

8.2. ОПТИМИЗАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Мальцев А.С.,
Евлампиев А.Р.

В статье приводится алгоритм формирования оптимального инвестиционного портфеля, в качестве оптимизационного параметра которого выступает максимизация чистой приведённой стоимости (Net Present Value, NPV) проектов, на допустимом множестве, которое формируется из ограничений по бюджету, сроку окупаемости, рентабельности инвестиций и темпа падения денежных средств. Причём в качестве ограничения по бюджету наличности выступает значение, полученное как точка пересечения графиков (Investment Opportunity Schedule, IOS) графика инвестиционных возможностей и предельной стоимости капитала компании (Marginal Cost of Capital Schedule, MCC) и представляет собой графическое изображение средневзвешенной стоимости капитала как функции объёма привлекаемых финансовых ресурсов.

Оптимизационная задача решается симплекс-методом с последующим добавлением дополнительных ограничений согласно методу Гомори, что даёт целочисленные значения долей оптимизационного портфеля, что, в свою очередь, даёт возможность дать количественную оценку приоритетности инвестиционных проектов, формируемого портфеля.

1. РАСЧЁТ И АНАЛИЗ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Авторы статьи рассматривают некоторую гипотетическую энергетическую компанию с условным названием «APOLLO», которая формирует свой оптимальный инвестиционный портфель из потенциальных проектов.

F^j – проект, полученный на основе денежных потоков проекта F , методом цепного повтора в рамках общего срока действия формируемого инвестиционного портфеля, длительность которого равна максимальному периоду расчёта одного из проектов (7 лет), входящего в портфель.

Далее приводим расчётные формулы для интегральных показателей, с комментариями.

Главным интегральным показателем при принятии решения о реализации инвестиционного проекта является чистая приведённая стоимость проекта (Net Present Value, NPV), которая рассчитывается по формуле для схемы денежных потоков постнумерандо (обычная схема денежных потоков для инвестиционных проектов):

$$NPV^j(WACC_M) = \sum_{t=1}^T \frac{(CF_t^j - I_t^j)}{(1 + WACC_M)^{t-1}} \geq 0, \quad (1.1)$$

где

формула NPV j -го проекта и условие реализуемости проекта, входящего в инвестиционный портфель, на основе этого критерия для схемы денежных потоков постнумерандо, $j = \overline{1, N}$;

$WACC_M$ – предельное значение стоимости капитала (Weighted Average Cost of Capital, WACC), формирующее бюджет инвестиционного портфеля;

T^j – длительность прогнозного периода (период расчёта интегральных показателей) j -го проекта;

CF_t^j – величина денежного потока за период времени t для j -ого проекта;

I^j – величина капитальных вложений (инвестиционные затраты) j -ого инвестиционного проекта, или для инвестиционного портфеля.

$$PI = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T^j} ((CF_t^j) / (1 + WACC_M)^{t-1})}{\sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T^j} (I_t^j / (1 + WACC_M)^{t-1})} \geq 1, \quad (1.2)$$

где индекс рентабельности j -го проекта (Profitability Index, PI), входящего в инвестиционный портфель, учитывает ценность отдачи инвестиционных вложений на единицу вложенных средств.

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

млн. руб.

Год	A	B	C	D	E	F	F'	G
1	-140	-140	40	-400	-200	-100	-100	-350
2	80	110	-250	220	140	80	80	115
3	85	110	160	220	150	90	90	115
4	85	115	170	230	160	110	0	115
5	100	-30	200	230	165	0	80	120
6	100	0	0	230	0	0	90	120
7	0	0	0	230	0	0	110	120
k_d , % ставка процента по кредиту.	0	0	14	14	0	0	0	-
T длительность проекта, лет.	6	6	5	7	5	4	7	7
Источник финансирования.	Собственные средства	Собственные средства	Заёмные средства	Заёмные средства	Собственные средства	Собственные средства	Собственные средства	
NPV, млн. рублей.	157,207	165,750	170,290	253,500	177,317	110,239	176,286	-13,166
IRR, %	54,2	68,50	78,10	34,90	52,37	70,50	68,92	13,5
DPP, лет.	3,108	2,532	3,503	4,352	3,010	2,446	2,446	>7
PI	2,123	2,184	1,783	1,634	1,887	2,102	2,022	0,962
ARR, %	53,6	50,0	42,4	30,7	53,5	70,0	30,6	18,2
$ n $ темп падения денежного потока.	3,26	3,562	4,187	7,35	4,488	3,388	4,44	72,58

Расчётное значение дисконтированного периода окупаемости DPP^j j -го проекта находится из уравнения $I_j = \sum_{t=1}^{DPP^j} \frac{CF_t^j}{(1+WACC_M)^{t-1}}$. Если значение функции $NPV^j(t)$ j -го проекта на концах отрезке t_{k+1} и t_k имеет разные знаки, то значение DPP^j рассчитывается по приближённой формуле, полученной на основе уравнения, проходящей через две точки:

$$DPP^j = \frac{-NPV_{t_k}^j}{(NPV_{t_{k+1}}^j - NPV_{t_k}^j)} \times (t_{k+1} - t_k). \quad (1.3)$$

Расчётная формула для нахождения внутренней нормы рентабельности (Internal Rate of Return, IRR) проекта имеет следующий вид: $\sum_{t=1}^T \frac{CF_t^j}{(1+IRR)^{t-1}} - \sum_{t=0}^T I_t^j = 0$.

Проект принимается к реализации. Обычно при расчёте IRR , в случае, если $NPV'(IRR^{(k)}) \neq 0$ используется итерационная (численная) формула Ньютона-Рафсона, имеющая квадратичную сходимость:

$$IRR^{(k+1)} = IRR^{(k)} - \frac{NPV^j(IRR^{(k)})}{NPV'^j(IRR^{(k)})}. \quad (1.4)$$

Согласно теореме о достаточных условиях сходимости метода Ньютона-Рафсона должны выполняться четыре условия:

1. Функция $NPV(IRR^{(k)})$ определена и дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$, нахождения IRR .
2. Отрезку $[a, b]$ принадлежит только один простой корень IRR , так что $NPV(a) \cdot NPV(b) < 0$.
3. Производные $NPV'(IRR^{(k)})$, $NPV''(IRR^{(k)})$ на $[a, b]$ сохраняют знак.
4. Начальное приближение $IRR^{(0)}$ удовлетворяет неравенству $NPV(IRR^{(0)}) \times NPV''(IRR^{(0)}) > 0$ (знаки функций $NPV(IRR^j)$ и $NPV''(IRR^j)$ в точке $IRR^{(0)}$ совпадают).

Четвёртое условие теоремы о достаточных условиях сходимости метода Ньютона-Рафсона, авторы работы доказывают исходя из соображений, что итерационная последовательность $\{IRR\}$ сходится в пределе к IRR_* монотонно, если выполняется неравенство $0 \leq \frac{IRR_* - IRR_{k+1}}{IRR_* - IRR_k} \leq 0$. В соответствии с формулой

Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеем:

$$NPV(x_*) = 0 = NPV(IRR_k) + NPV'(IRR_k) \cdot *(IRR_* - IRR_k) + NPV''(IRR) \frac{(IRR_* - IRR_k)^2}{2},$$

где точка x лежит между IRR_k и IRR_* . Поэтому с учётом (1.4) можно записать следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{IRR_* - IRR_{k+1}}{IRR_* - IRR_k} &= \frac{IRR_* - IRR_k + \frac{NPV'(r_k)}{NPV'(x_k)}}{IRR_* - IRR_k} = \\ &= 1 - \frac{2}{2 + \frac{NPV''(IRR)(IRR_* - IRR_k)^2}{NPV(IRR_k)}} \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{IRR\}$ является монотонной, если $\frac{NPV''(IRR)}{NPV(IRR_k)} \geq 0$, то есть достаточным условием монотонной сходимости метода Ньютона-Рафсона будет постоянство в интервале между точками IRR_0 и IRR_* знака производной $NPV''(IRR)$ и совпадение его со знаком $NPV(IRR_0)$, то есть выполнение четвёртого условия вышеприведённой теоремы.

В противном случае, например, для проекта В, как это видно на рис. 1 в случае, когда начальное приближение $WACC^{(0)} = r^{(0)}$ находится слева от критической точки второго рода (точки перегиба) $r'' = -0,6804$ получается расходящаяся последовательность на основе метода Ньютона. В случае попадания первого приближения в интервал $[r'', r_1 = IRR]$ итерационная последовательность сходится.

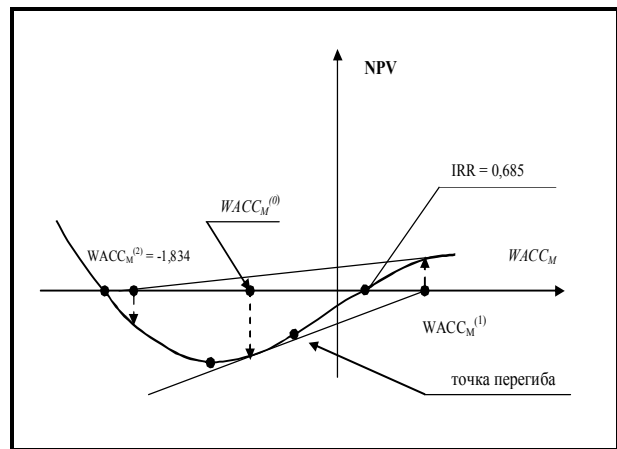


Рис. 1. Расходящаяся последовательность, при некорректном выборе начального приближения $WACC_M^{(0)}$, в случае нахождения корней уравнения $NPV(WACC_M^{(0)}) = 0$ для проекта В

Как видно из рис. 1 проект В имеет два корня уравнения $NPV(WACC_M^{(0)}) = 0$, один из которых $WACC_{M1}$ не имеет экономического смысла в силу своего отрицательного значения. Отток денежных средств для таких проектов, как В может быть связан с рекультивацией земельных участков, например, на угольных шахтах, где добыча угля производится открытым способом, либо затраты по демонтажу оборудования при окончании жизненного цикла проекта. Например, затраты по демонтажу отдельных энергоблоков АЭС.

В случае проекта С мы имеем, так называемую, неординарную схему денежных потоков, то есть последовательное чередование знаков «-» и «+», что в итоге приводит к тому, что уравнение $NPV(WACC_M) = 0$ проекта С имеет два корня $WACC_{M1} = IRR = 78,1\%$ и $WACC_2 = 432\%$, как это показано на рис. 2. К расчёту принимается первый корень уравнения, который называется нормальным, поскольку, проходя через его значение $WACC_{M1} = 78,1\%$ функция $NPV'(WACC_M)$ меняет знак с «+» на «-», и такой корень уравнения $NPV(WACC_M) = 0$ называется нормальный, а второй

корень $WACC_{M2} = 432\%$ трактуется, как аномальный корень.

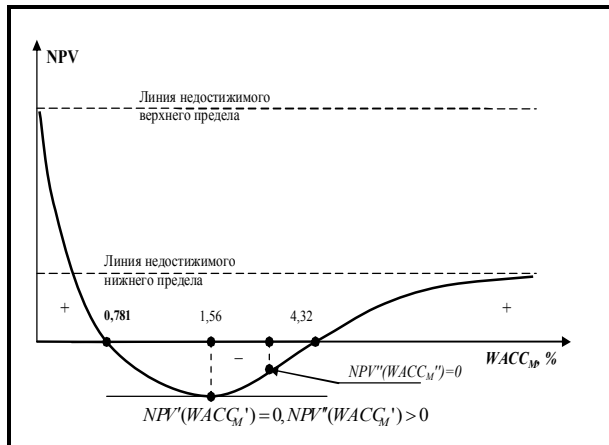


Рис. 2. Графическое изображение множественности корней уравнения $NPV(WACC_M) = 0$ для проекта С

1.1. Расчёт доходности собственного капитала инвестиционных проектов, формирующих инвестиционный портфель

Вообще говоря, при включении в денежный поток от финансовой деятельности затрат по обслуживанию кредита (выплата процентов) проекта денежные потоки дисконтируются по ставке дисконтирования, равной доходности собственного капитала r_s .

При расчёте ставки дисконтирования авторы статьи применяют метод «доходности облигаций плюс премия за риск», на основе которого оценивается превышение средней рыночной доходности акций над облигациями (с рейтингом **A**). Поскольку формируется инвестиционный портфель электроэнергетической компании, то следует принимать во внимание среднеотраслевое значение рентабельности собственного капитала **ROE** (Return on Equity) для ведущих мировых электроэнергетических компаний, акции которых котируются на Нью-Йоркской фондовой бирже (**NYSE**, New York Stock Exchange), значение которого равняется 11,6%, по данным www.yahoo.finance.com на июль 2006 года.

Среднерыночная доходность американского фондового рынка рассчитана на основе динамики индекса **S&P-500** по формуле:

$$\begin{aligned} \text{Доходность индекса} &= \\ &= \frac{S\&P-500_{i+1}}{S\&P-500_i} - 1 = 9,9\%, \end{aligned}$$

где $S\&P-500_{i+1} = 1297,5$ – значение индекса за март 2006 года;

$S\&P-500_i = 1180,6$ – значение индекса за март 2005 года.

Как видно данное значение согласуется со среднеотраслевым значением **ROE = 11,6%** для ведущих мировых золотодобывающих компаний. Таким образом, среднерыночное значение доходности по данным американского фондового рынка принимается в размере 11% годовых. Для оценки значения премии за

риск по акциям, показывающей разность между среднерыночной доходностью индекса (акций) и облигаций (с рейтингом **A**) авторы статьи проанализировали доходность корпоративных еврооблигаций ведущих компаний мира на 01.03.2006 года по данным агентства Reuters, значения которых представлены в табл. 2.

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЕ ТЕКУЩИХ И ПРОГНОЗНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДОХОДНОСТЕЙ АМЕРИКАНСКОГО ФОНДОВОГО РЫНКА И ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СЕКТОРА ЭКОНОМИКИ НА 01.03.2006 г.

Значение доходности	Электроэнергетика Electric Utilities.	S&P-500
Текущее значение (this year)	11,2%	12,2%
Прогнозный год (next year)	12,5%	10,0%
Прогноз на предстоящие пять лет (next 5 years), из расчёта годовой доходности (per annum).	6,4%	10,5%
P/E	2,33	1,42

Таблица 3

ЗНАЧЕНИЕ ДОХОДНОСТЕЙ К ПОГАШЕНИЮ ЕВРО-ОБЛИГАЦИЙ ВЕДУЩИХ КОМПАНИЙ МИРА НА 01.03.2006 г.

№	Эмитент	Дата погашения	Купон (% от ном.)	УТМ (% годовых)
1	Toyota Motor Co	11.06.2007	7,0	4,95
2	General Electric	22.09.2008	5,75	4,92
3	Deutsche Telecom	15.06.2010	8,0	5,32
4	JP Morgan Chase	15.08.2006	5,625	4,61

Принимая во внимание даты погашения корпоративных облигаций и их значения, авторы статьи приняли среднерыночное значение по облигациям класса **A** на уровне 4,8% годовых.

Тогда значение премии за риск по акциям над облигациями класса **A** равняется $PR_{M/B} = r_M - r_{BONDA} = 11 - 4,8 = 6,2\%$ годовых.

Поскольку данная **PR** имеет валютное значение доходности, а основной валютой расчёта при прогнозировании денежных потоков являются рубли, то полученное значение следует перевести в рублёвое на основе теоремы о паритете валютных ставок (interest-rate parity), которая представляет собой особый случай применения модели фьючерсной цены.

В качестве примера можно привести стратегию, связанную с инвестированием некоторой суммы **M** в рублях в гособлигации РФ с валютной доходностью r_{RUBL} , которая принесёт через год денежные средства в размере $M * (1 + r_{rubl})$. Стратегия, связанная с инвестированием этой же суммы **M** в гособлигации США с доходностью r_{USD} , при обменном спотовом курсе $S_{RUBL/USD}$ и форвардном курсе $f_{RUBL/USD}$ принесёт через год сумму

в долларах США в размере $M \times \frac{f_{USD/RUBL}}{S_{USD/RUBL}} \times (1 + r_{USD})$.

($S_{RUBL/USD}$ и $f_{RUBL/USD}$ выражены в рублях за доллар США). Поскольку сумма, полученная в результате этих стратегий, одинакова (**M**), то и выплаты по ним также должны быть равны. Отсюда получаем нижеследующее равенство.

$$\frac{1+r_{RUBL}}{1+r_{USD}} = \frac{f_{RUBL/USD}}{S_{RUBL/USD}},$$

где:

r_{USD} – значение доходности к погашению (Yield to maturity) гособлигаций США, номинальная стоимость которых выражена в долларах США;

r_{RUBL} – значение доходности к погашению гособлигаций РФ, номинальная стоимость которых выражена в рублях;

$f_{RUBL/USD}$ – форвардный курс доллара рубля к доллару США;

$S_{RUBL/USD}$ – текущий обменный спот-курс рубля к доллару США.

Тогда для случая расчёта премии за риск:

$$PR_{M/BRUBL} = \frac{(1+PR_{M/USD})}{S_{RUBL/USD}/f_{RUBL/USD}} - 1 =$$

$$= \frac{1+0,062}{28,0203/28,134} - 1 = 6,63\%,$$

где

$f_{RUBL/USD} = 28,0203$ – форвардный курс рубля к доллару, $S_{RUBL/USD} = 28,1336$ – текущий обменный спот-курс рубля к доллару на закрытие на 17 февраля 2006 года по данным ММББ на 02 марта 2006 года.

Предположим, что требуемая доходность собственного капитала любой компании превышает её цену заёмного капитала на величину некоторой премии за риск. Если учитывать, что на начало 2006 года цена рублёвых кредитов со средним сроком кредитования 2 + 5 лет составляет $r_d = 12 + 15\%$ в зависимости от риска проекта, то тогда рублёвое значение доходности собственного капитала для российских энергетических компаний можно рассчитать как $r_s = r_d + PR_{M/B} = 12 + 6,63 = 18,63 \approx 18,5\%$ годовых.

Суммарное значение среднерыночного значения премии за риск PR_M рассчитывается как разность между безрисковой составляющей ставкой дисконтирования и значением доходности собственного капитала.

Безрисковая ставка (riskfree rate) – ставка доходности от инвестиций в безрисковый актив, значение которой, при этом, является определённой. Поскольку неопределённость конечной стоимости безрискового актива отсутствует, то, по определению, стандартное отклонение ($\sigma = 0$) для безрискового актива равно нулю. В свою очередь, это означает, что ковариация между ставкой доходности по безрисковому активу и ставкой доходности по любому рисковому активу равна нулю. Это станет очевидным, если вспомнить, что ковариация доходов по любым двум активам i и j равна произведению коэффициента корреляции активов и стандартных отклонений этих двух активов: $Cov_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$. Если $\sigma_j = 0$ для безрискового актива i , то $Cov_{ij} = 0$.

Для расчёта значения безрисковой ставки дисконтирования авторы статьи взяли динамику доходности к погашению гособлигаций РФ и на основе классического метода наименьших квадратов (МНК) получили зависимость:

$$r_t = 5,432 + 0,196 \times t - 0,0057 \times t^2 \quad (1.1.1)$$

Коэффициент парной корреляции данного уравнения регрессии равен $R = 0,927$, что свидетельствует о высокой степени полученной зависимости.

Поскольку анализируемые инвестиционные проекты имеют различные периоды расчёта интегральных показателей (T), то значение r_t проектов на основе формулы также отличается (см. табл. 1).

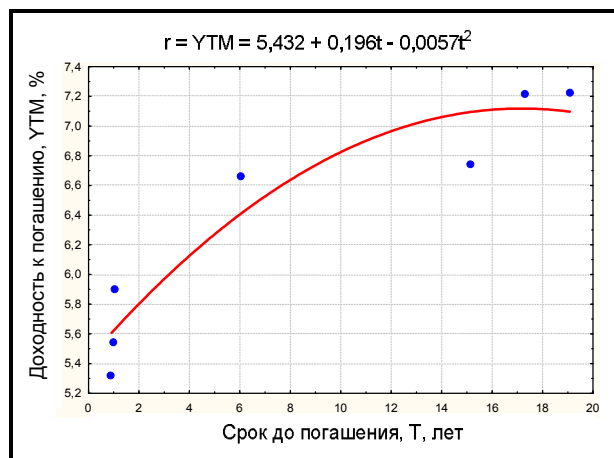


Рис. 3. График доходности к погашению (YTM, Yield to maturity) для государственных облигаций РФ на 10.07.2006 года по данным ММББ

Период расчёта интегральных показателей проекта (T) и срок обращения гособлигаций, значение доходности к погашению (yield to maturity) которых берётся в качестве безрисковой составляющей ставки дисконтирования, должны совпадать. В противном случае данная ценная бумага с отличным сроком обращения не рассматривается как безрисковый актив.

Рассмотрим две ситуации:

1. Срок инвестирования (период владения) в государственные ценные бумаги меньше, чем срок погашения.
2. Срок инвестирования (период владения) в государственные ценные бумаги больше, чем срок погашения.

В первом случае возникает ситуация неопределённости по отношению к процентной ставке, значение которой может измениться в течение периода владения, что повлечёт к изменению рыночной стоимости ценной бумаги. Следовательно, возникновение подобного риска процентной ставки (interest-rate risk) делает стоимость ценной бумаги неопределённой, и, она в свою очередь, уже не может рассматриваться как безрисковый актив.

Второй случай представляет ситуацию, когда потенциальный инвестор не обладает информацией в начале инвестирования, какой будет процентная ставка к моменту погашения ценной бумаги. То есть инвестор не знает величины процентной ставки, по которой доходы от ценной бумаги могут быть реинвестированы на оставшийся период владения. Присутствие риска ставки реинвестирования (reinvestment-rate risk) для ценных бумаг со сроком погашения меньшим, чем период владения (период инвестирования), означает, что такие ценные бумаги не могут считаться безрисковым активом.

Например, в качестве безрисковой составляющей ставки дисконтирования для проекта с прогнозным периодом, равным пять лет, принимают доходность к погашению гособлигаций развитых стран через пять лет,

поскольку расчёт интегральных показателей проекта производится на период, равный пяти годам. То есть срок инвестирования (период владения) в альтернативный безрисковый актив (гособлигации развитых стран) и срок погашения по этим ценным бумагам должны совпадать. В противном случае данные ценные бумаги не могут рассматриваться как безрисковые активы.

Поскольку, формируемый инвестиционный портфель, рассматривается как единый актив, расчётный период которого равняется наибольшему периоду одного из жизненных циклов проекта, входящего в портфель, тогда в нашем случае на основе (1.1.1) при $t = 7$; $r_f = 6,525\%$. Тогда среднерыночное значение премии за риск равняется:

$$PR_M = r_s - r_f = 18,5 - 6,525 = 11,975 \approx 12\%.$$

2. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Наглядное представление принципов формирования оптимального бюджета капиталовложений показано на рис. 4, где представлен график инвестиционных возможностей (Investment Opportunity Schedule, **IOS**) компании «APOLLO», при построении которого инвестиционные проекты (см. табл. 1) упорядочиваются по убыванию **IRR**, при этом на оси абсцисс откладываются соответствующие объёмы капиталовложений, необходимые для финансирования очередного проекта.

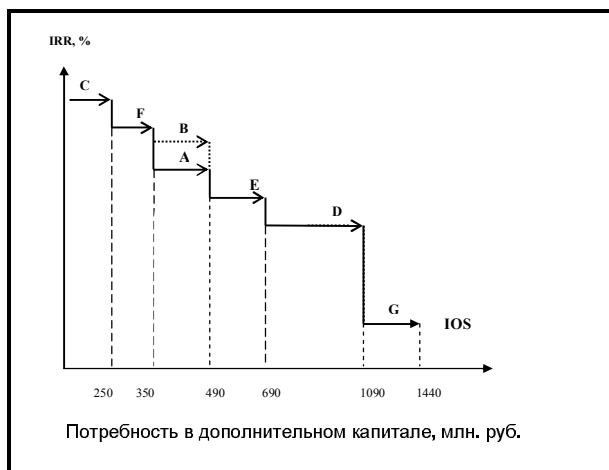


Рис. 4. График инвестиционных возможностей компании «APOLLO»

В нашем примере проекты **A** и **B** являются взаимноисключающими, и компания «APOLLO» имеет два возможных графика **IOS**: один представлен на рис. 1 пунктирной линией, включающей проекты C, F, A, E, D и G, а другой график представлен сплошной линией и учитывает проекты C, F, B, E, D и G.

3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ПРЕДЕЛЬНОЙ ЦЕНЫ КАПИТАЛА

Поскольку главной целью статьи является изложение методического подхода, формирования оптимального инвестиционного портфеля, с количественной оценкой приоритетности каждой инвестиции, то резонно возникает вопрос — может ли «APOLLO» привлечь новый заёмный капитал с ценой 12% и 14% в не-

ограниченном объёме? Ответ таков: конечно нет. Если компания в течение некоторого периода времени привлекает всё большие и большие суммы, цена долга и собственного капитала начинает расти, и, если это происходит, начинает расти и средневзвешенная цена капитала (Weighted Average Cost of Capital, **WACC**).

$$WACC = (1 - T) \times W \times r_d + (1 - W) \times r_s, \quad (3.1)$$

где

$W = \frac{D}{D + S}$ — оптимальная доля совокупной задолженности в совокупном объёме активов;

D — величина суммарной задолженности;

S — акционерный капитал;

r_s — издержки на финансирование акционерного капитала по проекту;

k_d — стоимость заёмных средств;

$T = 0,24$ — ставка налога на прибыль в РФ.

Таким образом, как корпорации не могут нанимать неограниченное количество работников на фиксированную зарплату, так они не могут неограниченно привлекать капитал с постоянной ценой.

По данным материалов, публикуемых на <http://biz.yahoo.com> среднее значение долгосрочной задолженности (Long-term Debt) ведущих электроэнергетических компаний мира, акции которых котируются в **NYSE**, в совокупном объёме активов (Total Assets), на примере компании American Electric Power Co. Inc (**AEP**), составляет 33%. Причём доля задолженности по текущим обязательствам (Current Liabilities) не превышает 0,16 от общего объёма баланса. Поскольку доля текущих обязательств в совокупном объёме баланса не столь существенна, и не принимает прямого участия при формировании инвестиционного бюджета, то данную статью пассива баланса компании, с условной долей вероятности можно отнести к собственному капиталу (Stockholder Equity).

Тогда оптимальную структуру пассивов условной электроэнергетической компании «APOLLO» можно представить в виде табл. 4.

Таблица 4

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ПАССИВОВ ВЕДУЩЕЙ МИРОВОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ КОМПАНИИ.

№	Наименование статьи пассива.	Доля, %.
1	Собственный капитал (Stockholder Equity).	67
2	Долгосрочную задолженность (Long term debt).	33
3	Величина совокупных пассивов (Total Assets).	100

Вообще говоря, в настоящий момент, как таковой теории, описывающей оптимальную структуру капитала, не существует. Тем не менее, значение доходности собственного капитала (Return on Equity, **ROE**) всегда больше в случае привлечённых долгосрочных источников финансирования, до тех пор, пока среднее значение ставки процентов кредитного портфеля k_d не превышает доходности активов (Return on Assets, **ROA**).

$$ROE = ROA + \frac{D}{E} (ROA - k_d). \quad (3.2)$$

Как показано ниже на рис. 5 точка **K** является точкой равновесия для финансового рычага и характеризуется равенством значений кредитной ставки k_d и

рентабельности чистых активов (**ROA**). В этом случае структура капитала не оказывает никакого влияния на рентабельность собственного капитала (**ROE**).

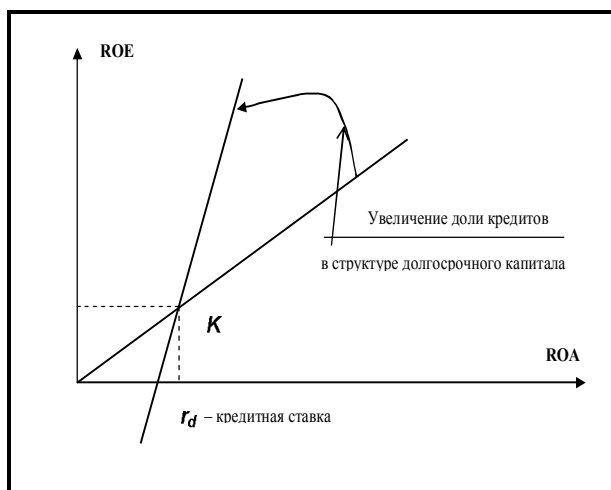


Рис. 5. Эффект финансового рычага.

Как показано на ниже расположенном рис. 6 при достижении D/E_{opt} WACC принимает своё минимальное значение, а рыночная стоимость акций (капитализация компании) максимальное значение.

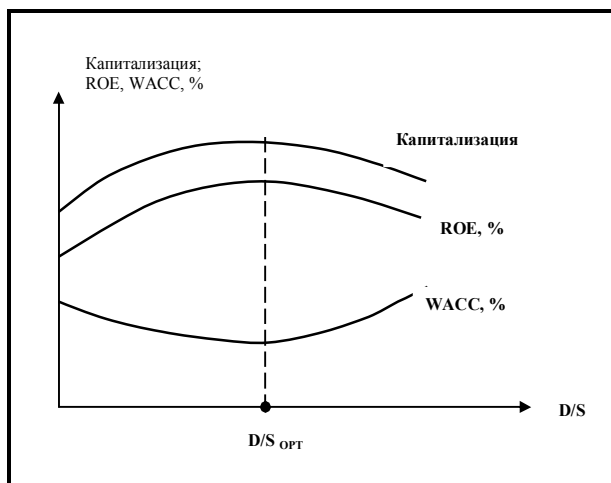


Рис. 6. Зависимость значения капитализации, WACC, ROE компаний от соотношения D/S.

Туже самую картину нам даёт формула Роберта Хамады, которая объединяет модель CAPM (Capital Asset Pricing Model) с моделью Модильяни-Миллера (с налогами на корпорацию):

$$r_{SL} = r_f + (r_M - r_f) * \beta_U + (r_M - r_f) * \beta_U * (1 - T) * \frac{D}{S}, \quad (3.3)$$

где

r_{SL} – требуемая доходность акционерного капитала финансово зависимой компании, то есть при наличии в структуре пассивов составляющей долгосрочной задолженности (Long term debt);

r_M – среднерыночная доходность;

r_f – ставка процента по безрисковым активам (государственным ценным бумагам);

T – ставка налога на прибыль;

β_U – коэффициент при отсутствии заёмного финансирования.

В приведённой формуле последнее слагаемое характеризует исключительно финансовый риск.

Тогда, в нашем случае, с учётом вышеотмеченных данных, расчётная величина средневзвешенной стоимости капитала равняется:

$$WACC_i = (1 - T) * W * r_d + (1 - W) * r_s = \\ = 0,60 * 0,33 * 0,12 + 0,67 * 0,185 = 14,77\%.$$

Теперь предположим, что «APOLLO» в текущем отчётном году ожидает получить годовую чистую прибыль в размере 500 млн. рублей. Рассчитаем общий объём дополнительных источников финансирования (заёмные средства, нераспределённая прибыль) исходя из целевой оптимальной структуры капитала и заёмных средств, выведенной выше.

Какова же общая сумма финансирования (равная заёмному капиталу плюс нераспределённая прибыль), которая может быть достигнута до исчерпания нераспределённой прибыли (retained earnings) и, например, начало продажи компанией обыкновенных акций нового выпуска? Обозначим эту величину X , зная, что 67% от X составит ожидаемая нераспределённая прибыль (retained earnings), можно написать уравнение:

$$0,67 * X = \\ = \text{нераспределённая прибыль} = 500\ 000.$$

Решая уравнение относительно X , который является точкой перелома нераспределённой прибыли (retained earnings break point), получим:

$$X = \text{нераспределённая прибыль} / \\ / \text{доля собственного капитала} = \\ = 500\ 000 / 0,67 = 746,3 \text{ млн. рублей.}$$

Таким образом, без изменения структуры капитала компания «APOLLO» сможет привлечь средств на сумму 746,3 тысяч рублей, состоящую из 500 000 тысяч рублей нераспределённой прибыли и 246 300 – 500 000 = 246300 тысяч рублей заёмных средств.

Кроме того, «APOLLO» прогнозирует приток капитала в размере 50 000 тысяч рублей от амортизации, и эти средства могут быть израсходованы на капиталовложения. Таким образом, точка перелома смещается на эту величину вправо и равна 746 300 + 50 000 = 796 300 тысяч рублей.

Графически зависимость WACC от величины дополнительного капитала получила название графика предельной стоимости капитала (Marginal Cost of Capital, MCC). Данная зависимость для компании «APOLLO» схематически представлена на рис. 7.

Поскольку объём капитальных вложений составляет 1 090 млн. рублей, из которых только 550 млн. рублей могут быть профинансированы (проекты С, Е, F) за счёт внутренних источников (нераспределённой прибыли и амортизации), то необходимая величина в размере 540 млн. рублей должна быть привлечена на условиях кредита, например, по ставке 14% годовых. Это повлечёт за собой изменение целевой структуры капитала и средневзвешенного значения капитала (WACC), вследствие повышения значения цены заёмных средств с 12% до 14%.

Для оценки расчётного значения совокупного объёма активов применим значение доходности активов американской энергетической компании American Electric

Power Co. Inc (**АЕР**) равное ROA (Return on Assets) = 0,0345. Тогда совокупная величина активов компании «APOLLO» составляет Total Assets = Income / ROA = 500 / 0,0345 = 14 492,75 млн. рублей, из которых 14 492,75 * 0,33 = 9 710,14 млн. рублей приходится на долгосрочную задолженность (Long term debt).

К текущему значению долгосрочной задолженности 9 710,14 млн. рублей прибавим необходимую величину потребности во внешнем финансировании на условиях внешнего финансирования 540 млн. рублей с учётом изменения правой части баланса и получим новое отношение долгосрочной задолженности в совокупном объёме активов:

$$\frac{LTD + Credit}{TA + Investment} = \frac{4782,6 + 540}{14492,75 + 540} = 0,354,$$

где

Long term debt, **LTD = 4782,6** млн. рублей – величина на текущей долгосрочной задолженности;

Credit = 293,6 млн. рублей – потребность во внешнем финансировании для осуществления инвестиций (Investment).

Total Assets, TA = 14492,75 млн. рублей – величина совокупных активов.

В результате увеличения WACC возрастёт с 14,77 до 14,92%:

$$WACC_2 = (1-T) \times W \times r_d + (1-W) \times r_e = 0,60 \times 0,354 \times 0,14 + 0,646 \times 0,185 = 14,92\%.$$

Как видно из примера, нераспределённая прибыль вся расходуется на инвестиционные вложения, то есть, как таковая, возможность для выплаты дивидендов отсутствует. Дивидендная политика основывается на, так называемой, модели выплаты дивидендов по остаточному принципу (residual dividend model), согласно которой любая фирма, определяя свою целевую долю дивидендов в прибыли, прорабатывает только следующие три операции:

1. Определяет оптимальный бюджет капиталовложений.
2. Осуществляет максимально возможное финансирование бюджета капиталовложений путём реинвестирования прибыли.
3. Выплачивает дивиденды только в том случае, если полученная прибыль больше, чем сумма, необходимая для обеспечения оптимального бюджета капиталовложений.

Остаточный принцип означает, что дивиденды выплачиваются в последнюю очередь.

В периоды благоприятного инвестиционного климата акционеры, как правило, терпимо относятся к неполучению дивидендов по акциям.

Но авторы статьи отмечают, что с ростом коэффициента выплат по дивидендам (Payout ratio, PR) увеличивается рыночная стоимость акций $P = \frac{div_1}{r_s - g}$,

где

div₁ – ожидаемая величина дивидендов следующего года;

r_s – доходность собственного капитала;

g = (1-PR)*ROE – темп роста дивидендов;

P – рыночная стоимость акций.

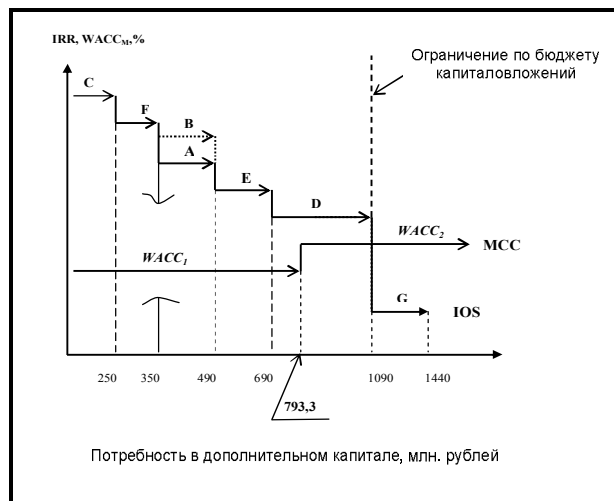


Рис. 7. Совместный анализ графиков IOS и MMC компании «APOLLO»

Цена капитала, принимаемая к рассмотрению в процессе формирования бюджета капиталовложений, фактически определяется точкой пересечения графиков (Investment Opportunity Schedule, **IOS**) графика инвестиционных возможностей и предельной стоимости капитала компании (Marginal Cost of Capital Schedule, **MMC**) представляет собой графическое изображение средневзвешенной стоимости капитала как функции объёма привлекаемых финансовых ресурсов. Эта точка весьма примечательна: она показывает предельную стоимость капитала, которую можно использовать в качестве ставки дисконтирования при расчёте **NPV** формируемого инвестиционного портфеля, то есть когда речь идёт о портфеле как едином целом. Этот подход имеет погрешность, поскольку **WACC_M** сильно меняется по годам реализации проектов, входящих в инвестиционный портфель в силу изменения соотношения **D/S** в ходе осуществления платежей по телу кредита. Эта точка называется предельной ценой капитала компании. Если использовать её в качестве ориентира при оценке инвестиций в проекты, соответствующие решения о целесообразности принятия того или иного проекта будут корректными, а финансовая и инвестиционная политика будут оптимальными. При применении любой другой нормы бюджет капиталовложений компании не будет оптимальным.

4. РАССМОТРЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ПРОЕКТОВ РАЗЛИЧНОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ

Проблема сравнительного анализа проектов различной продолжительности обычно не возникает при оценке независимых проектов, но она особенно актуальна в случае альтернативных проектов. Почти все рассматриваемые инвестиционные проекты имеют различные сроки реализации, прогнозный период которых оценивается на периоде жизненного цикла проекта. Классическая теория финансового менеджмента утверждает, что в таких случаях проекты должны быть приведены к общему кратному или бесконечному периоду, и, на основе этого условия, рассчитывается их **NPV**.

Авторы статьи отмечают ряд спорных моментов в методике анализа проектов с неравными сроками:

1. В условиях формирования инвестиционного портфеля с ограничением по бюджету, было бы не правильно делать повтор по какому-либо проекту, так как происходит вторичная реализация инвестиционных затрат на периоде повтора проекта, что трактуется, как альтернативный проект в условиях жёсткого бюджета.
2. При формировании инвестиционного портфеля с ограничением по срокам окупаемости (*DPP*) проектов косвенно учитывается риск, связанный с различной продолжительностью проектов.
3. Согласно ПБУ 6/01 «Учет основных средств» первоначальная стоимость оборудования включает в себя не только суммы, уплачиваемые в соответствии с контрактом поставщику (продавцу), а также таможенные пошлины, вознаграждение посреднической организации, через которую приобретает оборудование, невозмещаемые налоги, уплачиваемые в связи с приобретением оборудования, общехозяйственные и иные аналогичные расходы, если они непосредственно связаны с приобретением оборудования, иные затраты, непосредственно связанные с приобретением оборудования, в частности, начисленные до его принятия к бухгалтерскому учету проценты по заемным средствам, если они привлечены для приобретения этого объекта. Тогда, в случае изменения налогового окружения, финансового климата внешней торговли, выхода на рынок более новых технологий сделает статичность условий, формирующих инвестиционную стоимость на втором и последующих этапах повтора величину этих затрат неадекватными.
4. Решение о проведении повторной инвестиции о замене, например, оборудования обычно принимается на основе критерия общей эффективности оборудования (*overall equipment effectiveness, OEE*), если этот показатель значительно меньше величины 85%.

$$OEE = \frac{\text{Выпуск изделий} - \text{Брак} - \text{Доработки}}{\text{Запланированное время цикла} / \text{Запланированное время загрузки}}, \%$$

5. Так, например, реальный физический жизненный цикл проекта, по данным компании «SIEMENS», современных станков и гибких производственных комплексов с ЧПУ, связан с затратами на жизненный цикл оборудования (активной части производственных фондов предприятия), из которых 80% ложится на инжиниринг, пуско-наладку, надёжность, обслуживание, комплексность, сервис и поддержку, запчастей, обновление, и только 20% связаны непосредственно со стоимостью самого оборудования. Поэтому, как правило, реальный физический цикл оборудования привязан к периоду выпуска запасных частей и комплектующих для оборудования. В условиях современных технологий это не превышает 10-15 лет, далее происходит реновация оборудования, что и можно рассматривать как инвестицию повтора.

Ввиду указанных проблем, в условиях жёсткого ограничения по бюджету не имеет смысла слишком углубляться в проблему сопоставимости нескольких альтернативных проектов со сроками действия, как в нашем случае 5, 6 и 7 лет. Учитывая условность прогнозных оценок, можно допустить, что такие проекты имеют один и тот же срок действия. Однако важно признать, что проблема действительно существует, когда взаимоисключающие проекты не имеют один и тот же срок действия.

В силу отмеченной проблемы авторы статьи сочли целесообразным привести проект *F* методом цепного подбора к максимальному сроку жизненного цикла проекта одного из проектов (*D*), формируемого инвестиционного портфеля.

То есть, в нашем случае, в качестве наименьшего общего срока действия проектов *F* и *D* выступает длительность жизненного цикла проекта *D*, равная 7 лет.

Будем считать, что по завершении жизненного цикла проекта *F* потребуется определённая сумма затрат на демонтаж оборудования по этому проекту, как показывает практика, эта величина находится примерно на уровне 10% от величины капитальной инвестиции. Вообще говоря, по завершении жизненного цикла проекта в последний год его реализации включается денежный поток, учитывающий ликвидационную стоимость оборудования, примерно, 10% от его первоначальной стоимости, с учётом скидки (до 30%) на укороченный период экспозиции, что способствует ускорению периода продажи ликвидационной стоимости оборудования. В нашем случае будем считать, что все проекты, входящие в инвестиционный портфель, включают ликвидационную составляющую в денежный поток последнего года реализации жизненного цикла проекта.

Таблица 5

ДЕНЕЖНЫЕ ПОТОКИ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ПОВТОРА В РАМКАХ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ ДЛЯ ПРОЕКТА F

№	Наименование статьи	Период реализации, лет.						
		1	2	3	4	5	6	7
1	Исходный денежный поток, CF ₁	-100	80	90	110			
2	Затраты на демонтаж				-10			
3	Повторный денежный поток, CF ₁				-100	80	90	110
4	Суммарный денежный поток	-100	80	90	0	80	90	110

Поскольку в денежный поток четвёртого года включены затраты на демонтаж оборудования по проекту *F*, то тогда суммарная величина повторной инвестиции не будет равна величине первоначальной инвестиции, и, как следствие, формула для метода цепного повтора в рамках длительности инвестиционного проекта не работает, и принимает следующий вид для нашего случая:

$$NPV(i) = NPV_1(i) + \frac{NPV_2(i)}{(1+WACC_M)^i}, \tag{4.1}$$

где *NPV₁(i)* – чистый приведённый эффект исходного проекта;

i – продолжительность исходного проекта;

NPV₂(i) – чистый приведённый эффект проекта после повторной его реализации, с учётом затрат на демонтаж оборудования, то есть с большей величиной инвестиционной составляющей.

5. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИОРИТЕТНОСТИ ПРОЕКТОВ, ФОРМИРУЮЩИХ ИНВЕСТИЦИОННЫЙ ПОРТФЕЛЬ

Решение задачи целочисленного линейного программирования при формировании оптимального инвестиционного портфеля, с учётом ограничений по бюджету капитальных затрат, индекса прибыльности инвестиций и периоду окупаемости проектов.

Данная задача носит линейный характер относительно неизвестных составляющих α_j (долей портфеля), кото-

рые в ходе решения задачи симплекс методом, разработанным Джорджем Данцигом в 1953 году, с использованием метода Гомори, принимают целочисленные значения. По целому значению, показывающему количество инвестиционных проектов данного типа, которые максимизируют суммарное значение NPV портфеля, и, таким образом, повышают общую рыночную стоимость компании (капитализацию) можно судить о приоритетности одного инвестиционного проекта относительно другого.

Постановка задачи целочисленного линейного программирования.

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^N NPV^i * \alpha^i \rightarrow \max. \quad (5.1)$$

Допустимое множество решений целевой функции носит следующий характер:

$$1. \sum_{t=1}^{\tau} \sum_{j=1}^N \frac{\alpha^j * I^j}{(1+WACC_M)^{t-1}} - \sum_{t=1}^{\tau} \sum_{j=1}^N \frac{\alpha^j * CF^j}{(1+WACC_M)^{t-1}} \leq \sum_{t=1}^{\tau} \frac{I_{PB}}{(1+WACC_M)^{t-1}}$$

– 1-ое нежёсткое ограничение по бюджету, формирующему объём капитальных вложений инвестиционного

портфеля, где $\sum_{t=1}^{\tau} \sum_{j=1}^N \frac{CF^j}{(1+WACC_M)^{t-1}}$ – запас денежной

наличности или дисконтированная величина денежного потока j -го проекта в период осуществления инвести-

ционных затрат по портфелю, а $\sum_{t=1}^{\tau} \frac{I_{PB}}{(1+WACC_M)^{t-1}}$ – не-

жёсткое ограничение по бюджету капиталовложений портфеля, определяется как точка пересечения графиков IOS и MCC, где τ – число периодов, в которых реализуются инвестиционные затраты по проектам.

$$2. PI_{PORTF.} = \alpha_j * \frac{\sum_{t=1}^{\tau} (CF_t^j) / (1+WACC_M)^{t-1}}{\sum_{t=1}^{\tau} (I_t^j) / (1+WACC_M)^{t-1}} \geq 1+WACC_M$$

– 2-ое ограничение, учитывающее рентабельность и ценность отдачи инвестиционных вложений на единицу вложенных средств, а, следовательно, и устойчивость проекта в целом, где: WACC_M – предельное значение стоимости капитала, формирующее бюджет инвестиционного портфеля.

$$3. \sum_{j=1}^N \alpha^j * DPP^j \leq DPP_{PORTF.}$$

– 3-ее ограничение, учитывающее пороговое значение периода окупаемости инвестиционного проекта, где DPP_{PORTF.} – дисконтированное значение периода окупаемости (DPP, discounted payback period) формируемого инвестиционного портфеля, которое в данном случае задаёт инвестиционный менеджер исходя из оптимальных характеристик портфеля.

$$4. \alpha_j + \alpha_{j+1} = 1; \alpha_j, \alpha_{j+1} \leq 1$$

– 4-ое ограничение, учитывающее проекты, формирующие инвестиционный портфель, с порядковыми номерами j и $j+1$ считаются альтернативными. При формировании инвестиционного портфеля рассматриваются, как правило, не только независимые проекты, но взаимоисключающие (альтернативные) проекты, тогда на допустимое множество решений целевой функции

включает выше, приведённые дополнительные ограничения. Следует заметить, что в некоторых случаях два проекта не могут быть реализованы один без другого, что, например, может быть обусловлено общей технологической схемой предприятия, тогда допустимое множество включает уравнения типа $\alpha_j - \alpha_{j+1} = 0; \alpha_j, \alpha_{j+1} \leq 1$.

$$5. \sum_{i=1}^N \alpha^i * |n^i| \leq |n_{OPT}|$$

– 5-ое ограничение, учитывающее пороговое значение темпа падения денежных средств, где

$$\frac{NPV^{i,j}(WACC_M)}{NPV^j(WACC_M)} = n^j < 0$$
 – темп падения денежных средств по j -ому проекту с увеличением ставки дисконтирования,

где $NPV^{i,j}(WACC_M) = \sum_{i=0}^T \left(-i * \frac{CF_i^j}{(1+WACC_M)^{i-1}} \right) < 0$ – пер-

вая производная функции $NPV^j(WACC_M)$ j -ого проекта по средневзвешенной стоимости капитала портфеля WACC_M.

Чем больше $|n_j|$, тем меньше темп при-

тока денежных средств по j -ому проекту.

Полезно отметить, что на языке инвестиционного планирования логическое «и» можно выразить через «связывание» двух проектов, при условии, что ни один из двух проектов не может быть реализован без другого. В математической форме это выглядит следующим образом: $\alpha_1 - \alpha_2 = 0; \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$, где α_1, α_2 – целые числа.

Иногда рассматривается один и тот же инвестиционный проект, но в рамках поставки одного и того функционального оборудования, но от разных компаний поставщиков, где имеют уже место различные сроки поставки оборудования, включая фазу НИОКР, монтажа, пуска, наладки, а также технические характеристики оборудования. Тогда уже главными ограничивающими параметрами, при формировании допустимого множества являются вышеотмеченные факторы. Так, например, для одного проекта по модернизации оборудования, но от трёх разных компаний поставщиков производителей, ограничение по альтернативе имеет следующий вид: $\alpha_j + \alpha_{j+1} + \alpha_{j+2} = 1; \alpha_j, \alpha_{j+1}, \alpha_{j+2} \leq 1$. Плюс нужно сформировать ограничения, учитывающие технические особенности этого оборудования.

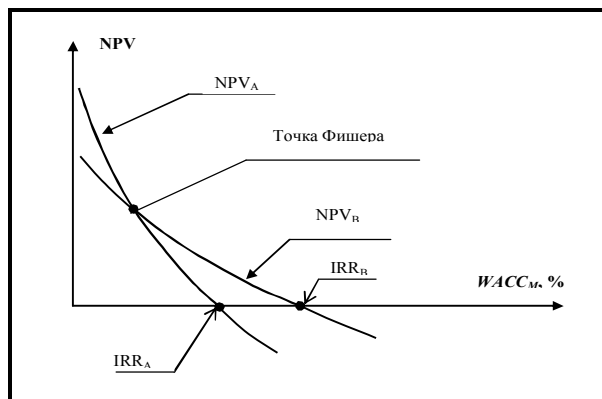


Рис. 8. График функции NPV(WACC_M) для проектов A и B с различными притоками денежных средств

Из рис. 8 видно, что темп падения $NPV(WACC_M)$ проекта **A** больше, чем у проекта **B** $\frac{NPV'_A(WACC_M)}{NPV_A(WACC_M)} < \frac{NPV'_B(WACC_M)}{NPV_B(WACC_M)}$, а, следовательно,

проект **A** обладает «большой чувствительностью», что обусловлено тем, что приток денежных средств по проекту **B** идёт более быстрыми темпами. Это, в первую очередь, связано с тем, что большая часть поступлений по проекту **B** имеет место в первые годы его реализации, и имеет меньшую неопределённость относительно прогнозных значений денежных потоков, а, следовательно, и меньшую величину финансового риска. При этом значение $WACC_M$ портфеля, при котором NPV проектов **A** и **B** равно, называется точкой Фишера и рассчитывается как IRR проекта $\Delta NPV = NPV_A - NPV_B$.

Множество допустимых решений задачи $f(\alpha) = \sum_{i=1}^N NPV^i * \alpha^i \rightarrow \max$, с геометрической точки зрения, представляет собой выпуклое множество (полигон), имеющее конечное число крайних точек, то есть точек, которые не могут быть выражены в виде выпуклой комбинации других точек.

Решается поставленная задача симплекс-методом Данцига (Dantzig G.B.), то есть методом направленно перебора базисных решений, определяющих крайние точки полигона, которые представляет собой многогранное множество.

Направленность перебора предполагает следующую организацию вычислительного процесса:

1. Нахождение начального базисного решения.
2. Переход от одного базисного решения к другому, при котором обеспечивается возрастание функции

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^N NPV^i * \alpha^i.$$

5.1. Способ нахождения начального базисного решения задачи

В случае решения рассматриваемой задачи способ нахождения начального базисного решения осуществляется посредством перехода к M -задаче. Таким образом, исходная задача записывается в расширенной форме, когда в уравнение (5.1) и в каждое из ограничений для него записывается по одной новой переменной, которые называются искусственными:

$$f(\alpha) = \sum_{j=1}^n NPV_j \alpha_j - M \sum_{i=1}^m \alpha_{n+i} \rightarrow \max; \quad (5.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} \alpha_j + \alpha_{n+i} = \bar{b}_i, i = \overline{1, m}; \quad (5.3)$$

$$\alpha_j \geq 0, j = \overline{1, n}; \alpha_{n+i} \geq 0, i = \overline{1, m}, \quad (5.4)$$

где матрица \bar{a}_{ij} , для нашего случая, принимает значения DPP^j, PI^j, CF^j

Задача (5.2)-(5.4) называется M -задачей. Целевая функция (5.2) содержит дополнительное слагаемое $-M \sum_{i=1}^m \alpha_{n+i}$, где $M > 0$ – достаточно большое число. На значение этого слагаемого состоит в том, чтобы в ходе решения задачи (5.2) -(5.4) вывести искусственные переменные из состава базисных. Если в результате решения задачи окажется, что искусственные пере-

менные входят в состав базисных и их значения не равны нулю, то это означает, что ограничения исходной задачи не совместны.

Переменные α_{n+i} являются базисными и начальное базисное решение имеет вид:

$$\alpha_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m}; \alpha_j = \dots = \alpha_n = 0.$$

5.2. Переход от одного базисного решения к другому

Он соответствует переходу от одной вершины полигона к другой в направлении возрастания функции $f(\alpha) = \sum_{i=1}^N NPV^i * \alpha^i$. Процедура расчётов связана с использованием симплекс-таблиц, каждая из которых соответствует текущему базисному решению. Пропуск вершины при описанном переходе будет исключён, если состав базисных переменных нового и старого решения будет отличаться только на одну координату. Выбор координаты, которая должна быть введена в число базисных, определяется из требования максимального прироста функции при переходе от одного решения к другому. Прирост целевой функции при введении в базис координаты α_j из числа небазисных характеризуется относительной оценкой Δ_j :

$$\Delta_j = c_j - \sum c_{iB} \bar{a}_{ij} = c_j - z_j, \quad (5.2.1)$$

где c_j – коэффициент целевой функции при переменной α_j ;

i_B – индекс базисной переменной, расположенной в i -ом уравнении (i -ой строке симплекс-таблицы);

c_{iB} – коэффициенты целевой функции при текущих базисных переменных;

\bar{a}_{ij} – элементы столбца коэффициентов при переменной α_j в системе уравнений, соответствующей текущему базису.

Таблица 6

ТАБЛИЦА АЛГОРИТМА СИМПЛЕКС-МЕТОДА

			c_1	c_2	...	$-M$	c_j
c_{iB}	БП	БР	α_1	α_2	...	α_{n+m}	БР / \bar{a}_{ir}
			\bar{a}_{11}	\bar{a}_{12}		0	
					
			\bar{a}_{m1}	\bar{a}_{m2}			
			z_1	z_2		z_{n+m}	z_j
			Δ_1	Δ_2		Δ_{n+m}	Δ_j

Обозначения имеют следующий смысл: **БП** – базисные переменные, **БР** – базисное решение.

При переходе в базис вводится та переменная α_r , для которой $\Delta_r = \max \Delta_j$ на множестве

$j \in J_H$, где J_H – множество индексов небазисных переменных.

Новая переменная α_r вводится на место переменной α_{sB} , удаляемой из числа базисных, номер которой

S_B , а также номер S соответствующей строки таблицы, определяется из условия:

$$\min \left[\frac{\bar{\alpha}_{iB}}{\bar{a}_{ir}} \right] = \frac{\bar{\alpha}_{SB}}{\bar{a}_{sr}}, \quad (5.2.2)$$

где $\bar{\alpha}_{iB}$ – значения координаты текущего базисного решения, соответствующей i -ой строке;

\bar{a}_{ir} – коэффициент при координате α_r в i -ой строке.

Вместо координаты α_{SB} в состав базисных вводится координата α_r , значения которой находятся по формуле:

$$\alpha_r = \frac{\bar{\alpha}_{SB}}{\bar{a}_{sr}}. \quad (5.2.3)$$

И пересчитывается s -я строка, в которой произошли изменения по базису:

$$\bar{a}_{sj} = \frac{\bar{a}_{sj}}{\bar{a}_{sr}}, j=1, \dots, m+n. \quad (5.2.4)$$

Далее вычисляются все остальные коэффициенты:

$$\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ij} - \bar{a}_{sj} \bar{a}_{ir} = \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{sj}}{\bar{a}_{sr}} \times \bar{a}_{ir}, i=1, \dots, m; j=1, \dots, m+n. \quad (5.2.5)$$

Элемент $\bar{\alpha}_{sr}$ называется разрешающим и выделяется в таблице прямоугольником. Координата α_{SB} становится небазисной и равной нулю. Новое базисное решение определяется на основании текущего базисного решения по формулам:

$$\bar{\alpha}_{iB} = \bar{\alpha}_{iB} - \bar{a}_{ir} \alpha_r, \forall i_B \neq S_B. \quad (5.2.6)$$

Процесс перехода заканчивается, когда найдено такое базисное решение, что все относительные оценки $\Delta_j, j=1, \dots, m+n$, становятся неположительными. Это базисное решение и является оптимальным.

Если полученная оптимальная таблица содержит базисное решение, которое не является целочисленным, то тогда используется метод Гомори и в оптимальной таблице выбирается переменная α_i с максимальной дробной частью (α_i^*). Под оптимальной таблицей понимается таблица симплекс-метода, содержащая нецелочисленное оптимальное решение.

Далее, пользуясь оптимальной таблицей, записываем уравнение

$$\alpha_i = \alpha_i^* - \sum_{k \in I_{HB}} \bar{a}_{ik} \alpha_k,$$

где

α_i^* – оптимальное нецелое значение α_i ,

I_{HB} – множество индексов небазисных переменных в оптимальном нецелочисленном решении.

Поскольку значение α_i должно быть целым, то записывается условие сравнимости по модулю 1, если

$$\sum_{k \in I_{HB}} \bar{a}_{ik} \alpha_k - \alpha_i^* - \text{целое число, тогда } \sum_{k \in I_{HB}} \bar{a}_{ik} \alpha_k \equiv \alpha_i^*.$$

Далее берутся дробные части всех коэффициентов \bar{a}_{ik} и α_i^* и записывается

$\sum_{k \in I_{HB}} (\bar{a}_{ik}) \alpha_k \equiv (\alpha_i^*), 0 \leq (\bar{a}_{ik}) \leq 1, 0 \leq (\alpha_i^*) \leq 1$ и записывается новое ограничение в виде равенства

$$\sum_{k \in I_{HB}} (\bar{a}_{ik}) \alpha_k - \alpha_v = (\alpha_i^*),$$

где α_v – дополнительная переменная, что приводит к расширению оптимальной таблицы на одну строку и один столбец, и записываются в таблицу эти ограничения.

5.3. Оценка приоритетности инвестиционных проектов на основе симплекс-метода при условии нежёсткого ограничения по бюджету

Для решения основной задачи (5.1) с учётом значений допустимого множества, на основе динамики рассматриваемых инвестиционных проектов, симплекс-методом приведём её каноническому методу путём введения в каждое ограничение по одной дополнительной переменной: в каждое ограничение типа неравенство со знаком \leq вводится дополнительная переменная со знаком «+» (она становится базисной), и для ограничения типа \geq вводим переменную со знаком «-».

Тогда каноническая форма задачи записывается следующим образом:

$$f(\alpha) = \sum_{j=1}^N NPV^j \times \alpha^j \rightarrow \max; \quad (5.3.1)$$

$$\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^N \frac{\alpha^j \times I^j}{(1+WACC_M)^{t-1}} - \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=1}^N \frac{\alpha^j \times CF^j}{(1+WACC_M)^{t-1}} + \alpha_{N+1} + \alpha_{N+\tau} = \sum_{i=1}^{\tau} \frac{I_{PB}}{(1+WACC_M)^{t-1}}; \quad (5.3.2)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha \times PI^j - \alpha_{N+\tau+2} = 1 + WACC_M; \quad (5.3.3)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha^j \times DPP^j + \alpha_{N+3} = DPP_{PORTF.}; \quad (5.3.4)$$

$$\alpha_j + \alpha_{j+1} + \alpha_{N+\tau+7} = 1; \alpha_j + \alpha_{N+\tau+3} = 1, \alpha_{j+1} + \alpha_{N+\tau+4} = 1; \quad (5.3.5)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha^j \times |n^j| + \alpha_{N+\tau+5} = |n_{OPT}|; \quad (5.3.6)$$

Поскольку в уравнении $\sum_{j=1}^N \alpha \times PI^j - \alpha_{N+\tau+2} = 1 + WACC_M$

отсутствуют базисные переменные, то для того, чтобы можно было применить симплекс-метод, делается переход к M -задаче. В это уравнение вводится искусственная переменная со знаком «+», которая становится базисной, а к целевой функции добавляется искусственная переменная, умноженная на «- M ». В результате получаем задачу в расширенной форме:

$$f(\alpha) = \sum_{j=1}^N NPV^j \times \alpha^j - M \times (\alpha_{N+\tau+7} + \alpha_{N+\tau+6}) \rightarrow \max; \quad (5.3.7)$$

$$\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^N \frac{\alpha^j \times I^j}{(1+WACC_M)^{t-1}} - \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=1}^N \frac{\alpha^j \times CF^j}{(1+WACC_M)^{t-1}} + \alpha_{N+1} + \alpha_{N+\tau} = \sum_{i=1}^{\tau} \frac{I_{PB}}{(1+WACC_M)^{t-1}}; \quad (5.3.8)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha^j \times DPP^j + \alpha_{N+\tau+1} = DPP_{PORTF.}; \quad (5.3.9)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha \times PI^j - \alpha_{N+\tau+2} + \alpha_{N+\tau+6} = 1 + WACC_M; \quad (5.3.10)$$

$$\alpha_j + \alpha_{j+1} + \alpha_{N+\tau+7} = 1; \alpha_j + \alpha_{N+\tau+3} = 1, \alpha_{j+1} + \alpha_{N+\tau+4} = 1; \quad (5.3.11)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha^j \times |n^j| + \alpha_{N+\tau+5} = |n_{OPT}|. \quad (5.3.12)$$

Для полученного допустимого множества (5.3.8) – (5.3.12) решаемой оптимизационной задачи сделаем предположения, что формируемый инвестиционный портфель должен включать проекты с дисконтированным сроком окупаемости не более 5 лет, а значение темпа падения денежного потока $|n_{opt}|$ должно быть не более 10.

Поскольку оценка приоритетности инвестиционных проектов основывается на целочисленных значениях долей портфеля α_j , что достигается с помощью метода Гомори, который, в свою очередь, имеет решение в определённых пределах допустимого множества. Поэтому авторы статьи при составлении симплекс-таблицы принимают расчёты проекта F , а не F' , что, в противном случае, может повлечь к выходу за пределы допустимого множества при отсечении целочисленных значений, и, как следствие, система уравнений (5.3.7) – (5.3.12) становится не совместной, то есть не имеющей хотя бы одного решения.

Тогда целевая функция (5.3.7) и допустимое множество (5.3.8)-(5.3.12) принимают следующий вид:

$$157207\alpha_1 + 165750\alpha_2 + 170290\alpha_3 + 253500\alpha_4 + 177317\alpha_5 + 110239\alpha_6 - M(\alpha_{14} + \alpha_{15}) \rightarrow \max;$$

$$140000\alpha_1 + 140000\alpha_2 - 40000\alpha_3 + 400000\alpha_4 + 200000\alpha_5 + 100000\alpha_6 + \alpha_7 = 1090000;$$

$$0,870 * (-80000 * \alpha_1 - 110000\alpha_2 + 250000\alpha_3 - 150000\alpha_4 - 140000\alpha_5 - 80000\alpha_6) + \alpha_8 = 948300;$$

$$3,108\alpha_1 + 2,532\alpha_2 + 3,503\alpha_3 + 4,352\alpha_4 + 3,010\alpha_5 + 2,446\alpha_6 + \alpha_9 = 5;$$

$$2,123\alpha_1 + 2,184\alpha_2 + 1,783\alpha_3 + 1,634\alpha_4 + 1,877\alpha_5 + 2,037\alpha_6 - \alpha_{10} + \alpha_{14} = 1,1492;$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{15} = 1;$$

$$\alpha_1 + \alpha_{11} = 1;$$

$$\alpha_2 + \alpha_{12} = 1;$$

$$3,26\alpha_1 + 3,562\alpha_2 + 4,187\alpha_3 + 7,35\alpha_4 + 4,488\alpha_5 + 3,388\alpha_6 + \alpha_{13} = 10.$$

Далее заполняем табл. 6 симплекс-методом, согласно данным интегральных показателей инвестиционных проектов для формируемого портфеля. Для удобства в расчётах значений Δ_j и z_j исходной симплекс-таблицы авторы статьи положили $M = 1\,000\,000$, что отражено в двух последних строках табл. 7.

Таблица 7

ИСХОДНАЯ ТАБЛИЦА СИМПЛЕКС-МЕТОДА ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

			157 200	165 700	170 300	253 500	177 400	110 200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c_i
c_{iB}	БП	БР	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}		$\frac{BP}{a_{ir}}$	
0	α_7	1 090 00	140 000	140 000	-40 000	400 000	200 000	100 000	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	α_8	948 300	-69 600	-95 700	217 500	-130 500	-121 600	-69 600	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	α_9	5 000	3 108	2 532	3 503	4 352	3 010	2 446	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1,598	
-M	α_{14}	1 149	2 123	2 183	1 782	1 633	1 887	2 102	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0,704	
-M	α_{15}	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	⊗	
0	α_{11}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
0	α_{12}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		
0	α_{13}	1 000	3 260	3 562	4 187	7 351	4 488	3 341	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0		
																			z_j	
																			Δ_j	

Далее записываем новое ограничение:
 $0,21362\alpha_1 + 0,1674\alpha_3 + 0,4455\alpha_4 + 0,8122\alpha_6 +$
 $+ 0,00033\alpha_9 - 0,8256\alpha_{15} - 1 \times \alpha_{16} = 0,83554$

Строим расширенную табл. 9 на базе табл. 8.

В базис вводим переменную α_9 , так как ей соответствует наименьшая по модулю отрицательная оценка $|\Delta_j| = 58,91$ и переходим к следующему шагу симплекс-метода.

В результате последовательного перебора вершин политопа в рамках симплексных таблиц, с помощью метода Гомори, где было построено множество посредством добавления, в нашем случае, двух новых дополнительных ограничений, получаем, оптимальные целочисленные решения задачи (5.3.7) – (5.3.12)

$\alpha_6 = \alpha_2 = 1$. Что в нашем случае означает, что приоритетными проектами, удовлетворяющими множеству допустимых решений, являются проекты **B** и **F**, то есть в этих точках политопа целевая функция достигает своего максимального значения. Доли по этим проектам, при формировании оптимального портфеля равны единице, а по остальным нулю.

Учитывая название компании, и перефразируя известную фразу американского астронавта Нейла Армстронга (that's one small step for man, one giant leap for mankind), авторы статьи надеются, что то видение методов, применяемых в инвестиционном анализе, изложенные в данной статье, послужит небольшим шагом на пути всех тех, кто профессионально занимается данной проблемой в широком смысле этого слова.

Таблица 10

РАСШИРЕННАЯ ТАБЛИЦА СИМПЛЕКС-МЕТОДА ПРИ ВВЕДЕНИИ ОДНОЙ БАЗИСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ α_{17} В РАМКАХ МЕТОДА ГОМОРИ

			1 570 200	165 700	170 300	253 500	177 400	110 200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c_i
c_{iB}	БП	БР	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	α_{16}	α_{17}	$\frac{BP}{a_{ir}}$	
0	α_7	849 999,9	1,5500489	0	-200 000	200 000	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-7,21001	-99999,9	1,23250	
0	α_8	1 113 600	26 099,99	0	300 000	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	30 399,9	69 600,0	42,631	
110 239	α_6	1	-8,397	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	1	0,75886	
165 750	α_2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-9,7795	1,441796	
0	α_{10}	3 135,99	61,00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-2 102	2 102	1 034	
0	α_{11}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
0	α_{12}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
	α_{13}	3097	-302	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3 341	-3 341	1,6470	
-1 000 000	α_{15}	3,4016	1,337	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1,41000	3,8037	
	α_9	70,04	643,0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2 445	-2 445	70	
			165 750	165 750	1 165 750	1 165 750	1 165 750	110 239	0	0	0	0	0	0	0	0	-1 000 000	945 272	110 239	0	
			-8 543	0	-995 460	-912 250	-988 433	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-945 272	-1 102 38,9	Δ_j	

ВЫВОД

При формировании оптимального инвестиционного портфеля, при наличии достаточных специфических ограничений, формирующих допустимое множество решений задачи, как, например, наличие двух уравнений по бюджету, только некоторые инвестиционные проекты могут рассматриваться как приоритетные, и, следовательно, формировать оптимальный инвестиционный портфель.

Литература

1. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов, теория и практика. Издательский дом «ДЕЛО», Москва, 2001 год.
2. Грачёва М.В., Фадеева Л.Н., Черёмных Ю.Н. Количественные методы в экономических исследованиях, Юнити, Москва, 2004 год.
3. Грачёва М.В. Риск-анализ инвестиционного проекта. «Юнити», Москва, 2001 год.
4. Киреев В.И. А. В. Численные методы в примерах и задачах. «Высшая школа», Москва, 2004 год.
5. Ковалёв В.В. Введение в финансовый менеджмент. «Финансы и статистика», Москва, 2001 год.
6. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. Москва, «Высшая школа», 2005 год.
7. Попов В.П. Финансовый бизнес-план, «Финансы и статистика», Москва, 2001 год.
8. Юджин Бриггем, Луис Гапенски. Финансовый менеджмент. Экономическая школа, Санкт-Петербург, 2001 год.
9. Ричард Брейли, Стюарт Майерс. Принципы корпоративных финансов. ЗАО «Олимп – Бизнес», Москва, 2004 год.
10. Лутц Крушвиц. Инвестиционные расчёты. Издательский дом «Питер», Санкт-Петербург, 2001 год.
11. Ченг Ф. Ли, Джозеф И. Финнерти. Финансы корпораций: теория, методы и практика. «ИНФРА-М», Москва, 2000 год.
12. Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александр, Джеффери В. Бэйли. Инвестиции. Инфра-М, Москва, 1999 год.

*Мальцев Александр Святослаович
Евлампиев Андрей Романович*

8.2. OPTIMIZATION SIMULATION OF THE INVESTMENT BRIEFCASE

A.S. Maltsev, A.R. Evlampiev

In the article the algorithm of creation of an optimal investment briefcase is resulted, as which optimization parameter the maximization a pure adjusted present value (Net Present Value, NPV) designs, on admissible assemblage which is made up of limitations under the budget, to pay-back period, an accounting rate of return and tempo of a falling of money resources appears. And as limitation under the budget of a cash the significance gained as a cross point of graphs (Investment Opportunity Schedule appears, IOS) the graphics of investment possibilities and the marginal cost of a company capital (Marginal Cost of Capital Schedule, MCC) and represents a graphics image of weighted average cost of the capital as functions of size of involved financial resources.

The optimization task is decided by the simplex-method with the subsequent adding additional limitations according to method Gomori that gives an integral value of shares of an optimization briefcase, that, in turn, enables to state a quantitative estimation of priority of the capital investment projects, a made up briefcase.