономными*.

Теорема Коши: для функции двух переменных интегрирующий множитель λ всегда существует, т.е. она всегда голономна:

$$dr = \lambda dz = \lambda m dx + \lambda n dy \qquad (48)$$

причем

$$\left(\frac{\partial \lambda m}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial \lambda n}{\partial x}\right)_y . \qquad (49)$$

Тогда

$$n\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_y - m\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)_x = \lambda\left[\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_y\right] \qquad (50)$$

т.е.

$$n\left(\frac{\partial \ln\lambda}{\partial x}\right)_y - m\left(\frac{\partial \ln\lambda}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_y . \qquad (51)$$

Это уравнение определяет искомую величину λ. Можно показать, что любая другая функция типа

$$\xi = \lambda f(r) \qquad (52)$$

также будет интегрирующим множителем.

Если число переменных больше двух, то пфаффова форма может иметь интегрирующий множитель, а может не иметь его. Пфаффова форма для случая трех переменных голономна в том случае, если выполняется соотношение $A \, rot\, A = 0$.

Функция, дифференциал которой равен полному дифференциалу, называется *функцией состояния*. Функция, дифференциал которой не равен полному дифференциалу, называется *функцией процесса*.

Если некоторая величина z является функцией двух переменных x и y, то с таким же основанием можно рассматривать x как функцию переменных y и z. В этой связи выделяют два важных преобразования: связку трех переменных и преобразование Лежандра.

Связка трех переменных.

Запишем пфаффову форму в виде

$$dz = mdx + ndy .$$

Введем новые переменные k и r, которые являются некими функциями переменных x, y и z.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial k}\right)_r = m\left(\frac{\partial x}{\partial k}\right)_r + n\left(\frac{\partial y}{\partial k}\right)_r = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial k}\right)_r + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial k}\right)_r .$$

Если принять $k = x$, то получим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_r = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_r . \qquad (53)$$

Если принять $k = x$, $r = z$, то получим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1 . \qquad (54)$$

Полезно подчеркнуть, что из полученных выражений следует – частная производная не есть обычная дробь, как это было в случае производной функции одной переменной. Сами по себе выражения ∂z и ∂x лишены смысла, т.к. могут быть вычислены при разных параметрах, например, $\partial z/\partial x$ в (53) при r и при y отличаются между собой. Также если бы в (54) написанные выражения были обычными дробями, их произведение равнялось бы $+1$. При записи закрепляемые параметры можно опускать, но важно помнить при каких именно параметрах происходят вычисления.

Записанные выражения оказываются очень полезными для различных вычислений в частных производных. Например, в термодинамике существуют выражения

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -1 ,$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v .$$

Преобразование Лежандра.

Преобразование, меняющее ролями зависимые и независимые переменные, называется *преобразованием Лежандра*. Рассмотрим полный дифференциал произвольной функции z

$$dz = \sum_i \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)_{x \neq x_i} dx_i = \sum_i X_i dx_i . \qquad (55)$$

Введем теперь функцию

$$f = z - X_1 x_1 . \qquad (56)$$

$$df = dz - X_1 dx_1 - x_1 dX_1 , \qquad (57)$$

откуда с учетом (55)

$$df = -x_1 dX_1 + \sum_{i \neq 1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)_{x \neq x_i} dx_i . \qquad (58)$$

Таким образом, в результате этого преобразования переменная x_1 стала зависимой, а переменная X_1 – независимой. Иными словами, для того чтобы поменять ролями зависимую и независимую переменные, необходимо использовать соотношение

$$Xdx = d(Xx) - xdX . \qquad (59)$$

Дифференциальные уравнения

Функции определяются из уравнений, выражающих математически те законы, которые управляют исследуемым явлением. В большинстве случаев эти уравнения содержат производные искомых функций. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями*. Мы будем считать, что встречающиеся нам функции *гладкие*, т.е. непрерывно дифференцируемые нужное число раз.

В общем случае, когда дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n} = f\left(t, \varphi, \ldots, \frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}}\right), \qquad (60)$$

т.е. разрешимо относительно старшей производной, оно называется *канонической формой уравнения*.

Вводя ($n - 1$) неизвестных функций, мы можем получить *нормальную форму системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = f_1(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\varphi}_n = f_n(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n). \end{cases} \qquad (61)$$

Можно ввести аналогичную запись

$$\dot{\varphi}_i = f_i(t; \varphi_j) \ . \qquad (62)$$

Если мы отыщем такие функции $\varphi_i(t)$, которые будут удовлетворять этой системе на некотором интервале значений $t_1 < t < t_2$, то такие функции называются *решением уравнения*.

Каждое дифференциальное уравнение вообще имеет бесконечное множество решений ввиду появления при интегрировании произвольных констант. Для того, чтобы выделить одно решение дифференциального уравнения, которое описывает определенное физическое явление, необходимо наложить дополнительные условия (начальные и граничные). Они связанны с изучаемым явлением и обычно имеют вид, указанный впервые Коши:

в некоторый начальный момент времени $t_0 = 0$ заданы значения $\varphi_i = \varphi_i^0$ и значения $\dot{\varphi}_i = \omega_i$.

Частным случаем дифференциального уравнения является линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$A\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) = \left(\frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n\right)\varphi(t) =$$

$$= \frac{d^n\varphi}{dt^n} + a_1\frac{d^n\varphi}{dt^n} + \ldots + a_n\varphi = 0 \ ,$$

где A называется оператором дифференцирования. Эйлер заметил особенно простой вид результата применения оператора $A\left(\frac{d}{dt}\right)$ к показательной функции $e^{\lambda t}$ (λ – постоянное). Действительно,

$$A\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\lambda t} = A(\lambda)e^{\lambda t} \ ; \ A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \ .$$

Из этой формулы вытекает, что если число λ есть корень уравнения $A(\lambda) = 0$, то $e^{\lambda t}$ есть решение дифференциального уравнения. Уравнение $A(\lambda) = 0$ имеет n корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, среди которых могут оказаться кратные и комплексные корни. Общее решение уравнения имеет вид

$$\varphi(t) = C_1\exp(\lambda_1 t) + \ldots + C_n\exp(\lambda_n t) \ .$$

Уравнение $A(\lambda) = 0$ называется *характеристическим уравнением* оператора A .

Система дифференциальных уравнений нормальной формы

$$\dot{\varphi}_i = f_i(t; \varphi_j; c_\alpha) \qquad (63)$$

задает динамическую модель или динамическую систему для идеализированного описания процессов, происходящих в любых реальных системах, какой бы ни была их природа (физическая, химическая, биологическая, экономическая и т.д.). Число координат φ_1 задает число *степеней свободы* динамической системы, определяя тем самым сколько величин необходимо задать, чтобы полностью охарактеризовать состояние системы. Если f_i явно не зависят от времени, то получим *автономную динамическую систему*:

$$\dot{\varphi}_i = f_i(\varphi_j; c_\alpha) \ . \qquad (64)$$

Заметим, что функции f_i динамической системы во многом аналогичны компонентам силы в классической механике. Если все функции f_i могут быть заданы антиградиентом (по отношению к φ_1) некоторой потенциальной функции, то получим *градиентную систему*:

$$\dot{\varphi}_i = f_i = -\frac{\partial V(\varphi_j; c_\alpha)}{\partial \varphi_i} \ ; \ (\dot{\varphi} = -grad_\varphi V), \qquad (65)$$

где V – некие потенциальные функции, локальные минимумы которых соответствуют равновесным состояниям.

Изучение *состояния равновесия* $\dot{\varphi}_i = 0$ *градиентных динамических систем* представляет особый интерес.

Основная задача теории дифференциальных уравнений состоит в исследовании движения системы по векторному полю фазовой скорости путем операции интегрирования. В общем виде эта задача не поддается средствам современной математики. Даже для очень простозадаваемых полей направлений на плоскости, уравнения интегральных кривых нельзя представить конечными комбинациями элементарных функций и интегралов.

Особенности функции двух переменных

Функцию двух переменных $z = V(x, y)$ удобно представлять себе геометрически как уравнение поверхности, где z есть высота, а x и y – координаты точки в горизонтальной плоскости. Однако изображать на плоском рисунке поверхность трудно. Поэтому для того, чтобы представить функцию двух переменных графически, можно построить серию кривых, представляющих собой сечения поверхности $z = V(x, y)$ горизонтальными плоскостями $z = const$, а затем нанести полученные кривые (так называемые *линии уровня*) на плоскость x, y. Этот способ применяется на географических картах для изображения рельефа местности.

Допустим, что эта функция имеет экстремум (максимум или минимум) при x_0, y_0. *Необходимые условия* экстремума функции двух переменных: $V'_x(x_0, y_0) = 0$, $V'_y(x_0, y_0) = 0$. Как известно, для функции $f(x)$ одного переменного достаточным условием экстремума является $f''(x_0) \neq 0$, максимум при $f''(x_0) < 0$, минимум при $f''(x_0) > 0$. Для функций двух переменных достаточное условие оказывается более сложным.

Мы можем разложить V в ряд Тейлора:

$$V(x, y) = V(x_0, y_0) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n V(x_0, y_0) \ . \qquad (66)$$

Если выполнены необходимые условия экстремума и мы пренебрегаем членами третьего и выше порядка малости, то формула приобретает вид

$$V(x, y) = V(x_0, y_0) + \tfrac{1}{2}[V''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 +$$

$$+ 2V''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + V''_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2] \ .$$

Обозначим для краткости

$$V''_{xx}(x_0,y_0)=A, V''_{xy}(x_0,y_0)=B, V''_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

$$\Delta x=\xi,\ \Delta y=\eta.$$

Тогда все зависит от поведения *квадратичной формы* (т.е. однородного многочлена второй степени)

$$P(\xi,\eta)=A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2.$$

Если квадратичная форма положительна при всех ξ,η (например, имеет вид $\xi^2+\eta^2$), то $V(x,y)>V(x_0,y_0)$ вблизи точки (x_0,y_0) и тем самым в этой точке функция V имеет минимум. Если эта форма отрицательна, то функция V в точке (x_0,y_0) имеет максимум. Если же эта форма может принимать значения обоих знаков (например, имеет вид $\xi^2-\eta^2$), то в точке (x_0,y_0)) будет минимакс, т.е. экстремума не будет.

Как же узнать по коэффициентам A,B,C, какой из этих случаев имеет место? Для этого напишем

$$P(\xi,\eta)=\eta^2\left[A\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2+2B\frac{\xi}{\eta}+C\right]=$$

$$=\eta^2(Ar^2+2Br+C), \qquad (67)$$

где

$$r=\xi/\eta.$$

Из элементарной математики известно, что если дискриминант $B^2-AC>0$, то многочлен, стоящий в скобках, имеет два вещественных нуля, при переходе через которые он меняет знак. Значит, это – случай минимакса. Если же $B^2-AC<0$, то указанный многочлен имеет мнимые нули и потому знака не меняет (многочлен может изменить знак, только пройдя через нуль). Значит, это – случай экстремума. Положим $r=0$. Мы видим, что если $C>0$, то многочлен положителен при всех r и потому функция V имеет в точке (x_0,y_0) минимум, если же дополнительно к $B^2-AC<0$ будет $C<0$, то функция V имеет максимум.

На различии между знаками дискриминанта основана классификация точек произвольной поверхности в пространстве. Пусть задана некоторая поверхность (S) и N – любая ее точка. Выберем систему координат так, чтобы оси x и y были параллельны касательной плоскости (P) к (S) в N. Тогда вблизи N поверхность (S) можно представить уравнением $z=V(x,y)$, причем в точке N в силу выбора осей выполняются равенства $V'_x(x_0,y_0)=0$, $V'_y(x_0,y_0)=0$, где x_0,y_0 – значения координат x, y у точки N, так что $N=(x_0,y_0,V(x_0,y_0))$. При этом в зависимости от того, выполняется ли неравенство $B^2-AC<0$ или $B^2-AC>0$, точка N называется *эллиптической* или *гиперболической точкой* поверхности (S). В первом случае поверхность (S) вблизи N выпукла и расположена по одну сторону от (P). Во втором случае поверхность (S) вблизи N имеет седлообразный характер и расположена по обе стороны от (P); касательная плоскость (P) пересекает (S) по двум линиям, пересекающимся в точке N.

Можно доказать, что эти условия не нарушаются при повороте осей координат в пространстве. Поэтому если уравнение поверхности (S) задано в виде $z=V(x,y)$, то для выяснения типа какой-нибудь точки этой поверхности нет надобности выбирать новые оси координат, чтобы удовлетворить условию $V'_x(x_0,y_0)=0$, $V'_y(x_0,y_0)=0$. Надо просто проверить выполнение условия $B^2-AC<0$ или $B^2-AC>0$ в исходной системе координат x,y,z.

Бывают поверхности, например, сфера, эллипсоид, параболоид вращения и т.д., у которых все точки эллиптические; такие поверхности выпуклы ***в целом***. Бывают поверхности, например, поверхность с уравнением $z=x^2-y^2$, у которых все точки гиперболические. Однако бывают поверхности, обладающие точками обоих типов; такой является, например, поверхность *тора*, т.е. бублика идеальной формы. В этом случае куски, заполненные эллиптическими точками, от кусков, заполненных гиперболическими точками, отделяются линиями, в точках которых $B^2-AC=0$; такие точки называются *параболическими*. На торе это точки; в которых касательная плоскость перпендикулярна оси тора, они заполняют две окружности. Впрочем, бывают и поверхности, например цилиндрические или конические, сплошь заполненные параболическими точками.

Ясно, что тип точки поверхности не меняется при любом перемещении этой поверхности в пространстве, т.е. указанная классификация точек поверхности является геометрически инвариантной. В отличие от этого понятие самой высокой или самой низкой точки поверхности, существенное при изучении экстремумов, не является инвариантно связанным с самой поверхностью, так как при повороте поверхности ее самая высокая точка перестает быть таковой.

Введем понятие *порядок касания*. Плоская кривая имеет два типа точек касания с прямой (касательной). Если кривая лежит по одну сторону от касательной, то прямая называется касательной первого порядка. Если кривая пересекает касательную в точке касания, то прямая называется касательной второго порядка, а точка касания является точкой перегиба кривой. Точки перегиба линии уровня функции $y=ó(x)$ геометрически инвариантные, в отличие от точек, отвечающих ее экстремальным значениям, которые не связаны с линией инвариантно.

Названия касательных обусловлены тем обстоятельством, что в подходящей системе координат, когда ось x параллельна касательной, первая производная кривой всегда равна нулю в точке касания, а вторая производная равна нулю только в точках перегиба кривой. Плоская кривая общего положения (т.е. во всех случаях, кроме некоторых исключительных) не имеет касательных выше второго порядка. Например, порядок касания оси x с графиками $y=x^{2n}(n\in N)$ первый, $y=x^{2n+1}$ – второй.

Для поверхности в пространстве дело обстоит не так просто.

1) В *эллиптической области*, когда поверхность выпукла, все касательные прямые на касательной плоскости имеют первый порядок в каждой эллиптической точке.

В точках, близ которых поверхность не выпукла, имеются касательные выше первого порядка. Они называются ***асимптотическими касательными***. Доказано, что:

2) В *гиперболической области* каждая точка имеет две касательных второго порядка. Значит, внутри области гиперболичности касательные второго порядка в каждой точке задают два направления, двигаясь по которым мы получаем сеть *асимптотических линий* на поверхности в трехмерном пространстве. Через каждую точку области гиперболичности проходят таким образом две асимптотические линии и множество неасимптотических.

В эллиптической области асимптотических линий нет. Две эти области эллиптическую и гиперболическую разделяет общая граница:

3) *Параболическая линия*, имеет в каждой точке одну касательную второго порядка (оба асимптотических направления совпадают и дают параболическую асимптотическую линию).

Рассматривая асимптотические линии внутри области гиперболичности мы можем найти их точки перегиба. Так как асимптотические линии проходят через каждую точку области, то их точки перегиба могут образовывать непрерывную особую линию:

4) *Кривую перегиба асимптотических линий*. Точки этой линии имеют касательную третьего порядка. Наконец, на этой кривой выделены еще особые точки трех типов:

5) *Точка двойного перегиба* (касательная четвертого порядка), т.е. точка, где кривая перегиба, в свою очередь, имеет точку перегиба.

6) *Перегиб обеих асимптотических линий* (две касательные третьего порядка), т.е. точка самопересечения кривой перегиба, где обе асимптотические линии имеют перегиб.

7) *Общие точки линий* 3) и 4), т.е. точки перегиба параболической линии .

Градиент

Пусть в пространстве, где задана скалярная функция $\boldsymbol{V}$, движется некоторая материальная точка. Скорость изменения $\boldsymbol{V}$ в этой точке вычисляется по правилу для производной сложной функции:

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{d\boldsymbol{t}}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{t}}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{t}}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}}\frac{d\boldsymbol{z}}{d\boldsymbol{t}}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{t}}. \qquad (68)$$

Если величина $\boldsymbol{V}$ не меняется с течением времени в каждой точке пространства, т.е. $\boldsymbol{V}$ не зависит от $\boldsymbol{t}$, говорят что «поле $\boldsymbol{V}$ *стационарное*» и $\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{t}}=\boldsymbol{0}$. В этом случае справа остаются только первые три слагаемых; они дают скорость изменения $\boldsymbol{V}$, полученную только за счет перехода точки $\boldsymbol{M}$ вдоль траектории от одних значений $\boldsymbol{V}$ к другим. Данная скорость называется *переносной (конвективной)*. Последнее слагаемое дает скорость изменения поля в неподвижной точке, полученную из-за *нестационарности* поля; такая скорость называется *местной (локальной)*.

Производную поля по времени удобно представить в виде скалярного произведения двух векторов

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{d\boldsymbol{t}}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}}\dot{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}}\dot{\boldsymbol{z}}=$$
$$=\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{i}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}}\boldsymbol{k}\right)\left(\dot{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{i}+\dot{\boldsymbol{y}}\,\boldsymbol{j}+\dot{\boldsymbol{z}}\,\boldsymbol{k}\right).$$

Для упрощения записи английский математик У. Гамильтон предложил ввести оператор ∇, называемый *набла*:

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}}\boldsymbol{k}\right). \qquad (69)$$

Данный оператор векторно-дифференциальный, имеющий при своем применении как черты вектора, так и черты оператора дифференцирования. Результат действия оператора набла на скалярное поле $\boldsymbol{V}$ называется *градиентом* поля $\boldsymbol{V}$, обозначается $\boldsymbol{gradV}$ и зависит лишь от выбора точки $\boldsymbol{M}$. Второй – это скорость движения материальной точки $\boldsymbol{v}$, зависит лишь от времени $\boldsymbol{t}$. Таким образом,

$$\dot{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{gradV}\,\boldsymbol{v}\,. \qquad (70)$$

Мы видим, что градиент ($\boldsymbol{grad}$), воздействуя на скалярное поле (функцию $\boldsymbol{V}$), задает векторное поле:

$$\boldsymbol{gradV}=\nabla\boldsymbol{V}=\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{j}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}}+\boldsymbol{k}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}}. \qquad (71)$$

Скалярное произведение двух векторов опять дает скаляр.

Положение точки характеризуется вектором $\boldsymbol{r}$, проведенным из начала координат в эту точку. В качестве параметра, определяющего положение движущейся точки вдоль траектории, берут длину $\boldsymbol{s}$ дуги, отсчитываемую вдоль траектории от некоторого начала отсчета, т.е. полагают $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{s})$. Производная

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{s}}=\boldsymbol{n}=\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{s}}\boldsymbol{i}+\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{s}}\boldsymbol{j}+\frac{d\boldsymbol{z}}{d\boldsymbol{s}}\boldsymbol{k}\right) \qquad (72)$$

представляет собой единичный вектор, направленный по касательной к траектории, так как отношение длины бесконечно малой дуги к стягивающей ее хорде стремится к единице $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{s}}\right|=1$.

Скорость изменения поля в направлении $\boldsymbol{s}$:

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{d\boldsymbol{s}}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{s}}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{y}}\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{s}}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{z}}\frac{d\boldsymbol{z}}{d\boldsymbol{s}}=\boldsymbol{gradV}\,\boldsymbol{n}\,. \qquad (73)$$

Первый множитель зависит лишь от выбора точки М; второй множитель зависит лишь от направления $\boldsymbol{s}$. Таким образом, это скалярное произведение равно просто проекции градиента на направление. Очевидно, что любой вектор дает самую большую проекцию, равную его длине, при проектировании на его собственное направление. Таким образом, вектор $\boldsymbol{gradV}$ указывает в сторону наибыстрейшего возрастания поля $\boldsymbol{V}$, чем поле меняется быстрее, тем $\boldsymbol{gradV}$ длиннее. Например, градиент температуры направлен «к печке». Градиент, будучи вектором, остается инвариантным (неизменным при замене координатных осей), что не было видно из его определения, данного в «неинвариантной» форме, привязанной к определенной системе координат. Может так случиться, что в различных точках пространства скалярное поле имеет одинаковые значения. Совокупность таких точек образует *поверхность уровня* этого поля, т.е. поверхность, на которой поле имеет постоянное значение ($\boldsymbol{V}=\boldsymbol{const}$). Градиент поля (направление его наибольшего возрастания) будет всегда перпендикулярен этой поверхности в каждой точке. Направление, перпендикулярное поверхности, называется нормалью этой поверхности.

Если скалярная функция $V(\varphi_i)$ является сложной функцией нескольких скаляров φ_i, которые сами представляют собой функции координат, то имеет место формула

$$gradV = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} grad\varphi_i . \qquad (74)$$

Многообразие и фазовое пространство

Положение точки в пространстве можно охарактеризовать тремя декартовыми координатами x, y, z (тогда как положение точки на плоскости определяется двумя координатами, а на линии – одной), в этом случае говорят, что при движении точки в пространстве имеется три *степени свободы*. В общем случае говорят о n-мерном вещественном пространстве R^n, где R – множество всех вещественных чисел. Если на пространстве R^n задана положительно – определенная билинейная симметричная форма

$$\left|\sqrt{(x-y)(x-y)}\right| , \qquad (75)$$

которая является модулем скалярного произведения и называется *расстоянием*, то такая форма называется также *евклидовой структурой*.

Положение вектора l на плоскости полностью определяется четырьмя координатами его концов. Однако *независимыми* будут только три из них, так как эти координаты связаны соотношением

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \left|\sqrt{(x-y)(x-y)}\right| = \rho(x,y),$$

которое является модулем скалярного произведения и длиной вектора. Эти три координаты будут *существенными* (т.е. полностью определяющими данный объект), так как при любом их изменении вектор фактически меняется.

В общем случае *число степеней свободы* для некоторого объекта определяется как число независимых и существенных координат, которые полностью определяют данный объект. Если имеется k *координат (степеней свободы)*, то говорят об обобщенном k *-мерном или конфигурационном пространстве* или k *-мерном многообразии*. В общем случае, если параметров n и они существенные, но связаны m независимыми уравнениями, то будет $n - m$ степеней свободы [Зельдович, с. 158-160]. Независимые уравнения называются *связями*. Системы с такого рода связями называют *несвободными* в отличие от *свободных* систем, у которых такие связи отсутствуют.

Если система несвободна, то *конечная или геометрическая связь* для $n\ (i = 1,\dots, n)$ точек системы выражается уравнением:

$$\Phi(t, r_i) = 0 . \qquad (76)$$

Каждая конечная связь влечет за собой как следствие *дифференциальную или кинематическую связь*:

$$\Gamma(t, r_i, \dot{r}_i) = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial r_i}\dot{r}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 , \qquad (77)$$

где

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} = grad_i \Phi .$$

Если для дифференциальной связи существует интеграл вида:

$$\Phi(t, r_i) = const , \qquad (78)$$

то она называется *интегрируемой*. Возьмем две системы возможных перемещений для одного и того же момента времени («замораживаем» время) и для одного и того же положения системы:

$$d\,r_i = v_i\,dt ,\ d'\,r_i = v_i'\,dt .$$

Для *виртуальных* (бесконечно малых) *перемещений*

$$\delta\,r_i = d'\,r_i - d\,r_i .$$

При «замороженных» связях, получаем

$$\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial r_i}\delta\,r_i = 0 . \qquad (79)$$

Конечная связь называется стационарной, если $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$. В этом случае движение точки i ограничено поверхностью $\Phi(r_i) = const$. Система называется *голономной*, если на точки этой системы не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи. При наличии дифференциальных неинтегрируемых связей система называется *неголономной*. Система называется *склерономной*, если на нее наложены только стационарные связи. В противном случае система называется *реономной*. Система n точек, на которую наложено m связей имеет $k = 3n - m$ степеней свободы и может быть полностью определена q_i – так называемыми *обобщенными координатами* ($j = 1,\dots, k$). Однако не обязательно в качестве таких независимых координат брать декартовы координаты. Можно выбрать такие функции, которые при подстановке в уравнения связей обращают последние в тождества.

Когда система (точка в пространстве) приходит в движение, ее координаты x_i начинают изменяться. В этом случае мы должны учесть скорость и направление движения системы, вводя с этой целью дополнительные координаты $\dot{x}_i$.

Пространство R^{2n} координат $(x_i, \dot{x}_i)$ называется *фазовым пространством*. Выбранные значения координат *полностью* определяют *состояние* системы или точку в пространстве, называемую *изображающей точкой*. Движение системы (ее изображающей точки) в пространстве описывается *фазовой траекторией* – геометрическим местом точек, где система побывала за время своего движения. Не следует путать фазовую траекторию с интегральной кривой, описываемой точкой $(t, x_i, \dot{x}_i)$ в пространстве R^{2n+1}. Траектории пространства R^n с координатами x_i могут пересекаться, так как в заданной точке система может иметь разные скорости, и ее состояние определено не полностью. Фазовые траектории никогда не пересекаются, так как в каждой точке состояние системы определено однозначно, и, следовательно, однозначно задано дальнейшее движение. Таким образом, не требуется задания никаких производных более высокого (чем нулевой и первый) порядка, например $\ddot{x}_i, \dddot{x}_i$, для полного описания движения системы. Этот нетривиальный факт является законом природы. Как уже говорилось, когда координаты *полностью определяют систему (полностью описывают именно те характеристики системы, которые важны для нас), то говорят, что выбранные координаты существенны.*

Поскольку каждой точке фазового пространства отвечает определенный вектор скорости, то мы можем вычислить *векторное поле* скоростей. Это векторное поле определяет дифференциальное уравнение процесса, т.е. *эволюционный процесс* в фазовом пространстве математически описывается векторным полем скоростей, направление вектора скорости в каждой точке (направление касательной к фазовой траектории) указывает направление процесса.

В некоторых точках x_i^0 выполняется условие $\dot{x}_i = 0$. Такие точки называют *положением равновесия*. В положении равновесия какое-либо направление отсутствует и фазовая кривая представляет собой точку, не связанную с другими фазовыми кривыми.

Фазовым потоком называется однопараметрическая группа преобразований фазового пространства:

$$(\varphi_i(0), \dot{\varphi}_i(0)) \mapsto (\varphi_i(t), \dot{\varphi}_i(t)). \qquad (80)$$

Гармонический осциллятор

Рассмотрим систему из двух уравнений нормальной формы

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y); \\ \dot{y} = Q(x,y). \end{cases} \qquad (81)$$

Если мы поделим нижнее уравнение системы на верхнее, то получим уравнение производной

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \qquad (82)$$

Вспомним ее геометрический смысл. В плоскости ***x, y*** для кривой ***y=y(x)***, которая является графиком решения этого уравнения (ее еще называют *интегральной линией* уравнения, а в нашем случае фазовой кривой), величина производной дает направление касательной к кривой, причем это направление можно определить для любой точки плоскости. Однако из этого правила есть важное исключение. Действительно, в положении равновесия выполняются условия:

$$\begin{cases} P(x,y) = 0; \\ Q(x,y) = 0. \end{cases} \qquad (83)$$

и функция ***f(x, y)*** теряет смысл. Положение равновесия называется *особой точкой* дифференциального уравнения (82). Ниже мы исследуем различные особые точки системы двух уравнений.

По второму закону Ньютона, движение материальной точки в потенциальном поле по одной из трех координат описывается дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{x} = f(x,y,z) = -\partial U(x,y,z)/\partial x, \qquad (84)$$

где m – масса материальной точки;

f – действующая на точку сила;

U – потенциальное поле.

Аналогичная (84) система дифференциальных уравнений нормальной формы в фазовом пространстве x, y выглядит как:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = f(x)/m. \end{cases} \qquad (85)$$

Исследуем систему вблизи положений равновесия, где выполняется условие $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$. Умножив левую и правую части уравнения на $\dot{x}$ и проинтегрировав по t, получим:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = V - U_x, \qquad (86)$$

где в левой части уравнения стоит кинетическая энергия, а константа интегрирования V – полная энергия системы. Если принять точку равновесия за начало координат, то при разложении в ряд Тейлора представление потенциальной функции около этой точки имеет вид:

$$U_x = U_0 + \frac{cx^2}{2} + \ldots, \qquad (87)$$

так как первая производная U в точке равновесия равна нулю, а представление силы имеет вид:

$$f_x = cx + \ldots. \qquad (88)$$

Для малых отклонений от состояния равновесия мы можем записать:

$$\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0, \quad \dot{x}^2 \pm \omega^2 x^2 = const, \qquad (89)$$

где

$$\mp\omega^2 = c/m.$$

В качестве второй переменной мы можем ввести функцию

$$y = \dot{x}/\omega, \qquad (90)$$

пропорциональную импульсу. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega y \\ \dot{y} &= \pm\omega x \end{aligned} \qquad (91)$$

и, если мы поделим нижнее уравнение системы (91) на верхнее, то получим уравнение производной

$$\frac{dx}{dy} = \mp\frac{y}{x}. \qquad (92)$$

Знак минус соответствует локальным максимумам U, так как вторая производная U отрицательна. В свою очередь, знак плюс соответствует локальным минимумам U. Системы, которые при соответствующей идеализации описываются уравнениями такого вида, называются *гармоническими осцилляторами*.

Разделив и проинтегрировав переменные дифференциального уравнения $\frac{dx}{dy} = \mp\frac{y}{x}$, получим два вида фазовых кривых вблизи точек равновесия. Первый вид:

$$x^2 + y^2 = const. \qquad (93)$$

Вблизи локальных минимумов фазовые траектории осциллятора представляют собой окружности, т.е. интегральные кривые окружают особую точку, но через саму особую точку не проходит ни одна интегральная кривая. Когда константа равна нулю, фазовая кривая представляет собой точку в начале координат. Особая точка такого типа называется *центром*.

Второй вид

$$x^2 - y^2 = const. \qquad (94)$$

Вблизи локальных максимумов при равной нулю константе получаем две прямые $x = \pm y$, проходящие через начало координат под углом 45^0, остальные при отличной от нуля константе – гиперболы, не проходят через эту особую точку. Особая точка такого типа называется *седлом*. Если построить функцию $z = x^2 + y^2$, то при $y = 0$ получаем $z = x^2$, т.е. от начала координат вдоль оси х функция в обе стороны возрастает, а в самом начале имеет минимум. Если же $x = 0$, то $z = -y^2$, т.е. вдоль оси y функция в обе стороны убывает, а в самом начале имеет максимум. Если рассмотреть другие прямые, проходящие через начало координат, то вдоль одних из них функция имеет в начале максимум, а вдоль других – минимум. Такой случай называется *минимакс*. В географии минимакс – это *седловина*, которая наблюдается, например, в точке перевала через горный хребет; другой пример – это просто седло.

Замена координат, гладкая вместе с обратной заменой называется *диффеоморфизм*. Если мы заменим в (89) ω на $\omega = i\varpi$, то, например, уравнение с отталкивающей силой $-\omega^2 x$ переходит в уравнение аналогичное случаю с притягивающей силой $+\varpi^2 x$:

$\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0$ переходит в $\ddot{x} \mp \varpi^2 x = 0$.

Система (91) из двух уравнений приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = i\varpi y; \\ i\dot{y} = \mp\varpi x. \end{cases} \qquad (95)$$

Перейдя к комплексной плоскости заменой y на iy, мы из седла получим цикл, целиком лежащий в комплексной плоскости, и, соответственно, из цикла получим седло, целиком лежащее в комплексной области. Цикл и седло, переходящие друг в друга, представляют собой неасимптотически устойчивое промежуточное положение.

Рассмотрим уравнение движения классического математического маятника из школьного учебника физики:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi, \qquad (96)$$

где

l – длина нерастяжимой нити, закрепленной в неподвижной точке, на конце которой находится груз;

m – масса груза;

φ – угол отклонения нити от положения равновесия.

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\sin\varphi, \ \omega = \sqrt{g/l}, \qquad (97)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega\psi; \\ \dot{\psi} = -\omega\sin\varphi \end{cases}, \ U_\varphi = -\omega^2\cos\varphi.$$

На интервале от $-\pi$ до π, точка $\varphi = 0$ – минимум, $\varphi = \pm\pi$ – максимумы.

Получаем уравнение

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{\psi}. \qquad (98)$$

Решением является уравнение фазовых кривых:

$$\psi = \pm\sqrt{2\cos\varphi + const}. \qquad (99)$$

Знак «+» соответствует верхней половине фазовой траектории, знак «–» – нижней (рис. 3).

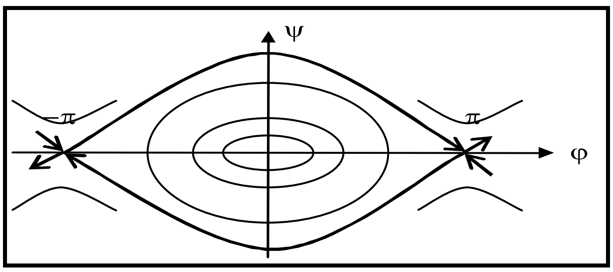

Рис. 3. Фазовый портрет математического маятника

Исходя из условия $\dot{\varphi} = \omega\psi$, стрелочки, обозначающие направление движения по фазовым траекториям, расставляем так, чтобы в верхней полуплоскости они были обращены направо, а в нижней – налево. Когда константа больше 2, – фазовые кривые представляют собой волнистые линии, лежащие в основном за пределами рисунка, маятник вращается вокруг своей оси. Если константа меньше 2, – фазовые кривые представляют собой замкнутые линии вокруг начала координат – маятник совершает колебания вокруг нижнего положения равновесия типа центр. Если константа равна двум, – маятник может оказаться в верхнем, неустойчивом положении равновесия типа седло – в точке $\pm\pi$. Траектории, ведущие в точку седла или уходящие из этой точки, называют *сепаратрисами*. Определим зависимость $\varphi(t)$, при движении изображающей точки по сепаратрисе при $\varphi_0 = 0$:

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{2\cos\varphi + 2} = \pm\sqrt{4\cos^2(\varphi/2)} = \pm 2\cos(\varphi/2).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\ln\left|tg\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)\right| = \pm\omega(t - t_0).$$

$$\varphi = 4arctg(\exp[\pm\omega(t - t_0)]) - \pi. \qquad (100)$$

Фазовая траектория, представленная входящей в седло сепаратрисой, не содержит точку седла. Система, движущаяся по этой фазовой траектории, лишь асимптотически приближается к точке седла $\varphi = +\pi$ с $t \to \infty$ и к точке седла $\varphi = -\pi$ с $t \to -\infty$. Точка седла представляет собой одну отдельную фазовую траекторию.

Сепаратрисы играют важную роль, поскольку разбивают фазовую плоскость на области качественно разной по характеру динамики (в данном случае вращение и колебания), отвечающие траекториям *разного топологического типа*. Этим и определяется их название (separate – разделять, отделять).

Полезно и иное толкование тех же явлений, связанное с рассмотрением *энергии*. Если мы умножим уравнение $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$ на $\dot{\varphi}$ и проинтегрируем по времени, то получим:

$$H = \frac{p^2}{2m} - mgl\cos\varphi, \qquad (101)$$

где $p = ml\dot{\varphi}$ – импульс маятника;

H – константа интегрирования.

Первый член зависит только от импульса p и соответствует кинетической энергии, а второй зависит только от координаты φ и соответствует потенциальной энергии (энергии, зависящей от положения тела) в поле земного тяготения. Константа интегрирования H соответствует полной энергии консервативной системы. Выделяют два класса динамических систем – консервативные и диссипативные. Система будет *консервативной*, если колебательные процессы в ней протекают так, что полная механическая энергия остается с течением времени постоянной. Системы, в которых имеются потери механической энергии из-за трения, называются *диссипативными*. Система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет всегда бесконечное множество решений, и для задания одного определенного решения нужно указать его начальные значения. Поэтому для консервативных систем характерно неограниченно долгое сохранение «памяти» о начальном состоянии. В диссипативных системах любое (возмущенное) решение очень быстро стремится к стационарному (невозмущенному), и очень скоро становится практически неотличимо от него. При этом «память» о начальных условиях теряется. В общем случае функция H переменных p и q (импульсов и координат) называется функцией Гамильтона, или *гамильтонианом* H, который полностью определяет движение консервативной системы (системы с сохранением полной энергии).

Если в системе имеется трение и его сила равна $2\gamma\dot{x}$, то уравнение (89) принимает вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 . \qquad (102)$$

Величина γ имеет размерность $[время]^{-1}$, так же как и ω. Полная энергия системы рассеивается, переходит в тепло. Действительно:

$$\frac{1}{ml^2}\dot{H} = \dot{x}\left(\ddot{x} + \omega^2 x\right) = -2\gamma\left(\dot{x}\right)^2 . \qquad (103)$$

Производная отрицательна, следовательно, H убывает. Система становится диссипативной. При небольшом γ изображающая точка, двигаясь в первом приближении вдоль замкнутых кривых, будет постепенно переходить с одной кривой на другую соответственно уменьшению энергии. Движение будет совершаться не по замкнутой траектории, а по скручивающейся спирали. Это соответствует затухающим колебаниям.

Для уравнения $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$ удобно ввести функцию

$$y = \frac{\dot{x} + \gamma x}{\varpi}, \qquad (104)$$

где $\varpi = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$.

Система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -\gamma x + \varpi y; \\ \dot{y} = -\varpi x - \gamma y. \end{cases} \qquad (105)$$

При $\gamma = 0$ получаем систему для осциллятора без трения, которая является частным случаем этой. Одно комплексное уравнение – это два вещественных, так же как одно комплексное число – два вещественных и одна комплексная функция – две вещественных.

Рассматривая эту систему, мы можем для удобства рассматривать не вещественную, а комплексную плоскость, что упрощает задачу, не меняя результат.

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{x} + i\dot{y} = (-\gamma x + \varpi y) + i(-\gamma y - \varpi x) = \\ &= -\gamma(x + iy) - i\varpi(x + iy) = -zw \end{aligned}, \qquad (106)$$

где

$$z = \gamma + i\varpi .$$

Решением уравнения $\dot{w} = -zw$ является функция

$$w = w_0 e^{-zt} = Ae^{-i\theta}e^{-(\gamma + i\varpi)t} .$$

Решение для x и y выписывается непосредственно:

$$\begin{aligned} x + iy &= w_0 e^{-zt} = Ae^{-i\theta}e^{-\gamma t}e^{-i\varpi t} = \\ &= Ae^{-\gamma t}\cos\left(\varpi t + \theta\right) + i\left(-Ae^{-\gamma t}\sin\left(\varpi t + \theta\right)\right) \end{aligned}. \qquad (107)$$

Проведя комплексификацию, мы получили, что колебание описывается кривой на комплексной плоскости. Уравнения $x(t)$ и $y(t)$ являются параметрическими уравнениями *фазовой траектории*. Параметрическим называется такой способ задания функции, когда обе переменные оказывается возможным выразить в виде функции одной и той же вспомогательной переменной t, которая называется параметром. Возведя уравнения в квадрат и сложив их, получаем:

$$x^2 + y^2 = A^2 e^{-2\gamma t} . \qquad (108)$$

Мы получили семейство так называемых логарифмических спиралей, накручивающихся на начало координат. Мы видим, что амплитуда колебаний, равная в этом случае $Ae^{-\gamma t}$, экспоненциально затухает с возрастанием t. Такое затухание называется асимптотическим. Через некоторое количество колебаний изображающая точка остановится. Мы имеем стационарное или *невозмущенное* решение – положение равновесия $r \equiv 0$. *Возмущенное* решение приближается к *невозмущенному* нулевому решению. Невозмущенное решение называется *асимптотически устойчивым относительно изменения* (возмущения) *начального условия* или *асимптотически устойчивым по Ляпунову* по имени выдающегося русского математика и механика А.М. Ляпунова (1857-1918), который впервые начал систематически изучать понятие устойчивости процессов.

Такая особая точка называется асимптотически *устойчивый фокус*. Если трение отрицательно $\gamma < 0$, то спираль разматывается из начала координат и особая точка называется асимптотически *неустойчивый фокус*.

При $\gamma = 0$ решение будет просто постоянным и потому при малом начальном отклонении возмущенного решения от невозмущенного первое будет близким ко второму, хотя и не будет к нему асимптотически приближаться. В этом случае говорят о *неасимптотической устойчивости* невозмущенного решения. Говорят, что поведение системы при переходе параметра γ через нуль приводит к *катастрофе* – скачкообразному переходу системы из устойчивого состояния в неустойчивое (качественной трансформации), возникающему в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий (плавное изменение параметра).

Вспомнив показательную форму комплексного числа w, запишем: $w = r\exp(i\alpha)$, где $r = |w|$ – радиус-вектор, проведенный к точке состояния системы из начала координат. Подставляя это выражение в уравнение $\dot{w} = -(\gamma + i\varpi)w$ и приравнивая действительные и мнимые части, опять получим два уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\gamma r, \\ \dot{\alpha} &= -\varpi; \end{aligned} \qquad (109)$$

откуда:

$$\begin{cases} r = Ae^{-\gamma t}; \\ \alpha = -\left(\varpi t + \theta\right). \end{cases} \qquad (110)$$

Такой способ представления наиболее удобен для качественного анализа системы дифференциальных уравнений. Например, мы сразу видим, что $\dot{r}$ отрицательна (положительна, равна нулю) при положительных (отрицательных, нулевых) γ, следовательно, r стремится к нулю (бесконечности, остается постоянным), вращаясь при этом вокруг начала координат с угловой скоростью $-\omega$.

При очень больших значениях диссипации, когда $\omega^2 < \gamma^2$, характер движения вблизи устойчивых состояний опять должен измениться, вместо приближения траекторий к равновесию должно происходить просто медленное затухание величины отклонения от неподвижной точки, без перемен знака. В этом случае ϖ является мнимой величиной:

$$\dot{w} = \dot{x} + i\dot{y} = -(\gamma + i\varpi)w = (-\gamma + \varepsilon)(x + iy) = \xi w\,, \quad (111)$$

где

$$\varpi = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = i\varepsilon\,,$$

ε, ξ – действительные числа;

откуда:

$$\dot{x} + i\dot{y} = (-\gamma + \varepsilon)x + i(-\gamma + \varepsilon)y\,, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \qquad (112)$$

Оба уравнения тождественны друг другу и $y=Cx$.

Радиус-вектор стремится к нулю (бесконечности) в зависимости от знака γ без вращения вокруг начала координат. Совокупность интегральных кривых представляет собой линии, проходящие через начало координат и имеющие там определенное направление. Начало координат является особой точкой. Такая особая точка называется *узлом*. При $\gamma > 0$ мы имеем *устойчивый узел*, при $\gamma < 0$ – *неустойчивый узел*.

В окрестности особых точек типа седла фазовые траектории устроены качественно так же, как и в консервативном случае. В частности у каждого седла имеется устойчивая сепаратриса – две ветви траекторий, асимптотически приближающихся к седлу, и неустойчивая сепаратриса из двух ветвей, вдоль которых изображающая точка удаляется от седла.

Приведение нелинейных уравнений к линейным

Разложив в ряд по малым x и y правые части в системе из двух уравнений нормальной формы

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) = P'_x x + P'_y y; \\ \dot{y} = Q(x,y) = Q'_x x + Q'_y y.' \end{cases} \qquad (113)$$

и подставив в систему уравнений решения в виде

$$x = x_0 e^{\lambda t}; \quad y = y_0 e^{\lambda t}\,, \qquad (114)$$

мы можем получить все перечисленные выше шесть типов движений.

В общем случае разложим функции в правых частях уравнений в ряд Тейлора в точке равновесия φ_i^0 по малым добавкам φ_i:

$$\dot{\varphi}_i = \sum_j \frac{\partial f_i(\varphi^0)}{\partial \varphi_j} \varphi_j$$

или в матричном виде:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial f_i(\varphi^0)}{\partial \varphi_j} \varphi_j = J_{ij}\varphi_j\,. \qquad (115)$$

Фигурирующую здесь матрицу, элементами которой служат частные производные функций, называют *матрицей Якоби* или *Якобианом*. Полагая $\varphi_i = a_i e^{\lambda t}$, получим:

$$\dot{\varphi}_i = \lambda\varphi_i = J_{ij}\varphi_j$$

или

$$(J_{ij} - \lambda[1])\varphi_j = [0]. \qquad (116)$$

Решив характеристическое уравнение, мы получим решение в виде:

$$\varphi(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + \ldots + C_n \exp(\lambda_n t)\,.$$

Для нашей динамической системы второго порядка характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - S\lambda + J = 0\,, \qquad (117)$$

где

S – след матрицы Якоби (сумма диагональных элементов) равен сумме собственных чисел;

J – определитель матрицы равен произведению собственных чисел.

Каноническая форма уравнения гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (118)$$

имеет такое же характеристическое уравнение, где

$$S = -2\gamma\,, \ J = \omega^2\,.$$

Корни характеристического уравнения вычисляются по формуле

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}\,. \qquad (119)$$

В зависимости от значения корней характеристического уравнения мы имеем следующую классификацию особых точек:

Условие на собственные числа	Тип особой точки
Действительные, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел
Действительные, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Седло
Действительные, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Устойчивый узел
Чисто мнимые, $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$	Центр (в консервативных системах)
Комплексно сопряженные, $Re\,\lambda > 0$	Неустойчивый фокус
Комплексно сопряженные, $Re\,\lambda < 0$	Устойчивый фокус

Рассмотрим систему химических уравнений вида:

$$\begin{cases} a + x \xrightarrow{k_1} 2x; \\ x + y \xrightarrow{k_2} 2y; \\ y \xrightarrow{k_3} e. \end{cases} \qquad (120)$$

Эти химические процессы можно записать в виде дифференциальных уравнений. Получаем единственное ненулевое стационарное решение (x_0, y_0):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1 a x - k_2 x y, & x_0 &= \frac{k_3}{k_2}; \\ \dot{y} &= k_2 x y - k_3 y, & y_0 &= \frac{k_1}{k_2} a. \end{aligned} \qquad (121)$$

Концентрации исходного вещества a и конечного продукта e поддерживаются постоянными по времени. Аналогичную модель для экологии связывают в литературе с именами Лотки и Вольтерр.

Мы можем искать решения так называемым методом нормальных мод, что аналогично разложению в ряд Тейлора:

$$X = X_0 + xe^{\omega t}\,, \ Y = Y_0 + ye^{\omega t}\,, \qquad (122)$$

где

$$|x/X_0| \langle\langle 1, |y/Y_0| \langle\langle 1\,.$$

Подставим решения в систему дифференциальных уравнений (121). Членами старших порядков x и y

можно пренебречь. Мы получаем систему линейных однородных уравнений:

$$\dot{x} = -\omega x - k_3 y; \quad \dot{y} = k_1 a x - \omega y. \tag{123}$$

Откуда получаем дисперсионное уравнение, приравнивая определитель системы нулю:

$$\omega^2 + k_1 k_3 a = 0 . \tag{124}$$

Если для каждого решения ωn дисперсионного уравнения выполняется неравенство $Re\omega_n < 0$, то невозмущенное состояние устойчиво. В данном случае $Re\omega_n = 0$, $Im\omega_n = \pm\sqrt{k_1 k_3 a}$. Это означает, что мы имеем дело, с так называемой, нейтральной устойчивостью. Частота колебаний зависит от амплитуды, и вокруг стационарного состояния существует бесконечно много периодических орбит.

Рассмотрим теперь, так называемый, брюсселятор. Концентрации исходных веществ и конечных продуктов a, b, c и d остаются постоянными, константы скоростей полагают равными единице:

$$\begin{aligned} a &\to x \\ 2x + y &\to 3x \\ b + x &\to y + c \\ x &\to d \end{aligned};$$

$$\dot{x} = a + x^2 y - bx - x \quad \dot{y} = bx - x^2 y \quad ; \quad x_0 = a,\ y_0 = \frac{b}{a}$$

$$\dot{x} = (b - 1 - \omega)x + a^2 y \ ;$$

$$\dot{y} = -bx - (a^2 + \omega)y \ .$$

Применяя метод нормальных мод, получаем дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 + \left(a^2 - b + 1\right)\omega + a^2 = 0 . \tag{125}$$

Вещественная часть одного из корней становится положительной $\left(Re\omega_n > 0\right)$ при $b > 1 + a^2$. Следовательно, в схеме брюсселятора в отличие от схемы Лотки-Вольтерра имеется настоящая неустойчивость – предельный цикл, т.е. любая начальная точка (состояние системы) на плоскости (x, y) со временем приближается к одной и той же периодической траектории. Частота колебаний в брюсселяторе становится вполне определенной функцией физико-химического состояния системы. Такое пространственно неоднородное стационарное состояние называют бифуркацией Тьюринга. Бифуркация – возникновение при некотором критическом значении параметра нового решения уравнений.

Осциллятор с квадратичной нелинейностью

Исследуя систему уравнений (85) вблизи положений равновесия, мы учитывали при разложении в ряд Тейлора только член первого порядка малости. При учете в разложении Тейлора двух членов получаем *уравнение осциллятора с квадратичной нелинейностью*:

$$\ddot{x} \pm \omega^2 x \pm \frac{\omega^2}{\alpha} x^2 = 0 . \tag{126}$$

При этом $\alpha << \omega^2$ – малый параметр, чтобы второй член разложения был сравним по величине с первым. Для

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \frac{\omega^2}{\alpha} x^2 = 0 \tag{127}$$

получаем

$$U_x = \frac{\omega^2}{\alpha}\left(\frac{\alpha x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \tag{128}$$

с точностью до произвольной постоянной. В начале координат $x = 0$ имеется локальный минимум (потенциальная яма), где будет располагаться особая точка типа центр. При $x = -\alpha$ потенциальная функция имеет максимум

$$U_{-\alpha} = \frac{\omega^2}{\alpha}\frac{\alpha^3}{6}, \tag{129}$$

который определяет глубину потенциальной ямы, и здесь находится особая точка – седло. С ростом α размеры ямы быстро увеличиваются, и при малых значениях x справедливо уравнение гармонического осциллятора.

Для функции $y = \dot{x} / \omega$ получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\alpha x - x^2}{\alpha y} . \tag{130}$$

В точках равновесия верхняя и нижняя части дроби дают функции:

$$y = 0 ,\ x(\alpha + x) = 0 . \tag{131}$$

Пересечение этих функций дает точки равновесия. Разделив и проинтегрировав переменные, получим уравнение для фазовых кривых:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\sqrt{const - \frac{\alpha x^2}{2} - \frac{x^3}{3}} . \tag{132}$$

Знак «+» соответствует верхней половине фазовой траектории, знак «–» – нижней (рис. 4, 5).

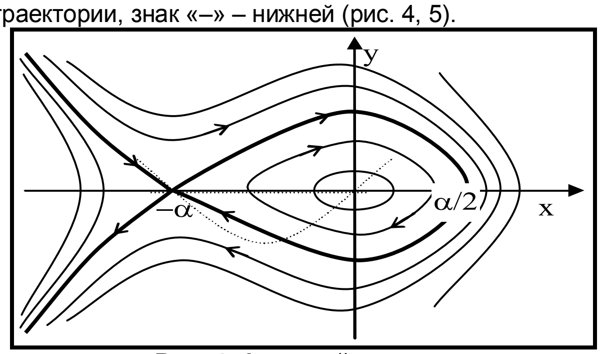

Рис. 4. Фазовый портрет

Уравнение сепаратрисы записывается при $const = \alpha^3/6$. Сепаратриса делит фазовую плоскость на три области топологических типов траекторий: замкнутые траектории внутри петли сепаратрисы при $const < \alpha^3/6$ соответствуют колебаниям возле локального минимума, незамкнутые траектории слева от сепаратрисы при $const < \alpha^3/6$ и $x < -\alpha$ отвечают движениям по левому склону потенциального рельефа, незамкнутые траектории справа от сепаратрисы при $const > \alpha^3/6$ соответствуют движениям по всей потенциальной поверхности, за исключением локальной ямы. В двух последних случаях траектории уходят на минус бесконечность при больших временах. Определим зависимость $x(t)$ при движении изображающей точки по сепаратрисе при $x_0 = \alpha/2$. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int_{\alpha/2}^{x} \frac{\sqrt{3\alpha}dx}{(x+\alpha)\sqrt{\alpha-2x}} = 2ln\left|\frac{\sqrt{\alpha-2x}-\sqrt{3\alpha}}{\sqrt{\alpha-2x}+\sqrt{3\alpha}}\right| = \pm\omega(t-t_0),$$

$$x = \frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2th^2\left[\pm\omega/2(t-t_0)\right]}. \qquad (133)$$

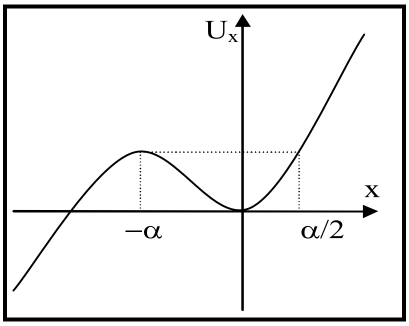

Рис. 5. Потенциальная функция U_x

Петля сепаратрисы не содержит точку седла. Система, движущаяся по этой фазовой траектории, лишь асимптотически приближается к точке седла $\tilde{o} = -\alpha$ с $t \to \infty$. Точка седла представляет собой одну отдельную фазовую траекторию.

Другие варианты уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью представляют собой либо повторение рассмотренного случая, либо случай зеркального отображения $\tilde{o} \to -x$, когда точка седла находится при $x = \alpha$. Для системы с трением мы получим фокус или узел внутри петли сепаратрисы.

Осциллятор с кубической нелинейностью

Рассмотренная модель, однако, заведомо непригодна в одном широко распространенном случае, когда потенциал, симметричный $U(-x) = U(x)$ и, соответственно, $f(-x) = -f(x)$. Коэффициент α обращается в нуль и для учета влияния нелинейных эффектов необходимо принять во внимание следующий, кубический член

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} \pm \omega^2 x \pm \frac{\omega^2}{\beta^2}x^3 = 0. \qquad (134)$$

При этом $\beta^2 << \omega^2$. В литературе осциллятор с кубической нелинейностью называют также осциллятором Дуффинга [Holmes, Мун, Неймарк].

Рассмотрим случай

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x \pm \frac{\omega^2}{\beta^2}x^3 = 0. \qquad (135)$$

Для функции $y = \dot{x}/\omega$ получаем

$$\dot{y} = -2\gamma y - \omega x \mp \frac{\omega}{\beta^2}x^3,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\gamma}{\omega} - \frac{x(\beta^2 \pm x^2)}{\beta^2 y}. \qquad (136)$$

Случаи, когда удается найти точные решения в явной аналитической форме, представляют, скорее, исключение из правил. Поэтому в теории колебаний разработан богатый арсенал приближенных или *асимптотических* методов. Как мы увидим, в отличие от рассмотренных выше моделей колебания осциллятора Дуффинга являются неизохронными, т.е. их период зависит от времени. Мы должны учесть не только изменение амплитуды от времени, но и изменение частоты. Перейдем к полярной системе координат $x = rcos(\omega t + \theta)$, $y = -rsin(\omega t + \theta)$, причем r и θ независимые переменные, медленно меняющиеся от времени t:

$$\begin{cases} \dot{r}cos(\omega t+\theta) - r\dot{\theta}sin(\omega t+\theta) = 0; \\ -\dot{r}sin(\omega t+\theta) - r\dot{\theta}cos(\omega t+\theta) = \\ = 2\gamma r sin(\omega t+\theta) \mp \dfrac{\omega}{\beta^2}r^3cos^3(\omega t+\theta). \end{cases}$$

Разрешив систему относительно $\dot{r}$ и $\dot{\theta}$, получаем:

$$\begin{cases} \dot{r} = -2\gamma r sin^2(\omega t+\theta) \pm \\ \pm \dfrac{\omega}{\beta^2}r^3cos^3(\omega t+\theta)sin(\omega t+\theta) = f(r,\theta,t); \\ \dot{\theta} = -2\gamma sin(\omega t+\theta)cos(\omega t+\theta) \pm \\ \pm \dfrac{\omega}{\beta^2}r^2cos^4(\omega t+\theta) = g(r,\theta,t). \end{cases}$$

Так как формулы преобразования содержали явно время, то новая система уравнений неавтономна, хотя исходная система была автономной. Мы можем *усреднить* правые части уравнений *по явно входящему времени* за один период времени $t = 2\pi$, считая медленные переменные r и θ константами в течение этого периода:

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,t) = -\gamma r; \\ \dot{\theta} = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r,\theta,t)dt = \pm\dfrac{3}{8}\dfrac{\omega}{\beta^2}r^2. \end{cases} \qquad (137)$$

Этот прием усреднения, когда исходные нелинейные дифференциальные уравнения заменяются также на нелинейные, однако более простые, носит название метода Ван-дер-Поля.

Сначала рассмотрим случай (135) без трения который в механической интерпретации соответствует жесткой пружине

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \frac{\omega^2}{\beta^2}x^3 = 0, \qquad (138)$$

График потенциальной функции

$$U_x = \frac{\omega^2}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) \qquad (139)$$

имеет вид симметричной кривой с единственным минимумом в начале координат, где расположена единственная особая точка типа центр.

Система (136) приобретает вид

$$\dot{y} = -\omega x - \frac{\omega}{\beta^2}x^3;\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x(\beta^2 + x^2)}{\beta^2 y}. \qquad (140)$$

Разделив и проинтегрировав переменные, получим уравнение для фазовых кривых:

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\beta} \sqrt{const - \frac{\beta^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}} . \qquad (141)$$

Знак «+» соответствует верхней половине фазовой траектории, знак «–» – нижней.

Система (137) для случая жесткой пружины без трения имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{r} = 0; \\ \dot{\varphi} = \omega + \frac{3}{8}\frac{\omega}{\beta^2} r^2 . \end{cases} \qquad (142)$$

Ее решение показывает

$$r = r_0, \theta = \theta_0 + \frac{3}{8}\frac{\omega}{\beta^2} r_0^2 t , \qquad (143)$$

что частота колебаний (угловая скорость) растет при увеличении амплитуды.

При наличии трения в системе решение системы уравнений (137) приобретает вид:

$$r = r_0 e^{-\gamma t}, \theta = \theta_0 + \frac{3}{16}\frac{\omega}{\beta^2 \gamma} r_0^2 \left(1 - e^{-2\gamma t}\right). \qquad (144)$$

Эти соотношения описывают экспоненциальное затухание амплитуды, при этом поправка к частоте также уменьшается. В пределе $\gamma \to 0$ они переходят в уравнения (142).

Переходя от системы (137) к комплексному уравнению, получаем:

$$\dot{w} = (i\omega - \gamma) w + \frac{3}{8}\frac{i\omega}{\beta^2} w |w|^2 , \qquad (145)$$

где

$$w = re^{if} .$$

Данное уравнение эквивалентно системе (137), что проверяется непосредственно:

$$\dot{w} = \dot{r}e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}re^{i\varphi} = = (i\omega - \gamma) re^{i\varphi} + \frac{3}{8}\frac{i\omega}{\beta^2} r^3 e^{i\varphi} =$$

$$= -\gamma re^{i\varphi} + i\omega\left(1 + \frac{3}{8\beta^2}\right) re^{i\varphi} .$$

Для случая (135) осциллятора с мягкой пружиной без трения

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \frac{\omega^2}{\beta^2} x^3 = 0 , \qquad (146)$$

график потенциальной функции

$$U_x = \frac{\omega^2}{\beta^2}\left(\frac{\beta^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right) \qquad (147)$$

имеет в точках $x = \pm\beta$ два симметрично расположенных максимума $U_{\pm\beta} = \omega^2 \frac{\beta^2}{4}$, которые определяют глубину потенциальной ямы, где имеется локальный минимум в начале координат. С ростом β размеры ямы быстро увеличиваются, и при малых значениях x справедливо уравнение гармонического осциллятора. Получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x\left(\beta^2 - x^2\right)}{\beta^2 y} . \qquad (148)$$

В точках равновесия верхняя и нижняя части дроби дают функции: $y = 0$, $x\left(\beta^2 - x\right) = 0$. Пересечение этих функций дает точки равновесия. Разделив и проинтегрировав переменные, получим уравнение для фазовых кривых:

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\beta} \sqrt{const - \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{4}} . \qquad (149)$$

Знак «+» соответствует верхней половине фазовой траектории, знак «–» – нижней (рис. 6, 7).

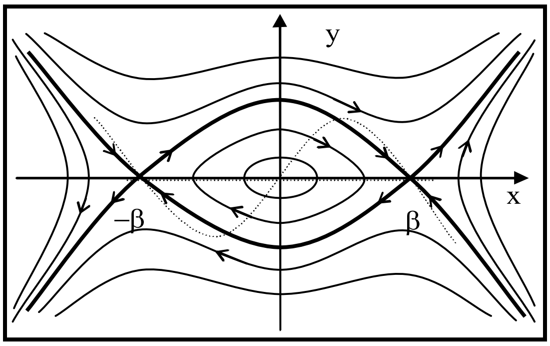

Рис. 6. Фазовый портрет

Уравнение сепаратрисы записывается при $const = \beta^4/4$. Сепаратриса делит фазовую плоскость на три области топологических типов траекторий: замкнутые траектории внутри петли сепаратрисы при $const < \beta^4/4$ соответствуют периодическим колебаниям внутри потенциальной ямы. Незамкнутые фазовые траектории соответствуют инфинитному (неопределенному) движению, когда происходит уход на бесконечность. Будем далее интересоваться только колебательными движениями. Определим зависимость **õ(t)** , при движении изображающей точки по сепаратрисе при $x_0 = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{2}\beta dx}{\beta^2 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} ln\left|\frac{\beta + x}{\beta - x}\right| = \pm\omega\left(t - t_0\right) ,$$

$$x = \beta th\left[\pm \frac{\omega}{\sqrt{2}}\left(t - t_0\right)\right] . \qquad (150)$$

Фазовая траектория, представленная входящей в седло сепаратрисой, не содержит точку седла. Система, движущаяся по этой фазовой траектории, лишь асимптотически приближается к точке седла $x = +\beta$ с $t \to \infty$ и к точке седла $x = -\beta$ с $t \to -\infty$. Точка седла представляет собой одну отдельную фазовую траекторию.

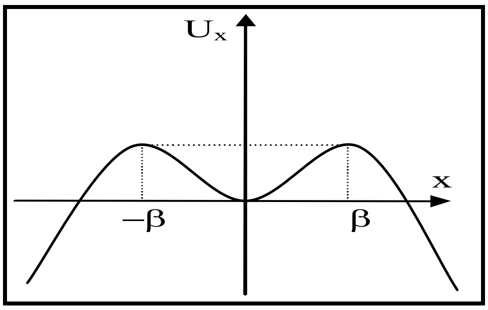

Рис. 7. Потенциальная функция U_x

Из (137) следует, что в данном случае с ростом амплитуды колебаний частота уменьшается.

$$r = r_0, \theta = \theta_0 - \frac{3}{8}\frac{\omega}{\beta^2} r_0^2 t \,. \qquad (151)$$

При наличии трения:

$$r = r_0 e^{-\gamma t}; \theta = \theta_0 - \frac{3}{16}\frac{\omega}{\beta^2 \gamma} r_0^2 \left(1 - e^{-2\gamma t}\right). \qquad (152)$$

Для случая:

$$\ddot{x} - \omega^2 x + \frac{\omega^2}{\beta^2} x^3 = 0 \qquad (153)$$

график потенциальной функции имеет вид

$$U_x = \frac{\omega^2}{\beta^2}\left(\frac{\beta^4}{4} + \frac{x^4}{4} - \frac{\beta^2 x^2}{2}\right). \qquad (154)$$

Это так называемый потенциал с двумя ямами в точках $x = \pm\beta$ и локальный максимум $U_0 = \omega^2 \frac{\beta^2}{4}$ в нулевой точке, который определяет глубину потенциальной ямы. С ростом β размеры ямы быстро увеличиваются, и при малых значениях x справедливо уравнение гармонического осциллятора. Получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\left(\beta^2 - x^2\right)}{\beta^2 y}. \qquad (155)$$

В точках равновесия верхняя и нижняя части дроби дают функции: $y = 0$, $x\left(\beta^2 - x\right) = 0$.

Пересечение этих функций дает точки равновесия.

Разделив и проинтегрировав переменные, получим уравнение для фазовых кривых:

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\beta}\sqrt{const + \frac{\beta^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}} \,. \qquad (156)$$

Знак «+» соответствует верхней половине фазовой траектории, знак «–» – нижней (рис. 8, 9).

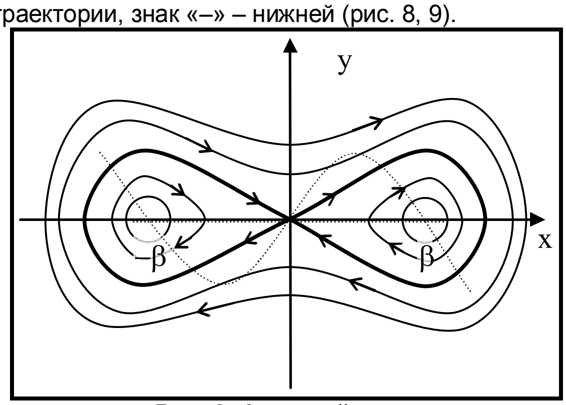

Рис. 8. Фазовый портрет

Уравнение сепаратрисы записывается при нулевой константе. Определим зависимость $\tilde{o}(t)$ при движении изображающей точки по сепаратрисе при $x_0 = \pm\sqrt{2}\beta$:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{2}\beta dx}{x\sqrt{2\beta^2 - x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} ln\left(\frac{\sqrt{2}\beta + \sqrt{2\beta^2 - x^2}}{\sqrt{2}\beta - \sqrt{2\beta^2 - x^2}}\right) = \pm\omega\left(t - t_0\right),$$

$$x = \pm\sqrt{2}\beta\sqrt{\left(1 - th^2\left[\pm\,\omega\left(t - t_0\right)\right]\right)} \,. \qquad (157)$$

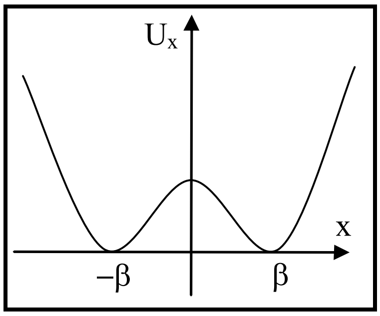

Рис. 9. Потенциальная функция U_x

Фазовая траектория, представленная входящей в седло сепаратрисой, не содержит точку седла. Система, движущаяся по этой фазовой траектории, лишь асимптотически приближается к точке седла $\tilde{o} = 0$ с $t \pm \infty$. Точка седла представляет собой одну отдельную фазовую траекторию.

Для случая с трением:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} - \omega^2 x + \frac{\omega^2}{\beta^2} x^3 = 0 \qquad (158)$$

получаем:

$$\dot{y} = -2\gamma y + \omega x - \frac{\omega}{\beta^2} x^3 \,;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\gamma}{\omega} + \frac{x\left(\beta^2 - x^2\right)}{\beta^2 y}. \qquad (159)$$

Перейдя к полярной системе координат и преобразуя исходные нелинейные дифференциальные уравнения в более простые нелинейные методом Ван-дер-Поля, получим

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(r,\theta,t\right) = -\gamma r; \\ \dot{\theta} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g\left(r,\theta,t\right)dt = -\omega + \dfrac{3}{8}\dfrac{\omega}{\beta^2} r^2. \end{cases} \qquad (160)$$

Частота колебаний (угловая скорость) растет с ростом амплитуды.

$$r = r_0; \quad \theta = \theta_0 - \omega t + \frac{3}{8}\frac{\omega}{\beta^2} r_0^2 t \,. \qquad (161)$$

При наличии трения в системе уравнения приобретают вид:

$$r = r_0 e^{-\gamma t}; \quad \theta = \theta_0 - \omega t + \frac{3}{16}\frac{\omega}{\beta^2} r_0^2 \left(1 - e^{-2\gamma t}\right). \qquad (162)$$

Осциллятор с сильной диссипацией

Рассмотрим случай, когда γ – большой параметр. Введем «медленное время» $\tau = t/2\gamma$.

Уравнение (135) $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x \pm \frac{\omega^2}{\beta^2} x^3 = 0$ примет вид:

$$\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} + \omega^2 x \pm \frac{\omega^2}{\beta^2} x^3 = 0 \,, \qquad (163)$$

где $\varepsilon = 1/4\gamma^2 << 1$.

Таким образом, мы получили уравнение, содержащее *малый параметр при старшей производной*. Именно такие системы удобно анализировать при помощи метода разделения быстрых и медленных движений.

Для функции $y = \dot{x}/\omega$ получаем

$$\varepsilon\dot{y} = -y - \omega x \mp \frac{\omega}{\beta^2}x^3 . \qquad (164)$$

Так как

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-y - x \mp x^3/\beta^2}{\varepsilon y} >> 1 , \qquad (165)$$

то фазовые траектории близки к вертикальным прямым. Мы получаем *подпространство быстрых движений* везде, за исключением области, где

$$-y - x \pm x^3/\beta^2 = 0 . \qquad (166)$$

$y = x \mp x^3/\beta^2$ – это *подпространство медленных движений* нашей системы. В области быстрых движений изменением x можно пренебречь, тогда

$$\varepsilon\dot{y} \approx -y , \; y = y_0 e^{-\tau/\varepsilon} . \qquad (167)$$

Подставив это выражение в уравнение $\dot{x} = \omega y$, найдем

$$x_б = x_0 + \varepsilon\omega y_0\left[1 - e^{-\tau/\varepsilon}\right]. \qquad (168)$$

Для медленных движений имеем:

$$\dot{x} = -x \mp x^3/\beta^2 , \qquad (169)$$

откуда

$$\dot{x}/x^3 = -1/x^2 \mp 1/\beta^2 ,$$

при замене $u = 1/x^2$ получаем:

$$\dot{u} = 2\left(u \pm 1/\beta^2\right) \qquad (170)$$

или

$$u = Ce^{2\tau} \mp 1/\beta^2 \; ; \; x_м = \left(Ce^{2\tau} \mp 1/\beta^2\right)^{-1/2} . \qquad (171)$$

Теперь необходимо «сшить» оба решения для x : пусть

$$x_м(0) = x_б(\infty) = x_0 + \varepsilon y_0 , \qquad (172)$$

тогда

$$C = 1/\left(x_0 + \varepsilon y_0\right)^2 \pm 1/\beta^2 . \qquad (173)$$

Окончательный вид решения будет:

$$x = x_б + x_м + x_м(0). \qquad (174)$$

Автоколебания

Автоколебания – это незатухающие колебания (периодические процессы) в *нелинейной диссипативной системе*, вид и свойства которых определяются самой системой и *не зависят от начальных условий* (по крайней мере, в конечных пределах). Выше мы видели, что в *линейных диссипативных* (т.е. при наличии трения) *системах* периодические процессы вообще невозможны, там возможны только состояния равновесия. Периодические движения могут возникнуть только в нелинейной системе, когда коэффициенты зависят от переменных или от скоростей переменных. Поступающая извне в систему энергия должна превосходить потери от трения («амплитудное» условие), эта энергия должна поступать в систему в правильной фазе и способствовать усилению автоколебаний («фазовое» условие). Кроме того, необходимо наличие обратной связи, которая придает системе способность управлять поступающей извне энергией. Форма, амплитуда и частота колебаний при этом задаются самой системой.

Устойчивые неподвижные точки и незатухающие колебания в диссипативном случае выступают как аттракторы. *Аттрактор* (т.е. *притягатель*) – это такое множество в фазовом пространстве диссипативной системы, к которому асимптотически приближаются все фазовые траектории из определенной области, так как он «притягивает» соседние режимы (переходные процессы). Эту область называют *бассейном* данного аттрактора. Для нелинейной системы уравнений второго порядка стационарными движениями могут быть только состояния равновесия и периодические движения. Роль сепаратрис на фазовой плоскости состоит в том, что они разграничивают бассейны притяжения различных аттракторов. В дальнейшем мы будем отбрасывать сложные для описания нестационарные процессы и рассматривать только стационарные. Это упрощение оказывается очень полезным, хотя оставляет за кадром существенную часть теории колебаний. При наличии стационарных решений дифференциальный закон развития процесса эволюции системы перестает зависеть от времени, т.е. становится *автономным*. Это означает, что система дифференциальных уравнений нормальной формы содержит заданные правые части, не содержащие явно независимой переменной t :

$$\dot{\varphi}_i = f_i(\,\varphi_j\,) .$$

Термин «автоколебания» ввел А.А. Андронов в 1928 г. Он же заложил основы теории автоколебаний, впервые связав их с предельными циклами Пуанкаре.

Аттракторами, соответствующими автоколебаниям, являются устойчивые предельные циклы. Под *предельным циклом* понимается замкнутая изолированная фазовая траектория. Термин «изолированная» означает, что в ее достаточно малой (кольцеобразной) окрестности не существует других замкнутых фазовых траекторий. Это отличает предельные циклы от замкнутых фазовых траекторий, соответствующих периодическим колебаниям консервативного нелинейного осциллятора.

Разумеется, автоколебания не обязательно должны быть периодическими. Для систем, начиная с размерности фазового пространства, равной трем стационарным движением могут быть *квазипериодические колебания*, т.е. колебания содержащие несколько независимых спектральных компонент, находящихся в иррациональном соотношении, а также *хаотические автоколебания*. Спектр хаотических колебаний сплошной. Математическим образом квазипериодических автоколебаний в фазовом пространстве является n -мерный тор, а стохастических автоколебаний – *странный аттрактор* – притягивающее множество, имеющее чрезвычайно сложную внутреннюю структуру, на котором все (или почти все) траектории неустойчивы (сложно и тонко устроенное фрактальное множество, которое ассоциируется с динамическим хаосом).

Потеря устойчивости автоколебательных режимов

В свою очередь, периодическое движение (или так называемый предельный цикл) также может терять устойчивость для систем с числом степеней свободы больше единицы, т.е. при количестве уравнений больше двух. В этом случае поведение фазовых кривых, близких к циклу, можно приближенно описывать при помощи эволюционного процесса, для которого цикл является положением равновесия.

Аттракторы, отличные от состояния равновесия и строго периодических колебаний, получили название *странных аттракторов*. При таких режимах происходит экспоненциально быстрое разбегание фазовых траекторий, т.е. плохая предсказуемость течения событий по начальным условиям. Переход системы на такой режим означает, что в ней наблюдаются сложные непериодические колебания, детали которых очень чувствительны к малому изменению начальных условий, в то время как усредненные характеристики режима устойчивы и не зависят от начального условия.

Существование аттракторов с экспоненциально расходящимися фазовыми кривыми на них и устойчивость такого рода явлений были установлены в самом начале 60-х гг. в работах С. Смейла, Д.В. Аносова и Я.Г. Синая по структурной неустойчивости динамических систем.

Независимо от этих теоретических работ, метеоролог Лоренц в 1963 г. описал наблюдавшийся им в численных экспериментах по моделированию конвекции аттрактор в трехмерном фазовом пространстве с разбегающимися по нему в разные стороны фазовыми кривыми (система совершает сложное хаотическое движение, похожее на танец вокруг двух неустойчивых фокусов, описывая витки по раскручивающейся спирали, однако, никакой периодичности в таком движении нет: и времена, в течение которых система находится вблизи одного из фокусов, и число витков на каждой из спиралей кажутся совершенно случайными). В частности, из этого вытекала практическая невозможность долгосрочного динамического прогноза погоды: для предсказания всего на 1-2 мес. вперед нужно знать начальные условия с погрешностью 10^{-5} погрешности предсказания.

Переход от устойчивого состояния равновесия процесса к странному аттрактору может совершаться как скачком (при жесткой или катастрофической потере устойчивости), так и после мягкой потери устойчивости. В последнем случае родившийся цикл сам теряет устойчивость. Потеря устойчивости цикла в общем однопараметрическом семействе систем возможна несколькими способами:

1) *столкновение* с неустойчивым циклом:

$$\begin{cases} \dot{r} = -\alpha r + 2\beta r^3 - r^5; \\ \dot{\varphi} = \omega; \end{cases}$$

$$(\dot{w} = (i\omega - \alpha)w + 2\beta w|w|^2 - w|w|^4);$$

2) *удвоение*;

3) *рождение или смерть тора* (в терминологии Андронова: *с цикла слезает шкура*).

Детали последних процессов зависят от резонансов между частотами движения вдоль меридиана тора и вдоль его оси, т.е. от того, будет ли отношение этих частот рациональным или иррациональным числом. Интересно, что рациональные числа со знаменателем 5 и больше ведут себя практически как иррациональные.

Одним из аттракторов может быть разрушение системы.

В сложных физических системах с многими аттракторами может развиваться процесс упорядочения, который получил название самоорганизации. Мы называем систему самоорганизующейся, если она в ходе эволюции обретает какую-либо пространственную структуру. Для того чтобы в системе началась самоорганизация, она должна быть подведена к границе устойчивости. Самопроизвольное, не связанное с действием внешних организующих полей регулярное поведение в сложной системе есть результат развития в ней определенного вида неустойчивостей. При этом процесс упорядочения, очевидно, связан с коллективным (кооперативным) поведением образующих систему подсистем. Именно благодаря «кооперативности» теорию самоорганизации часто называют синергетикой (от греч. совместные действия). Модели теории самоорганизации – это модели нелинейных неравновесных систем, подверженных действию флуктуаций в момент перехода беспорядок-порядок.

Система, которая может обмениваться с внешним миром веществом, энергией и энтропией, называется открытой. Бельгийская школа И. Пригожина развивает термодинамический подход к самоорганизации. Основное понятие синергетики Хакена (понятие структуры как состояния, возникающего в результате когерентного (согласованного) поведения большого числа частиц) бельгийская школа заменяет более специальным понятием *диссипативной структуры* – открытой системы, обменивающейся с окружающей средой потоками вещества и энергии, однородное состояние равновесия которой может терять устойчивость и необратимо переходить в неоднородное стационарное состояние, устойчивое относительно малых возмущений. Источник энергии должен поставлять энергию в достаточно упорядоченном виде: по терминологии Бриллюэна, в систему должна «впрыскиваться» негэнтропия, т.е. энтропия с обратным знаком (информация, мера упорядоченности). Очевидно, что в любой хозяйственной структуре таким источником одновременно информации и энергии является труд. Внутри же самой системы все время рождается энтропия, которая вытекает затем вместе с теплом в окружающее пространство. Если «запереть» поток энтропии, то и система «умрет». Из системы нужно удалять «шлак» из вновь рождаемой энтропии, в качестве которого можно рассматривать, например отходы производства и загрязнение окружающей среды.

Особенности границы устойчивости в пространстве параметров

Кривые в фазовом пространстве, образованные последовательными состояниями эволюционного процесса, называются *фазовыми кривыми*. Вообще говоря, фазовые кривые либо не пересекаются в фазовом пространстве, либо совпадают (предельные циклы). В областях, где отсутствуют точки равновесия системы, семейство фазовых кривых можно превратить в семейство параллельных прямых гладкой заменой координат. В окрестности положения равновесия фазовые кривые не могут быть преобразованы в прямые. Как показал еще А. Пуанкаре, поведение фазовых кривых в окрестности положения равновесия на фазовой плоскости в системе *общего положения* (т.е. для всех случаев, кроме некоторых исключительных) имеет пять рассмотренных выше случаев: устойчивые фокус и узел (локальный минимум), седло, неустойчивые фокус и узел (локальный максимум). Все более сложные случаи превращаются в указанные при общем малом изменении системы.

Таким образом, все более сложные, чем указанные выше, случаи, вообще говоря, не должны встречаться в природе, и их, на первый взгляд, можно не рассматривать. Эта точка зрения обесценивает большую часть теории дифференциальных уравнений и вообще математического анализа, где традиционно основное внимание уделяется малоценным, но трудным для исследования случаям необщего положения.

Дело, однако, обстоит совсем иначе, если нас интересует система, зависящая от одного или нескольких параметров, называемых *управляющими параметрами*.

В отличие от динамических переменных фазового пространства, параметры считаются постоянными или медленно меняющимися во времени, но от них может зависеть характер реализующегося в системе режима. При переходе параметра через определенное значение происходит перестройка картины фазовых кривых в фазовом пространстве. Такое качественное изменение режима колебаний при изменении параметра называют *бифуркацией*.

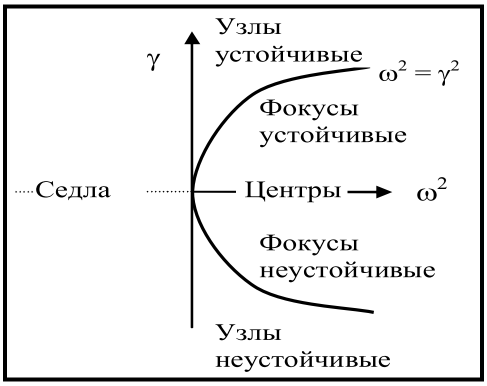

Рис. 10. Плоскость параметров

Для рассмотренного выше уравнения гармонического осциллятора такими параметрами являются γ и ω^2. Устойчивые состояния системы возможны при неотрицательных значениях этих параметров. Если мы рассмотрим плоскость параметров (ω^2; γ), где на оси абсцисс откладывается значение ω^2, а на оси ординат – γ (рис. 10), то устойчивые состояния лежат в области верхнего правого угла плоскости, а все остальные – неустойчивые. Их разделяет *граница устойчивости*, образованная положительными координатными полуосями. Область устойчивости делится линией $\omega^2 = \gamma^2$ на две части: устойчивых фокусов и устойчивых узлов. В нижнем правом углу лежат разделенные линией $\omega^2 = \gamma^2$ области неустойчивых фокусов и неустойчивых узлов. Точки типа фокуса лежат внутри параболы, а точки типа узла в правой полуплоскости вне параболы. Положительная полуось ω^2 образована точками, соответствующими состояниям равновесия типа центр. Область седел лежит левее оси ординат γ. Предельный случай (когда $\omega^2 = \gamma^2$) не представляет большого интереса, ибо этот случай, как и всякий, когда соотношение между параметрами системы точно фиксировано, не может быть точно реализован на практике и выполняет лишь роль границы между фокусами и узлами. Состояния равновесия типа центр, также не представляют большого интереса. Если условие параметра $\gamma = 0$ хоть немного нарушается, то система уходит в другое состояние равновесия. Поэтому состояние равновесия типа центр физически имеет значение лишь как граница между устойчивым и неустойчивым фокусом. Ось абсцисс при $\omega^2 = 0$ является границей между седлами и узлами и образует точки типа «седло – узел». Другие же пять типов состояний равновесия (фокусы, узлы и седла) сохраняют свой тип, т.е. обладают устойчивостью по отношению к малым изменениям параметров системы. Поэтому говорят, что эти пять типов состояний равновесия являются «грубыми».

В соответствии с общей стратегией Пуанкаре подобный вид или, как говорят, подобную *особенность* имеют все системы общего положения, зависящие от двух параметров при подходящем подборе координат. При замене координат $y = \omega^2 + \gamma$; $y = \omega^2 - \gamma$ мы можем записать эту типичную особенность границы области устойчивости положений равновесия в общих двухпараметрических семействах эволюционных систем (с фазовым пространством любой размерности) в виде $y = |x|$. Формула $y > |x|$ описывает область устойчивости при подходящем выборе координат на плоскости или в пространстве параметров, вообще говоря, криволинейных (рис. 11).

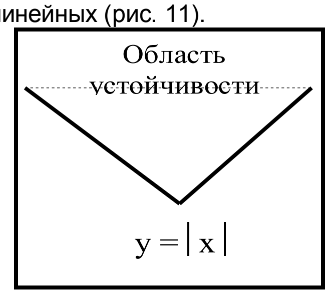

Рис. 11. Область устойчивости двух параметров

Область устойчивости при большем числе параметров также располагается углами наружу, вклиниваясь зияющими вершинами в область неустойчивости (рис. 12). Таким образом, для системы, принадлежащей особой части границы устойчивости, при малом изменении параметров более вероятно попадание в область неустойчивости, чем в область устойчивости. Это проявление общего принципа, согласно которому все хорошее (например, устойчивость) более хрупко, чем плохое.

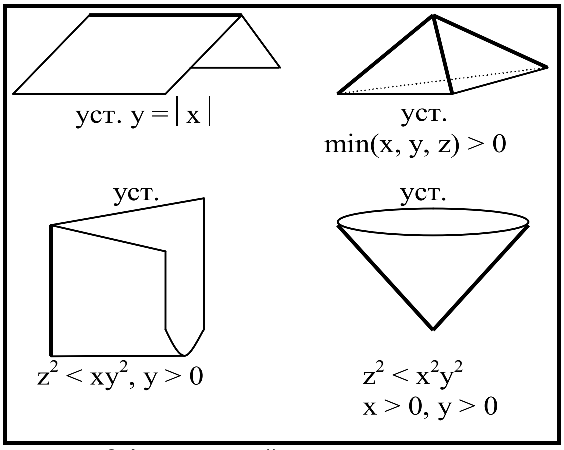

Рис. 12. Области устойчивости трех параметров

По-видимому все хорошие объекты удовлетворяют нескольким требованиям *одновременно*, плохим же считается объект, обладающий *хотя бы одним* из ряда недостатков.

При увеличении числа параметров число типов особенностей быстро растет, однако, как доказал Л.В. Левантовский, оно остается конечным (с точностью до гладких замен параметров) при любом конечном числе параметров, сохраняется и принцип хрупкости.

Литература

1. North D. Structure and Change in Economic History, p.22.
2. Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я. Энциклопедия элементарной математики. – Кн.II. – М. – Л.: Гостехниздат, 1951. – 424 с.
3. Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я. Энциклопедия элементарной математики. – Кн.V. – М.: Наука, 1966. – 624 с.
4. Андре Анго Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 780 с.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.
6. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. – 1937. – Т. 14, №5.
7. Аносов Д.В., Синай Я.Г. Некоторые гладкие эргодические системы// Успехи мат. наук. – 1967, Т.22, вып.5. – С.107 – 172.
8. Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук – первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов – М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит. – 1989 – 96 с.
9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. – 368 с.
10. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 128с.
11. Балацкий Е.В. Современная экономическая наука: общее и особенное // Науковедение, 2000, № 3, с. 120-144.
12. Бир С. Кибернетика и управление производством. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. – 392 с.
13. Браверманн Э.М., Левин М.И. Неравновесные модели экономических систем. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981.
14. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
15. Вебер М. Избранные произведения. М.: Прогресс, 1990. – 808 с.
16. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Прохоров Ю.В. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910 с.
17. Вечканов Г.С., Вечканова Г.Р. Микро- и макроэкономика. Энциклопедический словарь. – СПб.: Издательство «Лань», 2001. – 352 с.
18. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. – 300 с.
19. Гиббс Дж.В. Термодинамика. Статистическая механика. – М.: Наука, 1982.
20. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: в 2-х книгах. Кн. 1. – М.: Мир, 1984. – 350 с.
21. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М.: Мир, 1973. – 280 с.
22. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999
23. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
24. Зоммерфельд А. Механика. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 368 с.
25. Ильенков Э.В. Диалектическая логика. – М.: Политиздат, 1984
26. Кадомцев Б.Б. Динамика и информация. М.: УФН, 1997.
27. Клейнер Г., Петросян Д., Беченов А. Еще раз о роли государства и государственного сектора в экономике. Вопросы экономики, 2004, №4.
28. Коуз Р. Фирма, рынок и право. – М.: Дело ЛТД, 1993. – 192 с.
29. Крайнов В.П. Качественные методы в физической кинетике и гидрогазодинамике. – М.: Высш. шк., 1989. – 224 с.
30. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
31. Кудрин Б.И. Введение в технетику. Томск, 1993.
32. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2002. – 292 с.
33. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). Серия «Современная теория колебаний и волн», – 295 с. http://fizmatlit.narod.ru
34. Лагранж Ж. Аналитическая механика. – М. – Л.: Гостехиздат, 1950.
35. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. I. Механика. – М.: Наука, 1988. – 216с.
36. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. V. Статистическая физика. М.: Наука, 1976. – 584 с.
37. Левантовский Л.В. Особенности границы области устойчивости// Функцион. анализ и его прил. – 1982. – Т.16, вып.1. – С. 44 – 48.
38. Макконнелл К.Р., Брю С.Л. Экономикс: принципы, проблемы и политика. М.: ИНФРА-М, 2002. – 972 с.
39. Маркс К. Капитал. Критика политической экономии. Т. I. – М.: Политиздат, 1983. – 905 с.
40. Маркс К. Капитал. Критика политической экономии. Т. III. – М.: Политиздат, 1949. – 932 с.
41. Маркс К., Энгельс Ф. Введение (из экономических рукописей 1857-1858 годов) Соч., т.12.
42. Маркс К., Энгельс Ф. Морализирующая критика и критизирующая мораль. Соч., т.4.
43. Маркс К., Энгельс Ф. Наемный труд и капитал. Избранные произведения. В 3-х т. Т. 1. – М.: Политиздат, 1985. – 635 с.
44. Маркс К., Энгельс Ф. Немецкая идеология. Т. I. Соч., т. 3.
45. Маркс К., Энгельс Ф. Нищета философии. – Гл. I. Соч., т.4.
46. Маршалл А. Принципы экономической науки, Т. I. – М.: Прогресс, 1993. – 415с.
47. Маршалл А. Принципы экономической науки, Т. II. – М.: Прогресс, 1993. – 310с.
48. Мун Ф. Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990. – 312 с.
49. Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П. Динамические модели теории управления – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 400 с.
50. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 424 с.
51. Нелинейные волны: Самоорганизация. – М.: Наука, 1983.
52. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1977. – 512 с.
53. Платонов С. После коммунизма М.: Молодая гвардия, 1989.
54. Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 288 с.

55. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 312 с.
56. Прогнозирование финансового рынка. http://www.e-mastertrade.ru
57. Радыгин А. Россия в 2000-2004 годах: на пути к государственному капитализму? Вопросы экономики, 2004, №4.
58. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы// Успехи мат. наук. – 1970. – Вып.1. – С.113 – 185.
59. Смит А. Исследование о природе и причинах богатства народов. М.: , 1962.
60. Советский энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – 1600 с.
61. Царев И.Г. Равновесие экономической системы// Вестник НГУ. Серия: социально-экономические науки / Новосиб.гос.ун-т. Новосибирск, 2004. – Т. 4. – Вып.1. – 164 с.
62. Царев И.Г. Устойчивость и неустойчивость цены // Вестник НГУ. Серия: социально-экономические науки / Новосиб.гос.ун-т. Новосибирск, 2005. – Т. 5. – Вып. 1. – 123 с., с. 78 – 93.
63. Царев И.Г. Физико-математические аналогии в экономике. – М.: ФГУП ЦПП, 2005. – 215 с.
64. Царев И.Г. Динамические системы в экономике // АиФА, М., 2006, №3, с. 290-308.
65. Царев И.Г. Функции экономической системы // АиФА, М., 2006, №4, с. 90-106.
66. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИЛ, 1963. – 829 с.

Царев Игорь Геннадьевич

3.1. PRINCIPLES OF TRAFFIC OF THE ECONOMIC SYSTEM

I.G. Tsarev, Candidate of Science (Chemical),
the Deputy Chief of a Department

Federal agency on construction and housing and communal services (Rosstroj)

In the present operation the task of an entry of the basic equations of traffic of an economic system in analytical sort, and also the task of searching of adequate management methods is decided by traffic of the specified system. For solution of tasks in view it is used mathematical the apparatus of natural sciences. Thus the uniform solution technique on which the basic economic laws could base is offered. It is a question of such basic concepts as, for example, a principle of least action of Hamilton in the analytical mechanics, principle Le-SHatele in a thermodynamics, the concept of statistical ensemble in the statistical physics, law of mass action in chemistry, etc. thus is used as the microscopic (microeconomic) approach when the equations of traffic for each unit of system (the economic subject) are made out, and the phenomenological (macroeconomic) approach when the basic legitimacies of an appearance by means of the common economic indicators are studied.