

Таблица 1

## 8.2. УЧЕТ ОТНОШЕНИЯ ИНВЕСТОРА К РИСКУ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Артемяева Е. С., аспирант кафедры математических методов анализа экономики экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

В соответствии с классической теорией портфеля, сформулированной в 1950-х гг. Гарри Марковицем, инвестиционное решение на фондовом рынке зависит от двух факторов: риска и доходности вложения. В действительности существует по меньшей мере еще один фактор, влияющий на выбор инвестиционного портфеля: готовность инвестора рисковать. Большинство показателей, оценивающих степень неприятия риска, основаны на аппарате кривых безразличия, что значительно усложняет их практическое применение. Фактор отношения инвестора к риску можно ввести в оптимизационную задачу косвенно, например, через уровень доверительной вероятности при оценке риска по методу VaR, однако такие задачи не позволяют четко отследить зависимость между склонностью инвестора к риску и его оптимальным портфелем. Целью настоящего исследования было проанализировать существующие методы оптимизации инвестиционного портфеля и построить задачу, позволяющую учесть показатель неприятия риска в качестве коэффициента целевой функции. Построенная в настоящей статье оптимизационная задача представляет процесс выбора портфеля как стратегическую игру с природой и основана на некоторых выводах VaR-подхода к оценке потенциального убытка и аппарате теории принятия решений в условиях неопределенности.

### 1. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Формально процесс принятия инвестиционного решения можно представить следующим образом. Лицо, принимающее решения (ЛПР), выбирает наилучшую в некотором смысле стратегию из нескольких исключаящих друг друга альтернатив. При этом инвестор всегда находится в ситуации неопределенности, то есть не может точно предсказать, каковы будут последствия каждой из возможных стратегий, или, иначе говоря, какое из состояний окружающей среды реализуется. Математический аппарат для выбора наилучшей альтернативы в ситуации неопределенности описывается теорией принятия решений.

В зависимости от степени неопределенности выделяют два вида моделей:

- принятие решений в условиях полной неопределенности, когда ЛПР не в состоянии определить вероятности наступления различных состояний окружающей среды;
- принятие решений в условиях риска, когда известны вероятности наступления каждого из альтернативных состояний окружающей среды.

#### Принятие решений в условиях полной неопределенности

В случае полной неопределенности можно представить процесс выбора решения в виде стратегической игры. Условия такой игры заносятся в таблицу решений, в которой строки соответствуют возможным стратегиям ЛПР  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , а столбцы – возможным исходам  $N_1, N_2, \dots, N_s$  (состояниям природы). Элементы матрицы  $a_{ij}$  представляют собой выигрыш ЛПР, соответствующий  $i$ -й стратегии и  $j$ -му состоянию природы (см. табл. 1).

МАТРИЦА ВЫИГРЫШЕЙ В СТРАТЕГИЧЕСКОЙ ИГРЕ С ПРИРОДОЙ

Исходы Стратегии	$N_1$	$N_2$	...	$N_s$
$A_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1s}$
$A_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2s}$
...	...	...	...	...
$A_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{ms}$

В задаче оптимизации инвестиционного портфеля множество альтернатив задается допустимым множеством портфелей, причем по мере увеличения количества ценных бумаг число возможных стратегий возрастает до бесконечности. При реализации  $j$ -го состояния природы вектор доходностей ценных бумаг, входящих в портфель, примет вид:  $r_j = (r_j^1, r_j^2, \dots, r_j^n)$ , где  $n$  – количество ценных бумаг, входящих в портфель. Если ЛПР при этом выберет стратегию  $i$ , то его выигрыш составит:  $x_i \cdot r_j$ , где  $x_i$  – вектор долей ценных бумаг в портфеле, соответствующем  $i$ -й стратегии инвестирования. Таким образом, элементы матрицы выигрышей  $a_{ij}$  интерпретируются как доходность  $i$ -го портфеля при реализации  $j$ -го состояния среды.

Для выбора наилучшей стратегии из множества  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  могут использоваться следующие критерии:

1. Максимальный критерий, или критерий крайнего оптимизма, состоит в том, что ЛПР выбирает такую стратегию  $i^*$ , для которой выполняется

$$\max_i \max_j a_{ij}, \tag{1}$$

то есть, для каждой стратегии определяется наилучший результат, а затем выбирается стратегия с максимальным из полученных результатов.

2. Максимальный критерий Вальда, или критерий крайнего пессимизма, подразумевает выбор стратегии, обеспечивающей максимальный результат в худшей ситуации:

$$\max_i \min_j a_{ij}. \tag{2}$$

3. Критерий оптимизма-пессимизма Гурвица означает, что ЛПР не руководствуется ни крайним пессимизмом, ни крайним оптимизмом, и стратегия выбирается при помощи следующего условия:

$$\max_i \{k \min_j a_{ij} + (1-k) \max_j a_{ij}\}, \tag{3}$$

где  $k$  – коэффициент пессимизма, значения которого лежат в промежутке  $[0;1]$ . При  $k=1$  критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, а при  $k=0$  – в максимальный критерий. Коэффициент  $k$  выбирается из субъективных соображений – чем опаснее ситуация, тем больше стремление инвестора «подстраховаться».

4. Критерий безразличия – ЛПР выбирает стратегию исходя из предположения, что все возможные исходы равновероятны, и выбирается стратегия с максимальным средним значением выигрыша:

$$\max_i \sum_{j=1}^s \frac{a_{ij}}{s}. \tag{4}$$

Примером задачи формирования инвестиционного портфеля в условиях полной неопределенности может послужить правило оптимизации портфеля, сформулированное в 1988 году Мартином Янгом на основе принципа максимин. В качестве меры риска портфеля Янг предложил использовать наибольший убыток, который мог бы понести портфель с данной структурой за прошедший период времени. В предложенной модели требуется максимизировать величину минимального дохода (минимизировать максимальный убыток) при данном уровне ожидаемой доходности портфеля.

Введем переменную  $M_p$ , отражающую размер наименьшего дохода, получаемого по данному портфелю в течение рассматриваемого периода:

$$M_p = \min_t \sum_{i=1}^n x_i r_{it}, \quad (5)$$

где

$t=1...T$  – номер наблюдения;

$x_i$  – доля капитала, вложенного в ценные бумаги  $i$ -го

вида;

$r_{it}$  – доход по  $i$ -й ценной бумаге в момент времени  $t$ .

Тогда модель максимина формулируется следующим образом:

$$M_p \rightarrow \max; \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i r_{it} \geq M_p; \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i = \bar{\mu}; \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad (9)$$

где

$\mu_i$  – математическое ожидание доходности  $i$ -го вида ценных бумаг;

$\bar{\mu}$  – требуемое значение ожидаемой доходности.

Важнейший недостаток рассмотренной модели состоит в том, что инвестор руководствуется соображениями крайнего пессимизма. В результате решение задачи весьма чувствительно к единичным выбросам. Кроме того, проблема может возникнуть и при выборе временного периода. С одной стороны, рассматриваемый промежуток времени должен быть достаточно длительным, чтобы уловить наименьшее из возможных значений, но, с другой стороны, под влиянием каких-либо необратимых внешних или внутренних факторов в долгосрочном периоде интервал значений дохода ценной бумаги может резко измениться.

### Принятие решений в условиях риска

В условиях риска инвестор может рассчитать математическое ожидание выигрыша для каждой из возможных стратегий:

$$\mu_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j, \quad (10)$$

где  $p_j$  – вероятность наступления  $j$ -го состояния природы, и выбрать альтернативу с наибольшим математическим ожиданием. В формализованном виде данное правило, называемое  $\mu$ -принципом, выглядит следующим образом:

$$\mu(a_i) > \mu(a_k) \Rightarrow A_i \succ A_k, \quad (11)$$

то есть стратегия  $A_i$  доминирует стратегию  $A_k$ , иными словами, стратегия  $A_i$  предпочтительнее стратегии  $A_k$ .

Правило максимизации математического ожидания не всегда дает наилучшие результаты, поскольку оно не учитывает рискованности стратегий. Существует две основных модификации этого метода: теория ожидаемой полезности, или принцип Бернулли, и так называемый принцип доходности – риск, впервые реализованный в теории Марковица.

### Принцип Бернулли

Использование ожидаемой полезности для оценки предпочтений инвестора вместо математического ожидания было предложено Даниилом Бернулли более чем 250 лет тому назад, однако эта теория не вызвала особого интереса до публикации в 1944 году работы Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна.

Бернулли оспорил принцип математического ожидания на основе анализа так называемой петербургской игры, которая состоит в бесконечном подбрасывании монеты до тех пор, пока не выпадет орел. Выигрыш этой игры составляет  $2^S$ , где  $S$  – номер броска, при котором выпадает орел, причем за участие в игре необходимо заплатить некий взнос. Задача принятия решения в данном случае состоит в том, чтобы определить величину взноса.

Очевидно, что математическое ожидание выигрыша в этой игре бесконечно, однако никто не согласится заплатить один миллион рублей за право участия в ней. Бернулли предложил вариант решения этого парадокса, основанный на использовании ожидаемой полезности вместо математического ожидания.

Согласно принципу Бернулли, принятие решения в условиях риска осуществляется в три стадии:

- с помощью некоторой функции  $U(X)$  результатам каждой альтернативы приписывается некоторое значение полезности  $U(a_j)$ , зависящее от состояния природы;
- после этого рассчитываются математические ожидания значений полезности каждой альтернативы:

$$E[U(a_i)] = \sum_{j=1}^n U(a_{ij}) p_j; \quad (12)$$

- принятие решения осуществляется по принципу:

$$E[U(a_i)] > E[U(a_k)] \Rightarrow A_i \succ A_k. \quad (13)$$

Функцию ожидаемой полезности обычно называют функцией рискованной полезности или функцией полезности Неймана-Моргенштерна.

### Принцип «доходность – риск»

Большинство современных теорий портфеля предполагают, что инвестиционное решение на фондовом рынке зависит от двух факторов – риска и доходности вложения. В рамках подхода «доходность – риск» рациональный инвестор, действующий в соответствии с аксиомами ненасыщаемости и неприятия риска, выбирает портфель таким образом, чтобы он обеспечивал ему максимально возможную доходность при наименьшем уровне риска. Портфели, отвечающие этим двум правилам, находятся на так называемой эффективной границе допустимого множества портфелей. Индивидуальный инвестор выбирает оптимальный портфель как точку касания эффективной границы с кривой безразличия, соответствующей наибольшему уровню полезности.

## 2. ЭФФЕКТИВНАЯ ГРАНИЦА МАРКОВИЦА И ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ

Впервые математическая формализация процесса выбора инвестиционного портфеля появилась в 50-х годах прошлого века в основополагающей работе Гарри Марковица, который сформулировал описанный выше принцип «доходность – риск». В связи с тем, что в рамках рассматриваемого подхода в качестве меры риска используется стандартное отклонение доходности портфеля, предложенный Марковицем метод стали называть принципом  $\mu-\sigma$ .

Графически эффективное множество Марковица строится на плоскости «стандартное отклонение – доходность». Прежде всего выбираются наиболее рискованный и наименее рискованный портфель из всех возможных. Множеством портфелей, обеспечивающих наибольшую ожидаемую доходность при изменяющемся уровне риска, будет часть верхней границы допустимого множества, расположенная между наиболее рискованным и наименее рискованным портфелем. Аналогично получается граница, отвечающая второму условию эффективности. Это будет часть верхней границы допустимого множества между портфелями с наибольшей и наименьшей доходностью. Поскольку портфели должны удовлетворять обоим условиям сразу, то эффективным множеством, или эффективной границей, будет пересечение полученных множеств. Эффективная граница выпукла к оси ординат и имеет отрицательный наклон.

На рис. 1 приведена графическая иллюстрация построения эффективной границы Марковица. Портфели, минимизирующие риск при каждом заданном уровне ожидаемой доходности, расположены на кривой  $AD$ . Портфелю  $A$  соответствует наименьшая возможная доходность, портфелю  $D$  – наибольшая. Условие максимизации доходности для каждого фиксированного уровня риска обеспечивается участком  $BD$ . Портфели, расположенные на участке  $AB$ , доминируются портфелями, расположенными между  $B$  и  $C$ . Следовательно, эффективной границей Марковица является участок  $BD$ .

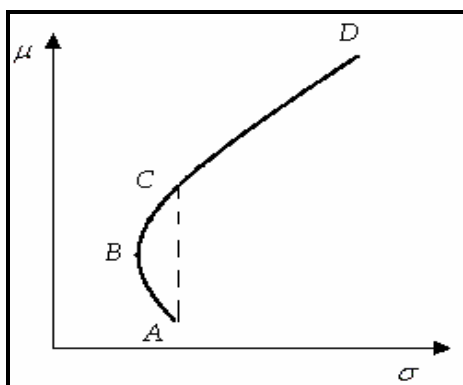


Рис. 1. Построение эффективной границы Марковица

Таким образом, эффективная граница определяет область поиска инвестора, в то время как выбор оптимального портфеля зависит от его индивидуальных предпочтений относительно риска и доходности.

Индивидуальные предпочтения инвестора описываются его картой кривых безразличия, которая также строится на плоскости «стандартное отклонение – до-

ходность». Зафиксируем на плоскости  $(\sigma, \mu)$  точку  $(\sigma_0, \mu_0)$ , соответствующую портфелю  $A_0$ . Все портфели, лежащие правее данной точки, являются менее предпочтительными, чем  $A_0$ , поскольку при том же уровне доходности их риск выше. Портфели, расположенные выше данной точки, являются более предпочтительными, чем  $A_0$ , так как при том же уровне риска их доходность выше. Тогда портфели, столь же предпочтительные, сколь и  $A_0$ , располагаются от  $A_0$  к «северо-востоку», как показано на рис. 2 а. Очевидно, что и противоположное направление соответствует неизменной предпочтительности. Задание направлений равной предпочтительности в каждой точке полуплоскости  $(\sigma, \mu)$  определяет в этой области карту кривых безразличия инвестора (рис. 2 б). Отметим, что точка  $\mu_A$ , лежащая на пересечении кривой безразличия и оси ординат, может быть истолкована как детерминированный эквивалент портфеля  $A_0$ .

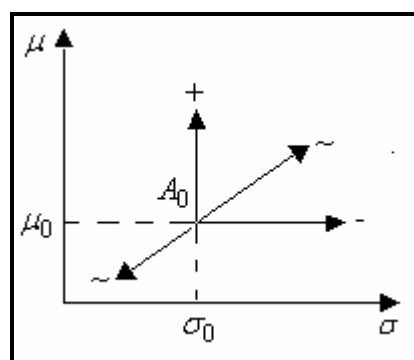


Рис. 2 а. Принцип построения кривых безразличия в теории портфеля

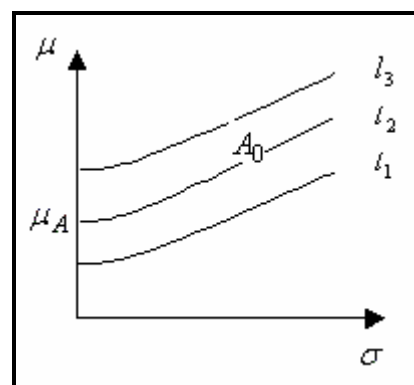


Рис. 2 б. Пример карты кривых безразличия инвестора, избегающего риска

Если совместить график эффективной границы с картой кривых безразличия инвестора, то оптимальным будет портфель, расположенный на самой высокой кривой безразличия и одновременно принадлежащий эффективному множеству. Иначе говоря, инвестор выберет портфель, соответствующий точке касания кривой безразличия инвестора и эффективного множества Марковица. На рис. 3 показан выбор оптимального портфеля:  $BD$  – эффективная граница Марковица;  $I_r$  – кривая безразличия инвестора, отвечающая самому высокому уровню благосостояния.

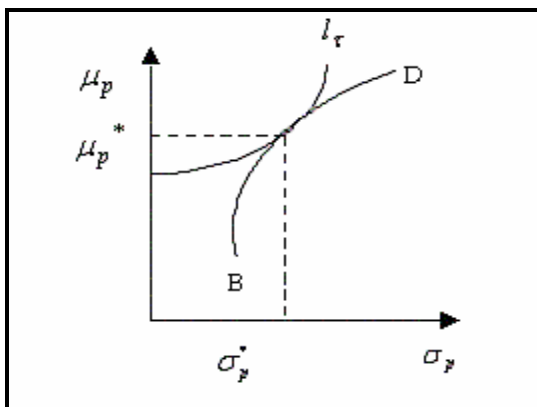


Рис. 3. Определение оптимального портфеля инвестора

Недостаток предложенного Марковицем графического метода оптимизации портфеля ценных бумаг состоит в том, что построение эффективной границы портфелей и карты кривых безразличия инвестора на практике весьма затруднительно. Кроме того, если эффективная граница может быть построена посредством решения описанной ниже оптимизационной задачи при различных значениях  $\bar{\mu}$ , то применение аппарата функций полезности требует выполнения множества субъективных предположений о поведении инвестора и представляет собой сложную теоретическую задачу. Для удобства практического применения построение оптимального портфеля сводится к решению однокритериальной задачи минимизации риска при ограничении на уровень ожидаемой доходности. Получаемые таким образом портфели называют диверсифицированными. Основным принципом диверсификации состоит во включении в состав портфеля ценных бумаг, имеющих низкий коэффициент корреляции, что позволяет снизить совокупный риск портфеля.

### Задача Марковица

Задача Марковица для портфеля ценных бумаг формулируется следующим образом:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \rightarrow \min ; \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i = \bar{\mu} ; \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \tag{16}$$

где  $\sigma_{ij}$  — ковариация между ценными бумагами  $i$ -го и  $j$ -го вида.

Целевая функция (14) данной задачи представляет собой выражение для риска портфеля ценных бумаг. Получаемый с использованием рассматриваемой задачи портфель должен обеспечивать заданное значение  $\bar{\mu}$  ожидаемой доходности (15). Ограничение (16) может не выполняться, если допустить участие в портфеле безрисковых ценных бумаг.

Рассмотрим некоторые качественные характеристики формируемого таким образом оптимального портфеля. Наиболее вероятно, что с увеличением требуемой доходности возрастет доля высокодоходных ценных бумаг и уменьшится доля низкодоходных и, одновременно, менее рискованных ценных бумаг. Фактически выбор зна-

чения  $\bar{\mu}$  характеризует отношение инвестора к риску: чем больше  $\bar{\mu}$ , тем больше риск портфеля, и, следовательно, тем меньше инвестор избегает риска.

Обычно рассматриваемая задача решается при помощи метода множителей Лагранжа при допущении операций типа short sale (продаж без покрытия), то есть без ограничения на неотрицательность долей ценных бумаг в портфеле, однако на практике такие операции не всегда допустимы. Поэтому большой практический интерес представляет задача с дополнительными ограничениями на неотрицательность переменных.

Необходимо отметить, что построенная на основе рассматриваемой задачи кривая в действительности отвечает только одному из условий эффективности. На рис. 3 эта кривая соответствует участку **AD**. Иногда, чтобы подчеркнуть различие, кривую **AD** называют просто границей (boundary), а участок **BD** — эффективной границей, или эффективной кривой (efficient frontier). Для того, чтобы решение данной задачи принадлежало эффективной границе Марковица, необходимо задавать значение  $\mu$ , большее ожидаемой доходности портфеля с минимальной возможной дисперсией (портфель **B**).

### 3. ЭФФЕКТИВНЫЕ ГРАНИЦЫ В РАМКАХ $\mu$ -VaR и $\mu$ -ES ПОДХОДОВ

На современном уровне развития риск-менеджмента все большей популярностью пользуются так называемые квантильные показатели, оценивающие «левый хвост» распределения доходности актива. В отличие от дисперсии, квантильные показатели позволяют оценить не только степень подверженности актива рыночному риску, но и размер потенциальных потерь.

Наиболее известный на сегодняшний день показатель данного вида — критерий допустимых потерь (Value-at-Risk, **VaR**) был разработан в конце 1980-х годов сотрудниками инвестиционного банка JP Morgan с целью расчета потенциальных потерь банка. В 1994 году сотрудники JP Morgan опубликовали систему оценки риска под названием RiskMetrics и открыли свои базы данных. **VaR** представляет собой размер убытка, который может быть превышен с вероятностью не более  $\alpha$  %, (не будет превышен с вероятностью  $(100 - \alpha)$  %), в течение последующих  $T$  дней. Формально **VaR** рассчитывается как  $\alpha$ -квантиль функции распределения цены актива. В зависимости от предположений о характере поведения доходности выбирается один из трех методов расчета **VaR** — ковариационный метод (variance-covariance, метод вариаций-ковариаций), метода исторического моделирования (historical simulation) и метода Монте-Карло (Monte-Carlo simulation).

Для целей оптимизации портфеля нужно получить аналитическое выражение для **VaR**, поэтому методы имитационного моделирования в данном случае неприменимы, и расчет проводится по методу вариаций-ковариаций в предположении о нормальном или логнормальном распределении доходности портфеля:

$$\text{VaR}_\alpha = z_\alpha \sigma_p - \mu_p, \tag{17}$$

где  $z_\alpha$  —  $\alpha$ -квантиль стандартного нормального распределения. В системе RiskMetrics рассматривается временной интервал в один день и доверительная вероятность, равная 95%, причем  $\mu_p$  принимается рав-

ным нулю. Однако формирование инвестиционного портфеля на срок один день не имеет смысла. Обычно портфель пересматривается раз в две недели или в месяц. Поэтому стандартная формула расчета **VaR** дает приближенные результаты. В настоящей работе предлагается рассматривать не дневную, а месячную доходность. Этот метод полностью согласуется с определением **VaR** и имеет ряд неоспоримых преимуществ. Прежде всего, распределение месячной доходности не учитывает ежедневных колебаний, и поэтому больше соответствует интересам стратегического инвестора. Кроме того, практические расчеты показывают, что распределение месячной доходности значительно ближе к нормальному.

Еще одно возражение против метода расчета в системе RiskMetrics состоит в том, что среднее значение доходности портфеля  $\mu_p$  нельзя принимать равным нулю. Интуитивно понятно, что, если инвестирование осуществляется на срок больше одного дня, то среднее значение доходности отлично от нуля. Формальное доказательство этого факта основано на конкретном примере. Рассмотрим два портфеля **A** и **B**, для которых  $\sigma_A = \sigma_B$ , а  $\mu_A = -\mu_B$ , причем  $\mu_A > 0$ . Тогда, если в формуле (17) опустить ожидаемую доходность  $\mu_p$ , то получим одинаковые значения **VaR** для длинной позиции (на покупку ценной бумаги) с положительной ожидаемой доходностью и короткой позицией в том же портфеле с отрицательной доходностью.

В действительности выражение (17) использовалось в качестве меры риска задолго до появления концепции **VaR**. В 1963 году В. Баумоль сформулировал критерий «нижнего доверительного предела» (lower confidence limit) для портфеля, который вычисляется по формуле  $\mu_p - k\sigma_p$ , где  $k \in R$ . Очевидно, что данное выражение аналогично ( $-VaR$ ) при соответствующем уровне доверительной вероятности.

Задача **VaR**-оптимизации формулируется аналогично задаче Марковица :

$$z_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}} - \sum_{i=1}^n x_i \mu_i \rightarrow \min ; \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 ; \quad (19)$$

$$x_i \geq 0 . \quad (20)$$

Процедура решения данной задачи также аналогична используемой для задачи Марковица, однако структура показателя **VaR** налагает определенные ограничения на возможность существования оптимального портфеля. Так, при уровне доверительной вероятности  $p = 1 - \alpha$ , меньшем 0.5, решения задачи **VaR**-оптимизации не существует, так как целевая функция в этом случае примет вид  $\mu_p + z_\alpha \sigma_p$ .

При  $p > 0.5$  решение задачи **VaR**-оптимизации не зависит от  $z_\alpha$  и идентично решению задачи Марковица за исключением значения целевой функции. Если решить задачу (18) – (20) без ограничения на уровень требуемой доходности, то получим портфель с наименьшим возможным значением **VaR**. На графике эффективной границы Марковица такой портфель будет лежать выше портфеля с наименьшей дисперсией, поскольку его ожидаемая доходность выше.

Если построить  $(\mu, VaR)$  эффективную границу, то ее форма будет зависеть от уровня доверительной вероятности. При уровне  $p$ , близком к 0.5, значение квантили  $z_\alpha$  стремится к нулю. Следовательно, при уровне доверительной вероятности, равном 0.5, **VaR** портфеля вычисляется как  $-\mu_p$ , и эффективная граница вырождается в прямую с отрицательным наклоном в  $45^\circ$ .

По мере того, как значение  $p$  приближается к 1,  $z_\alpha \rightarrow +\infty$ . В пределе получим, что

$$\lim_{p \rightarrow 1} VaR_\alpha / z_\alpha = \lim_{z_\alpha \rightarrow +\infty} \sigma(r_p) - \mu(r_p) / z_\alpha = \sigma(r_p) . \quad (21)$$

Выражение (21) означает, что по мере того, как растет уровень доверительной вероятности, снижается влияние ожидаемой доходности портфеля на значение **VaR**. Поэтому в пределе  $(\mu, VaR)$  эффективная граница аналогична стандартной гиперболе эффективной границы Марковица. Поведение  $(\mu, VaR)$  эффективной границы при  $p \rightarrow 0.5$  представлено на рис. (4.а), а при  $p \rightarrow 1$  – на рис. (4.б).

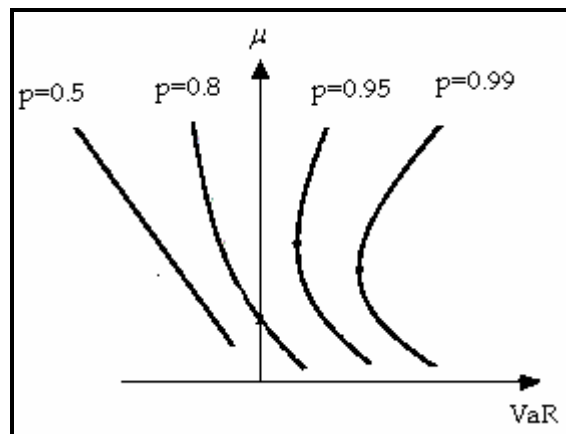


Рис. 4 а.  $(\mu, VaR)$  эффективная граница при  $p \geq 0.5$

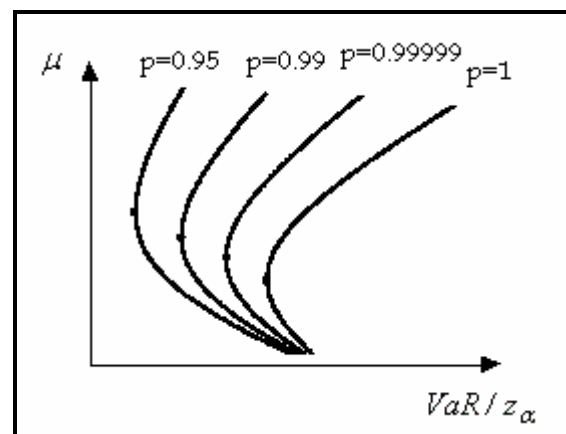


Рис. 4 б.  $(\mu, VaR)$  эффективная граница при  $p \rightarrow 1$

С точки зрения  $\mu - \sigma$  принципа, сформулированного в классической теории портфеля, на величину **VaR** портфеля влияют два фактора: ожидаемая доходность  $\mu_p$  и стандартное отклонение  $\sigma_p$ . Если значение  $z_\alpha$  недостаточно велико для того, чтобы пересилить эф-



факт математического ожидания, то задача минимизации **VaR** не имеет решения. Кроме того, уровень доверительной вероятности, выбранный инвестором, характеризует его отношение к риску. Чем выше уровень доверительной вероятности и, как следствие, значение  $z_\alpha$ , тем большее значение в формуле (17) имеет стандартное отклонение. Если же инвестор при оценке убытков большее значение придает риску ценной бумаги, чем ее доходности, значит, он склонен делать пессимистические оценки будущей ситуации, что равносильно неприятию риска. Значение доверительной вероятности как характеристика отношения инвестора к риску аналогично параметру  $\bar{\mu}_p$  в задаче Марковица.

Несмотря на всеобщее признание, **VaR** как показатель рыночного риска имеет ряд недостатков, в том числе связанных с тем, что **VaR** по построению игнорирует маловероятные потери и не отвечает аксиоме субаддитивности. Тот факт, что **VaR** не учитывает маловероятные убытки, ведет к занижению фактической величины риска ценной бумаги. Продемонстрировать это можно на простом примере. Рассмотрим два портфеля, наибольший убыток по которым составляет \$100 с вероятностью 5%. Если подобрать один из портфелей так, что его убытки с вероятностью меньше 5% постоянны и также равны \$100, а другой так, что теоретически его убытки могут быть сколь угодно велики (это возможно для спекулятивных портфелей), то оценка **VaR** в \$100 будет для них одинакова, хотя второй портфель очевидно более рискованный. Аксиома субаддитивности, рассматриваемая многими исследователями, в том числе разработчиками теории когерентных мер риска Филиппом Артнером и Фредди Делбаеном, как необходимое свойство любого адекватного измерителя риска, гласит, что слияние двух активов не должно вести к дополнительному риску. Иначе говоря, совокупный риск портфеля не может быть выше суммы индивидуальных уровней риска входящих в него бумаг.

Для оценки наилучшей ожидаемой доходности теоретически можно использовать любой другой показатель, оценивающий левый хвост распределения. Учесть маловероятные события можно, например, рассчитав среднее значение наихудших убытков, которые могут произойти с вероятностью не выше  $\alpha$ . Именно по такому принципу рассчитывается когерентный показатель Expected Shortfall. Дадим формальное определение **ES**. Пусть  $R$  – случайная величина, описывающая будущую прибыль или убыток портфеля через время  $T$  после момента оценивания, и  $\alpha \in (0,1)$  – заданный уровень значимости, тогда **ES** портфеля с параметрами  $\alpha$  и  $T$  определяется следующим образом:

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha} (E[R | R \leq x^{(\alpha)}] - x^{(\alpha)} \cdot (P[R \leq x^{(\alpha)}] - \alpha)), \quad (22)$$

где  $x^{(\alpha)} = F_R^{-1}(\alpha)$ .

Для непрерывных распределений  $R$  формула (22) упрощается:

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha} (E[R | R \leq x^{(\alpha)}]), \quad (23)$$

или

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha} (E[R | R \leq -VaR_\alpha]). \quad (24)$$

В случае нормального распределения **ES** рассчитывается следующим образом:

$$ES = \frac{\rho(z_\alpha)}{\alpha} \sigma - \mu, \quad (25)$$

где  $\rho(z)$  – функция плотности нормального распределения,  $\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ .

Необходимо отметить, что **ES** называют консервативной мерой риска, поскольку в отличие от **VaR**, игнорирующей большие, но маловероятные убытки, **ES** обычно завышает уровень риска, присущий активу.

Задача **ES**-оптимизации при выполнении предпосылки о нормальном распределении доходности портфеля аналогична задаче **VaR**-оптимизации:

$$\frac{\rho(z_\alpha)}{\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}} - \sum_{i=1}^n x_i \mu_i \rightarrow \min; \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i = \bar{\mu}; \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1; \quad (28)$$

$$x_i \geq 0. \quad (29)$$

Поскольку мера риска **ES** более консервативна, чем **VaR**, и  $\frac{\rho(z_\alpha)}{\alpha} > z_\alpha$  для любого уровня значимости, то

$(\mu, VaR_\alpha)$  – эффективная граница является подмножеством эффективной границы  $(\mu, ES_\alpha)$ . Графически, как показано на рис. 5, это означает, что на эффективной границе Марковица портфель с минимальным значением **ES** лежит между портфелями с минимальной дисперсией и **VaR**.

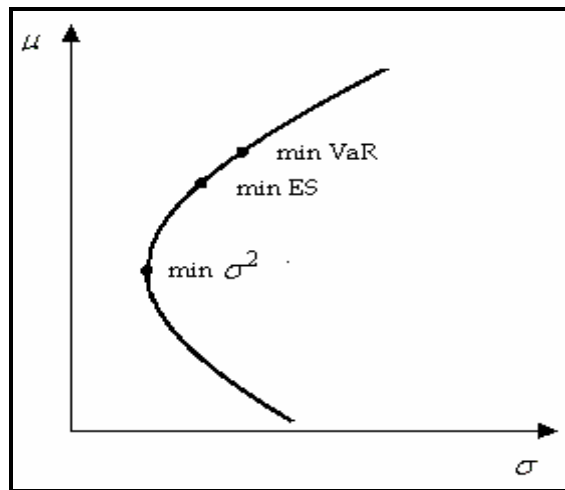


Рис. 5. Эффективная граница Марковица с портфелями, минимизирующими **VaR** и **ES**

Таким образом, участок между портфелями с минимальной дисперсией и **VaR** не эффективен с точки зрения **VaR**-оптимизации, а участок между портфелями с минимальной дисперсией и **ES** – с точки зрения **ES**-оптимизации. Иными словами, любой портфель, полученный в результате **VaR**-оптимизации, эффективен с точки зрения теории Марковица и **ES**-оптимизации. Доказательство этого факта следует из представления решений данных задач в аналитическом виде.

### 4. УЧЕТ ОТНОШЕНИЯ ИНВЕСТОРА К РИСКУ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Впервые понятие неприятия риска (risk aversion) появилось в связи с теорией ожидаемой полезности Неймана-Моргенштерна. Отношение инвестора к риску определялось на основе соотношения математического ожидания выигрыша в лотерее и его безрискового эквивалента.

Допустим, что вероятность выигрыша  $x$  в лотерее  $z$  составляет  $p\%$ , а вероятность проигрыша  $y - (1-p\%)$ , тогда математическое ожидание выплат (pay-off) составит  $m = px + (1-p) \cdot y$ . Соответственно, ожидаемая полезность лотереи будет равна:  $u(z) = p \cdot u(x) + (1-p) \cdot u(y)$ . Безрисковым эквивалентом  $s$  данной лотереи будет являться та сумма, за которую игрок согласится купить лотерейный билет.

Тогда лицо, принимающее решение (ЛПР), называется

- не склонным к риску, если для него  $s < m$ ;
- нейтральным к риску, если  $s = m$ ;
- склонным к риску, если  $s > m$ .

После появления теории Марковица степень неприятия риска стали измерять как наклон кривой безразличия инвестора. Так, коэффициент Эрроу-Пратта неприятия риска вычисляется по формуле:

$$R = -\frac{U''(x)}{U'(x)}, \tag{30}$$

где  $U(x)$  – функция ожидаемой полезности Неймана-Моргенштерна.

Очевидно, что функция полезности рационального инвестора, предпочитающего большие суммы дохода меньшим, должна быть возрастающей ( $U'(x) > 0$ ). В то же время для несклонного к риску инвестора должно выполняться  $U''(x) < 0$ , что эквивалентно условию строгой вогнутости функции полезности  $U$ .

#### Модифицированная задача Марковица

Примером учета неприятия риска при оптимизации портфеля является следующая задача, разработанная в 1983 году К. Каллбергом (Kallberg) и В. Зьемба (Ziemba) на основе задачи Марковица:

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i - \frac{R_A}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \rightarrow \max ; \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 ; \tag{32}$$

$$x_i \geq 0 . \tag{33}$$

В описанной задаче  $R_A$  – коэффициент неприятия риска Эрроу-Пратта. Эффективную границу Марковица в данной задаче можно получить, варьируя значения коэффициента  $R_A$ . Практическая реализация данного метода показала, что:

- $R_A \geq 6$  характеризует почти абсолютное неприятие риска инвестором;
- $2 \leq R_A \leq 4$  иллюстрирует среднее неприятие риска;
- $R_A \leq 2$  порождает рискованные портфели.

На практике моделирование соотношения риск – доходность портфеля часто осуществляется с использо-

ванием параметра  $\lambda$ ,  $\lambda \in [0;1]$ . Целевая функция в этом случае выглядит следующим образом:

$$\lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} - (1-\lambda) \sum_{i=1}^n x_i \mu_i \rightarrow \min . \tag{34}$$

Эквивалентность рассматриваемых задач достигается при условии

$$\frac{R_A}{2} = \frac{\lambda}{1-\lambda} . \tag{35}$$

Ту же эффективную границу, что и в задаче Марковица, можно получить, изменяя значение параметра  $\lambda$ , причем при  $\lambda = 0$  целевая функция максимизирует доходность, а при  $\lambda = 1$  – минимизирует дисперсию.

Необходимо отметить, что рассмотренная выше задача имеет скорее теоретическую ценность и, кроме того, не может применяться на российском фондовом рынке без предварительных масштабных эмпирических исследований, направленных на оценку свойств получаемых портфелей при различных значениях коэффициента  $R_A$ .

#### Учет неприятия риска инвестором с использованием VaR-подхода

В настоящем исследовании предлагается рассматривать задачу оптимизации портфеля как стратегическую игру. Несмотря на то, что количество стратегий инвестора, как и число состояний среды, может быть бесконечно велико, использование методологии **VaR** позволяет с высокой долей вероятности оценить наихудшую ( $\hat{r}_p = \mu_p - z_\alpha \sigma_p$ ) и наилучшую ( $r'_p = \mu_p + z_\alpha \sigma_p$ ) возможную доходность портфеля в зависимости от его структуры.

В связи с тем, что на практике инвестор оценивает математическое ожидание и стандартное отклонение доходности портфеля по выборке, то есть без учета вероятностей наступления различных состояний окружающей среды, оценка максимально возможного убытка и наибольшей доходности портфеля в условиях полной неопределенности может производиться описанным выше способом. Следовательно, матрицу выигрышей в условиях полной неопределенности можно представить следующим образом (см. табл. 2).

Таблица 2

МАТРИЦА ВЫИГРЫШЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ VAR-ПОДХОДА

Исходы стратегии	Наихудший	...	Промежуточный	...	Наилучший
$X_1$	$\hat{r}_1 = \mu_1 - z_\alpha \sigma_1$	...	$\hat{r}_1 < r_{1j} < r'_1$	...	$r'_1 = \mu_1 + z_\alpha \sigma_1$
$X_2$	$\hat{r}_2 = \mu_2 - z_\alpha \sigma_2$	...	$\hat{r}_2 < r_{2j} < r'_2$	...	$r'_2 = \mu_2 + z_\alpha \sigma_2$
...	...	...	...	...	...
$X_i$	$\hat{r}_i = \mu_i - z_\alpha \sigma_i$	...	$\hat{r}_i < r_{ij} < r'_i$	...	$r'_i = \mu_i + z_\alpha \sigma_i$
...	...	...	...	...	...
$X_m$	$\hat{r}_m = \mu_m - z_\alpha \sigma_m$	...	$\hat{r}_m < r_{mj} < r'_m$	...	$r'_m = \mu_m + z_\alpha \sigma_m$

Применение критериев максимин и максимакс состоит из двух этапов. Сначала определяются максимумы или минимумы по каждой возможной стратегии (то есть по строкам), а затем ищется максимальное значение в полученном столбце. В данном случае ЛПР известны столбец наихудших и столбец наилучших доходностей, поэтому ему остается только выбрать максимумы из

двух столбцов. Критерий оптимизма-пессимизма Гурвица представляет собой линейную комбинацию данных критериев. В результате реализации описанных выше критериев получим три возможных вида целевой функции для задачи оптимизации портфеля:

1. Максимальный критерий:

$$z_{\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}} + \sum_{i=1}^n x_i \mu_i \rightarrow \max . \quad (36)$$

2. Максимальный критерий Вальда:

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i - z_{\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}} \rightarrow \max . \quad (37)$$

3. Критерий оптимизма-пессимизма Гурвица:

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i - (2k-1) z_{\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}} \rightarrow \max , \quad (38)$$

где  $k$  – коэффициент оптимизма-пессимизма Гурвица. Задача с целевой функцией (36) не имеет решения, а задача с целевой функцией (37) аналогична минимизации  $VaR$  портфеля. Поэтому особый интерес вызывает задача с целевой функцией (38).

В настоящей работе предлагается интерпретировать коэффициент оптимизма-пессимизма Гурвица как показатель склонности инвестора к риску. Действительно, чем больше значение коэффициента  $k$ , тем более пессимистичные прогнозы делает инвестор относительно будущей доходности, и, следовательно, тем сильнее его неприятие риска. При  $k=1$  инвестор склонен к риску, при  $k=0$  абсолютно не приемлет риск. Если  $k=0.5$ , то инвестор нейтрален к риску. Значения  $k \in (0.5; 1)$  характеризуют степень неприятия риска инвестором.

Практические расчеты, основные результаты которых приведены далее, показывают, что при  $k < 0.5$  задача с целевой функцией (38) не имеет решения. В терминах оптимизации портфеля это означает, что с помощью  $VaR$ -подхода невозможно получить спекулятивные портфели. Однако предложенный подход позволяет построить инвестиционные портфели для инвесторов с разной степенью неприятия риска. В отличие от традиционного подхода к оценке готовности инвестора рисковать, основанного на аппарате теории полезности, в данной работе предлагается задавать коэффициент неприятия риска субъективно, исходя из предпочтений инвестора. Такой способ задания коэффициента пессимизма  $k$  используется и в теории принятия решений. Безусловно, его нельзя назвать математически точным. Но, с точки зрения автора, он не уступает существующим методам, поскольку функция полезности и кривые безразличия инвестора строятся также на основе субъективных предположений. Вместе с тем, предлагаемый метод значительно упрощает процедуру вычисления оптимального портфеля по сравнению с рассмотренной выше модифицированной задачей Марковица.

В результате получим оригинальную задачу оптимизации портфеля:

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i - (2k-1) z_{\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}} \rightarrow \max ; \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 ; \quad (40)$$

$$x_i \geq 0 . \quad (41)$$

## 5. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР НА ОСНОВЕ РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ РОССИЙСКОГО ФОНДОВОГО РЫНКА

В рассматриваемом примере гипотетический инвестор хочет сделать вложение в портфель ценных бумаг, состоящий из акций российских компаний, сроком на один месяц. В начале месяца инвестор приобретает ценные бумаги в процентном соотношении, повторяющем структуру оптимального портфеля. В конце месяца инвестор закрывает все открытые ранее позиции и оценивает результаты инвестирования.

Расчеты проводились на основе данных за период 01.01.1999-01.03.2007. Предполагалось, что инвестор вкладывает средства на период 01.03.2007-31.03.2007. В расчетах использовались месячные доходности ценных бумаг, рассчитанные как натуральный логарифм отношения цены в конце периода к цене в начале.

В настоящей статье рассматривается оптимизация инвестиционного портфеля, состоящего из шести акций (см. табл. 3).

Таблица 3

### СВОЙСТВА АКТИВОВ, ВЫБРАННЫХ ДЛЯ ВКЛЮЧЕНИЯ В ПОРТФЕЛЬ

Состав портфеля	Тип акции	Торговая система	Отрасль
URSI	АО	PTC	Связь
TATN	АО	PTC	Нефтегазодобыча
RTKM	АО	PTC	Связь
LKOH	АО	PTC	Нефтегазодобыча
EESR	АО	PTC	Энергетика
SBER	АО	PTC	Финансовые услуги

В первом столбце представлены коды, используемые в листинге PTC: URSI – ОАО «Уралсвязьинформ», TATN – ОАО «Татнефть», RTKM – ОАО «Ростелеком», LKOH соответствует НК «Лукойл», EESR – PAO «ЕЭС России», SBER – ОАО «Сбербанк России». Обозначим доли акций в портфеле соответственно  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  и  $x_6$ .

Данные акции были выбраны для практических расчетов по ряду причин:

- все они относятся к числу, так называемых, голубых фишек (наиболее ликвидных акций) на российском фондовом рынке;
- большинство аналитиков рекомендуют вкладывать средства в акции именно этих отраслей;
- в расчетах используются данные за последние восемь лет и существует лишь весьма ограниченное количество акций, информация по которым за этот период носит регулярный характер.

Расчет основных характеристик распределений проводился с использованием эконометрического пакета EViews. Результаты расчетов отражены в табл. 4 и на рис. 6.

Таблица 4

### КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА

	URSI	TATN	RTKM	LKOH	EESR	SBER
URSI	1	0.531415	0.626141	0.529129	0.30802	0.5162
TATN	0.531415	1	0.584766	0.646843	0.428424	0.470309
RTKM	0.626141	0.584766	1	0.523555	0.503591	0.65761
LKOH	0.529129	0.646843	0.523555	1	0.454833	0.593632
EESR	0.30802	0.428424	0.503591	0.454833	1	0.450027
SBER	0.5162	0.470309	0.65761	0.593632	0.450027	1



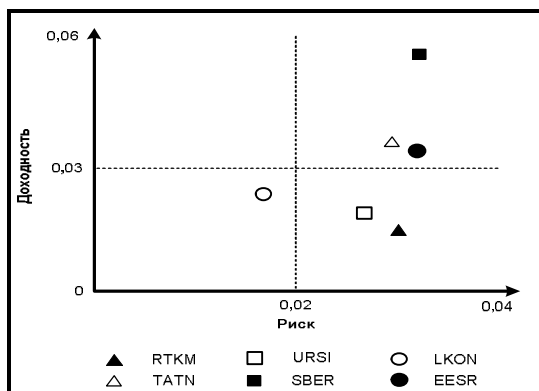


Рис. 6. Активы в координатах «доходность – риск»

Как видно на рис. 6, наибольшую доходность, наряду с наибольшим риском, демонстрируют акции SBER. Также в группу высокодоходных и высокорисковых активов входят TATN и EESR. Наиболее вероятно, что доля этих активов будет высока в портфеле относительно склонного к риску инвестора, причем акция TATN более предпочтительна, чем EESR, так как ее доходность выше при меньшем уровне риска. В связи с тем, что уровень риска акций URSI и RTKM также высок (причем URSI доминирует RTKM), а доходность ниже, чем у рассмотренной выше группы, их доля в портфеле должна быть меньше. Наименьшую доходность при наименьшем риске имеют акции LKON, что делает их привлекательными для несклонного к риску инвестора.

В табл. 5 представлены результаты расчетов по задачам Марковица (без ограничения на размер требуемой доходности), VaR- и ES-оптимизации при уровнях значимости 1% и 5%. Решение задач проводилось с использованием пакета Matlab R12.

Таблица 5

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПО РАЗЛИЧНЫМ ОПТИМИЗАЦИОННЫМ ЗАДАЧАМ

Доли в портфеле	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$\mu_p$	$\sigma_p^2$
$P_\sigma$	21%	2%	3%	51%	21%	3%	1.46%	0.02764
$P_{VaR(0.05)}$	16%	6%	0%	41%	20%	17%	1.50%	0.032767
$P_{VaR(0.01)}$	17%	5%	0%	44%	20%	13%	1.48%	0.031428
$P_{ES(0.05)}$	17%	6%	0%	43%	20%	14%	1.49%	0.031878
$P_{ES(0.01)}$	18%	5%	0%	45%	20%	12%	1.48%	0.031047

В последних двух столбцах показаны значения дисперсии и ожидаемой доходности для портфелей. Как и следовало ожидать в соответствии с рассмотренными выше свойствами эффективных границ, наименьшую дисперсию и наименьшую ожидаемую доходность имеет портфель, построенный в соответствии с задачей Марковица. Портфели, построенные с использованием ES, более рискованные, но при этом они более консервативные (т.е. менее рискованные), чем VaR-портфели. Аналогично, VaR и ES-портфели более консервативны при уровне значимости 1%, чем при 5%. Таким образом, сделанные выше теоретические выводы относительно характера формируемых портфелей на данном примере соответствуют действительности.

Рассмотрим теперь оптимальные портфели в разрезе отдельных ценных бумаг. По табл. 5 видно, что все

рассматриваемые портфели имеют почти одинаковую структуру. Для наглядности результаты расчетов представлены также на рис. 7.

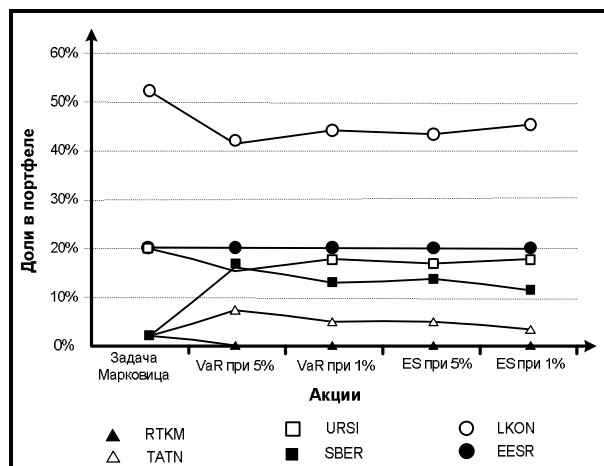


Рис. 7. Доли акций в портфеле по видам целевой функции

Как следует из табл. 5 и рис. 7, доля наименее рискованной ценной бумаги LKON во всех портфелях значительно выше, чем доли всех остальных активов. Причем, как и следовало ожидать, наибольшее значение она принимает в портфеле с минимальной дисперсией. Кроме того, на рис. 7 видно, что доля акции в портфелях, минимизирующих ES при уровнях значимости 1% и 5%, ниже, чем в соответствующих портфелях для VaR, что связано с более консервативным характером ES. Интересно, что динамика акции URSI со сходным уровнем доходности, но большим риском, почти аналогична. В тоже время динамика рискованной акции SBER прямо противоположна, что подтверждает теоретические предпосылки рассматриваемых моделей. Следует отметить, что на данном примере наглядно виден один из основных недостатков портфельной теории, а именно предположение о несклонности инвестора к риску. На практике большинство инвесторов согласились бы увеличить долю в портфеле ценной бумаги SBER, несмотря на высокую волатильность ее доходности, поскольку потенциальный доход по ней весьма высок. Как будет видно из приведенных далее расчетов по новой задаче (39)-(41), этого недостатка можно избежать посредством включения в целевую функцию фактора отношения к риску.

Вопреки высказанным выше предположениям относительно предпочтительности ценных бумаг, доля TATN ниже, чем доля EESR. Объяснить это можно тем, что корреляция между акциями LKON и TATN весьма высока (см. таблицу 4), поскольку они принадлежат к одной отрасли, в то время как LKON предпочтительнее для несклонного к риску инвестора. Доля в портфеле акции RTKM, имеющей наименьшую доходность и относительно высокую корреляцию с URSI и SBER, либо близка к нулю, либо мало отличается от нуля. Единственный портфель, куда вошла эта акция, – наиболее консервативный портфель задачи Марковица.

Рассмотрим теперь результаты расчетов по задаче (39)-(41) для различных значений коэффициента пессимизма k при уровне значимости 0.05.

Таблица 6

СТРУКТУРА ПОРТФЕЛЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ОТНОШЕНИЯ ИНВЕСТОРА К РИСКУ

Кэф-фициент	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$k = 0.6$	0%	14%	0%	0%	9%	76%
$k = 0.7$	5%	13%	0%	25%	18%	39%
$k = 0.75$	9%	11%	0%	31%	19%	31%
$k = 0.9$	11%	9%	0%	35%	19%	26%

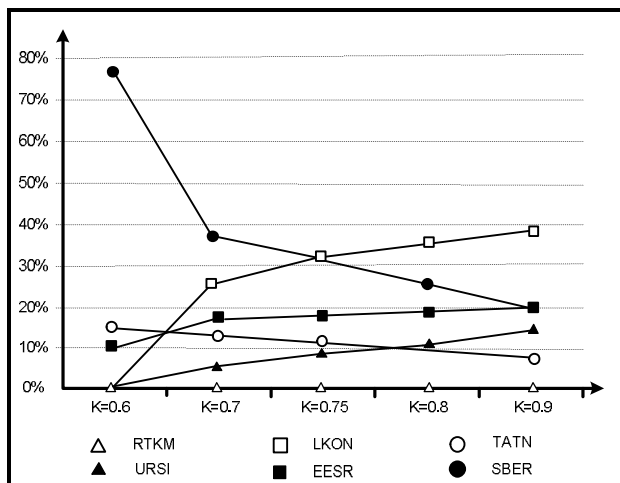


Рис. 8. Доли акций в портфеле в зависимости от уровня неприятия риска

С ростом неприятия риска инвестором структура формируемого им портфеля становится все более похожа на портфель  $P_{VaR(0.05)}$ , рассмотренный в предыдущем разделе. Как видно на рис. 8, по мере снижения склонности к риску увеличиваются доли низкорискованных ценных бумаг (LKON, EESR, URSI), и снижаются доли высокодоходных бумаг SBER и TATN. Как было сказано выше, рассматриваемая модель обеспечивает более гибкий подход к выбору инвестиционного процесса, причем вид целевой функции и метод включения в портфель отношения инвестора к риску не ведет к усложнению вычислительной процедуры.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был проведен сравнительный анализ задач оптимизации инвестиционного портфеля с использованием различных методов оценки рыночного риска и построена альтернативная оптимизационная задача, учитывающая коэффициент неприятия риска в целевой функции. Необходимость построения новой оптимизационной задачи связана с узостью традиционной трактовки портфельного инвестирования, состоящей в минимизации риска. На практике большинство инвесторов согласно на некоторый уровень риска с целью получить дополнительную доходность. Для учета отношения инвестора к риску в данной работе предлагается использовать модификацию VaR-подхода, построенную на основе теории принятия решений. В работе приведен числовой пример на основе реальных данных российского фондового рынка, показавший, что применение построенной автором модели на практике дает логичные и интерпретируемые результаты.

### Литература

1. Аронович А.Б., Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения М.: Инфра-М, 2003.
2. Крушвиц Л. Инвестиционные расчеты, С-Пб.: Питер, 2001.
3. Уотшем Т.Д., Паррамоу К. Количественные методы в финансах, М.: ЮНИТИ, 1999.
4. Шарп У., Александер Г.Д., Бейли Д.В. «Инвестиции», М., ИНФРА-М, 1997.
5. Лобанов А.: «Проблема метода при расчете value at risk»(2000), Рынок ценных бумаг, 21(180).
6. Новоселов А.А. (2002): «Использование кривых безразличия при принятии решений в условиях риска», Институт вычислительного моделирования СО РАН.
7. Новоселов А.А. (2002): «О неприятии риска и норме защещения риска доходностью», Институт вычислительного моделирования СО РАН.
8. Acerbi, C., C. Nardio, C. Sirtori (2001): «Expected shortfall as a tool for financial risk Management», Working paper, Abax-bank, Milano.

9. Acerbi, C., D. Tasche (2001): «Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk», Working Paper, Abax-bank, Milano and Zentrum Mathematik, TU Munchen.
10. Alexander, G., A. Baptista (2000): «Economic implications of using mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis,» Working Paper, University of Minnesota.
11. Artzner P., F. Delbaen, J.-M. Eber, D. Heath (1999): «Coherent measures of risk», Mathematical Finance, 9(3).
12. De Giorgi, E. (2002): «A note on portfolio selections under various risk measures», Working Paper, Insitute for Empirical Research in Economics, University of Zurich.
13. Gaivoronski, A., G. Pflug (2000): «Value-at-Risk in portfolio optimization: properties and computational approach», Working Paper, NTNU and University of Vienna.
14. Hürlimann, W., (2002): «An alternative approach to portfolio selection», in Proceedings of the 12th international AFIR Colloquium, Cancun, Mexico.
15. J.P. Morgan/Reuters. RiskMetrics – Technical document. Fourth Edition, NY, 1996.
16. Kallberg J.G., Ziemba W.T. (1983): «Comparison of Alternative Utility Functions in Portfolio selection Problems», Management Science, Vol. 29, #11, November 1983.
17. Lemus Rodriguez, G. (1999): «Portfolio optimization with quantile-based risk measures», Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
18. Linsmeier T.J., N.D. Pearson (1996): «Risk measurement: An introduction to Value at Risk», Working Paper, University of Illinois.
19. Lopez. J.A. (1998): «Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates» FRBNY Economic policy review.
20. Markowitz, H. (1952): «Portfolio Selection», Journal of Finance, 7.
21. Mitra G., T. Kyriakis, C. Lucas, M. Pirbhai (2003): «A review of portfolio planning: models and systems», Preprint, Brunel University.
22. Pedersen C.S., Satchell S.E. (1999): «Choosing the Right Measure of Risk: A survey», «The Current State of Economic Science», edited by S.B. Dahiya, June 1999, Spellbound Publications Ltd.
23. RiskMetrics Group. Risk Management. A practical guide. First Edition, NY, 1999.
24. Rockafellar R.T., S. Uryasev, M. Zabarankin (2002): «Deviation Measures in Risk Analysis and Optimization», Research Report, University of Florida, 2002.
25. Rockafellar R.T., S. Uryasev, M. Zabarankin (2003): «Portfolio analyses with general deviation measures», Working Paper, University of Florida.
26. Young M. (1996): «A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution», Working Paper # 9612-24, University of Michigan Business School.

Артемьева Елена Сергеевна

### РЕЦЕНЗИЯ

Тема статьи Артемьевой Е.С. является актуальной как с научной, так и с прикладной точек зрения, так как учет отношения инвестора к риску в оптимизационных моделях представляет интерес как для исследователей портфельных теорий, так и для профессионалов управления финансами и частных инвесторов.

В результате проведенного исследования Артемьевой Е.С. удалось предложить некоторые модификации исходных данных, позволяющие улучшить результаты оценки. Кроме того, в работе предложен собственный подход к формированию инвестиционного портфеля. Согласно этому подходу, показатель, оценивающий готовность инвестора рисковать, введен в целевую функцию оптимизационной задачи. В качестве показателя оценки неприятия риска инвестором используется коэффициент пессимизма Гурвица. При этом задача оптимизации инвестиционного портфеля рассматривается как стратегическая игра с «природой», что позволяет использовать аппарат теории принятия решений в условиях неопределенности при выборе инвестиционной стратегии на фондовом рынке.

Полученные результаты являются новыми и представляют научный интерес.

Вышесказанное говорит о том, что статья Артемьевой Е.С. может быть рекомендована к публикации в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Чахоян В.А., к.э.н., доцент кафедры ММАЭ экономического фак-та МГУ им. М.В. Ломоносова

## 8.2. APPLICATION OF INVESTOR'S RISK AVERSION RATIO TO PORTFOLIO OPTIMIZATION PROBLEM

E.S. Artemeva is a Post-graduate Student of Mathematical  
Methods of Economic Analysis Department of Economic  
Faculty of the Moscow State University n.a.

M.V. Lomonosov

In accordance with the Modern Portfolio Theory pioneered in 1950s by Harry Markowitz securities investment decision is based on two factors: risk and revenue. There is in fact one more factor to be taken into consideration, i.e. investor's risk aversion. Risk aversion measures are traditionally calculated on the basis of indifferent curves and thus are rather complicated in practical implementation. Risk aversion measure can be inserted in optimization problems indirectly, for example by choosing the relevant confidence probability when risk is calculated by VaR though such models do not allow to account for correspondence between investor's risk aversion and his optimal portfolio structure. The goal of this article was to analyze existing methods of portfolio optimization and construct a problem that would include some direct risk aversion measure as a coefficient of criterion function. The optimization problem that is introduced in this work considers portfolio choice process as a strategic game with nature and is based on some results of VaR approach to calculating potential losses and decision making under uncertainty theory.