

### 3.9. МНОГОПЕРИОДНАЯ МОДЕЛЬ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЦЕПОЧКИ С ЗАТРАТАМИ НА ПРОДВИЖЕНИЕ ТОВАРА

Челноков А.Ю., аспирант экономического факультета

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В работе рассматривается многопериодная модель вертикальной структуры с затратами на продвижение товара. Используется предположка о различных временных промежутках, на которых участники вертикальной цепочки решают задачу максимизации прибыли. Найдены достаточные для получения прибыли интегрированного предприятия вертикальные ограничения. Рассмотрено два варианта моделирования затрат на продвижение товара. Показано, что основные выводы в обоих случаях сохраняются. Теоретические результаты проиллюстрированы на примере.

#### ВВЕДЕНИЕ

Вертикальные связи между фирмами, т.е. связи между производителями промежуточного товара и его потребителями исследуются в ряде отечественных и зарубежных работ. Из последних достижений в данной области можно отметить ряд работ Плезинского А.С. по механизму равновесных трансфертных цен при вертикальном взаимодействии производственных экономических агентов 2001 г. и Косачева Ю.В. о динамической модели финансово-промышленной корпоративной структуры 2000-2004 г. В обоих случаях рассматриваются многопериодные модели вертикальных структур. Основным параметром, определяющим поведение системы в динамике, в обоих случаях являются инвестиции в совершенствование технологического процесса. Фактически, речь идет о кредитовании одним из участников вертикальной цепочки другого, для достижения более эффективной технологии производства.

В предлагаемой модели акцент в анализе переносится с производства на распространение товара. Статические модели с расходами на продвижение товара рассматривались в ряде зарубежных работ, в частности у Мэтьюсона и Винтера<sup>1</sup>. В динамической модели ряд выводов, справедливых для однопериодного случая, теряет силу.

Получить выводы для модели в общем виде стало возможным благодаря введению ряда упрощающих анализ предположений. В частности, предположение о различных временных горизонтах планирования участников вертикальной цепочки существенно упростило анализ. С другой стороны, это предположение оказывается весьма реалистичным, о чем говорится далее. Если в горизонтальных отношениях между фирмами логично предполагать симметрию в параметрах деятельности фирм, то в вертикальных отношениях наоборот. Одна из фирм очень часто наделяется большей переговорной властью, меньшей чувствительностью к риску и т.п. И это вполне обосновано, поскольку участники вертикальной цепочки работают на различных рынках и занимаются различными видами деятельности.

При анализе вертикальных ограничений традиционно ставится вопрос о достаточности различных инструментов вертикального контроля или их комбинаций. Инструментами вертикального контроля могут быть любые контрактные ограничения помимо оптовой цены. Достаточные ограничения позволяют производителю получить максимально возможную прибыль для данной вертикальной цепочки. Т.е. прибыль, которую могло бы получить объединение фирм, действуя как одна фирма. В предлагаемой модели целью исследования также является нахождение таких достаточных ограничений.

Другим важным направлением исследования вертикальных структур является анализ влияния вертикальных ограничений

<sup>1</sup> Mathewson G.F., Winter R.A. An Economic Theory of Vertical Integration // The Rand Journal, 1984. Vol. 15, P. 27-38.

на общественное благосостояние. Этот вопрос в работе подробно не рассматривается и может стать предметом отдельного исследования<sup>2</sup>.

### 1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МОДЕЛИ

Рассматривается рынок одного товара. Существует производитель (или оптовый торговец), который является монополистом на рынке промежуточной продукции. Он устанавливает оптовые цены и несет фиксированные издержки на производство единицы товара, неизменные во времени. Производитель максимизирует дисконтированную (с постоянной ставкой дисконта) сумму своих прибылей на промежутке времени в  $n$  периодов.

Существует розничный торговец – монополист на рынке конечной продукции, который устанавливает розничную цену (далее просто цену) на продукт, а также осуществляет затраты на продвижение товара. Розничный торговец несет фиксированные издержки, не изменяющиеся во времени, по перепродаже единицы товара. Цель розничного торговца – максимизация прибыли от продажи данного товара в каждом отдельном периоде. Розничный торговец покупает данный товар при отрицательной прибыли от его реализации.

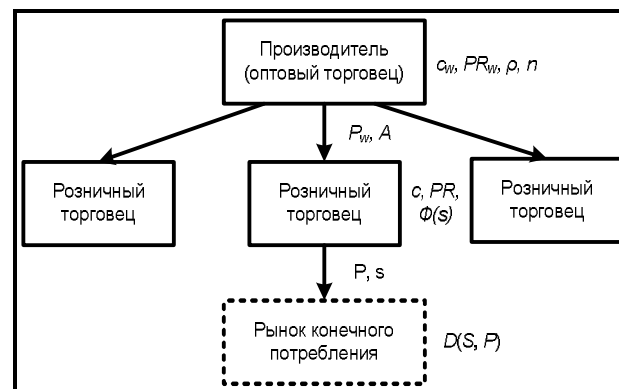


Рис. 1. Рыночная структура

Расходы на продвижение товара оказывают влияние на функцию спроса на данный товар. Их воздействие зависит (в данной модели) только от объема средств, расходуемых на продвижение товара. С ростом расходов воздействие в расчете на рубль расходуемых средств уменьшается.

Схожие предпосылки использовались рядом зарубежных исследователей (например, в работе Мэтьюсона и Винтера 1984 г., где, однако, рассматривалась однопериодная модель).

Расходы на продвижение товара оказывают воздействие на спрос не только в текущем, но и в последующих периодах. Это влияние уменьшается со временем. Таким образом, предполагается, что у розничного торговца создается некоторая репутация.

Продвижение товара осуществляется розничным торговцем, поскольку связанные с ним услуги удобнее оказывать «на месте». Отметим, что производитель тоже

<sup>2</sup> Вопрос влияния вертикальных ограничений на общественное благосостояние важен для законодательного регулирования таких отношений. Из последних обзорных работ по данному вопросу можно отметить James C. Cooper, Luke M. Froeb, Dan O'Brien, Michael G. Vita Vertical Antitrust Policy as a Problem of Inference // International Journal of Industrial Organization, 2005. Vol. 23, P. 639– 664.

может осуществлять затраты на рекламу и продвижение своего продукта, но в данном случае мы можем не рассматривать эти затраты при анализе модели. Дело в том, что основной вопрос, который решается при моделировании, – это нахождение достаточных вертикальных ограничений со стороны производителя. Эти вертикальные ограничения нужны для того, чтобы розничный торговец придерживался оптимальных, с точки зрения производителя, параметров торговли. В этом случае, действия самого производителя будут заведомо оптимальными с его собственной точки зрения.

Поскольку затраты на продвижение товара являются одним из ключевых факторов модели, предлагается два варианта учета данных затрат. В первом варианте принята предпосылка, что эти затраты относятся на единицу продукции (примерами таких затрат могут быть затраты на бесплатную доставку, затраты на замену бракованной продукции при предоставлении гарантии). Во втором варианте затраты на продвижение товара не зависят от объема продаж (здесь можно назвать затраты на обучение торгового персонала, что позволяет предоставлять адекватную предпродажную информацию о качествах товара, затраты на создание рекламных буклетов, каталогов). Таким образом, рассматриваются две различные модели, выводы из анализа которых, оказываются сходными.

Затраты на производство и продажу товара моделируются упрощенно. Мы считаем, что производитель работает не с единственным, а с множеством розничных торговцев (но другие торговцы действуют на других розничных рынках). Поэтому будем для простоты считать, что его затраты можно в данном случае считать постоянными на единицу продукции. Но максимизацию прибыли производитель производит не в одном периоде. Мы считаем, что он предполагает существовать достаточно долго, и заинтересован в сохранении данного рынка.

Также несложный вид имеет функция издержек розничного торговца, который несет фиксированные издержки по продаже единицы данного товара. Самое большое упрощение связано со структурой рынка, когда предполагается монополия как на стадии производства, так и на стадии продажи товара. Развитие модели для других рыночных структур было бы, несомненно, интересно. Однако, скорее всего, пришлось бы рассматривать конкретные функции спроса, а не весьма общий их класс.

Функция спроса предполагается убывающей по цене, непрерывной и дифференцируемой по цене и расходам на продвижение товара, возрастающей по расходам на продвижение товара как в текущем, так и в предшествующих периодах.

Принята предпосылка о том, что субъекты взаимодействия максимизируют свою прибыль на различных временных промежутках. Почему может возникнуть такая ситуация? Дело в том, что производитель, выходя на рынок с некоторым товаром, обычно предполагает продавать его достаточно долгое время (возможно, при этом модернизируя его). Переход на выпуск другого товара для производителя довольно дорог. В то же время, розничный торговец, с одной стороны, не имеет информации о намерениях производителя, а с другой, может легко переключиться на продажу какого-либо другого товара.

Предположение о различных временных горизонтах планирования участников вертикальной цепочки не

усложняет, а наоборот значительно упрощает анализ. С другой стороны, это, вероятно, и более реалистичное предположение.

В предлагаемой модели производитель максимизирует прибыль за  $n$  периодов. Чем может определяться это число периодов  $n$ ? В модели  $n$  – экзогенный параметр. Считается, что большинство товаров проходят несколько стадий жизненного цикла. Первоначально спрос на них со временем растет, а затем – снижается. Товар устаревает. Функция спроса в модели имеет вид  $D(S_t, P_t)$ . Т.е. не зависит от времени, а зависит лишь от текущей цены и усилий по продвижению товара. Однако все выводы сохраняются, и в анализе модели ничего не меняется, если мы заменим  $D(S_t, P_t)$  на  $D(S_t, P_t, t)$ . Такая запись будет более громоздкой и не добавит содержательности модели, зато будет учтено влияние времени («возраста товара») на спрос. Тогда  $n$  будет определять период, после которого получение прибыли от производства и продажи товара уже невозможно.

Одна из основных проблем в модели – согласование краткосрочных интересов розничного торговца и долгосрочных – производителя. В силу того, что розничный торговец рассматривает лишь текущий период, он склонен недоинвестировать в расходы на продвижение товара.

Другая проблема, традиционная для вертикальных структур – это проблема двойной надбавки<sup>3</sup>. В данной модели перед нами цепочка монополий. Следовательно, в случае некооперативного решения, логично ожидать снижение суммарной прибыли структуры в силу последовательных надбавок на каждой стадии.

Более того, при сформулированных предпосылках обнаруживается еще один источник неэффективности. Дело в том, что в результате усилий по продвижению товара увеличивается объем продаж не только розничного, но и оптового торговца, что для розничного торговца, осуществляющего эти усилия, совершенно безразлично. Это приводит к еще большему недоинвестированию средств на продвижение товара. Такое искажение сродни двойной надбавке.

Сформулируем три направления использования инструментов вертикального контроля со стороны производителя:

- установление оптимальной розничной цены;
- установление оптимального объема средств, расходующих на продвижение товара;
- сбор ренты, полученной на стадии розничной торговли.

Рассматриваются следующие виды контрактных ограничений:

- поддержание перепродажной цены – это положение в контракте, предписывающее розничному торговцу выбор окончательной цены;
- количественное фиксирование устанавливает количество  $Q$ , которое обязан приобрести розничный торговец;
- плата за франшизу (в некоторых источниках транскрибируется «франчайзи», а, возможно, самый удачный вариант – двухставочный тариф).

Розничный торговец платит:

$$T(Q) = A + p_w Q,$$

где  $T$  – сумма платежа;

$A$  – плата за франшизу (фиксированная величина);

$p_w$  – оптовая цена единицы продукции;

$Q$  – количество продукции.

<sup>3</sup> Этот эффект был показан (на примере) еще в статье Spengler J.J. Vertical Integration and Antitrust Policy // The Journal of Political Economy, 1950. Vol. 58, P. 347-352.

Кроме перечисленных ограничений в работах по вертикальным структурам традиционно рассматриваются еще два: исключительные территории и трансфертные цены. При монополии на оптовом и розничном рынках эти ограничения не имеют смысла.

При принятых предположениях в качестве инструмента вертикального контроля может выступать непосредственно фиксирование расходов на продвижение товара. Однако такое ограничение вряд ли возможно в реальности из-за сложности контроля выполнения. Рассмотрение столь малого числа среди возможных вертикальных ограничений как раз и связано с тем, что проконтролировать их выполнение оказывается возможным. Контрактные ограничения могли бы быть сколь угодно сложными и касаться любых параметров, но затраты на контроль за их выполнением превысили бы выигрыш от их применения. Даже в случае простых ограничений возникают сложности со сбором информации<sup>4</sup>.

## 2. ОБОЗНАЧЕНИЯ В МОДЕЛИ

$t$  – период времени;

$s_t$  – объем усилий по продвижению товара в период  $t$ ;

$S_t$  – переменная, отражающая суммарное влияние расходов на продвижение товара осуществленных во всех периодах с 1-го по период  $t$ ;

$P_t$  – розничная цена единицы продукции в период  $t$ ;

$P_{w,t}$  – оптовая цена единицы продукции в период  $t$ ;

$\Phi(s_t)$  – затраты на продвижение товара (при объеме усилий  $s_t$ ) в расчете на единицу продукции (1 вариант модели);

$J(s_t)$  – затраты на продвижение товара (при объеме усилий  $s_t$ ) на весь объем продукции (2 вариант модели);

$D(S_t, P_t)$  – функция спроса на конечную продукцию (так же и на промежуточную продукцию, поскольку в модели нет запасов) в период времени  $t$ ;

$c$  – издержки по перепродаже единицы товара (постоянные во времени);

$c_w$  – издержки на производство единицы товара (постоянные во времени);

$A_t$  – фиксированный платеж (плата за франшизу);

$\rho$  – ставка дисконта (постоянная во времени) для производителя;

$n$  – число периодов, в течении которых производитель собирает выпускать данный товар;

$PR_t$  – прибыль розничного торговца в период  $t$ ;

$PR_{w,t}$  – прибыль оптового торговца в период  $t$ ;

$P_t^*$  – оптимальная, с точки зрения вертикальной структуры, розничная цена;

$Q_t^*$  – оптимальный, с точки зрения вертикальной структуры, объем продаж.

## 3. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Репутация торговца, которая зависит от его усилий по продвижению товара, начиная с первого периода.

$$S_t = \psi(s_1, s_2, \dots, s_t), \quad t = 1, \dots, n.$$

Первый вариант моделирования затрат на продвижение продукции. Задача розничного торговца:

$$D(S_t, P_t)[P_t - P_{w,t} - c - \Phi(s_t)] - A_t \rightarrow \max_{P_t, s_t}, \quad t = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Задача вертикально-интегрированной структуры:

$$\sum_{t=1}^n (1+\rho)^{-t} D(S_t, P_t)[P_t - c_w - c - \Phi(s_t)] \rightarrow \max_{P_t, s_t}. \quad (2)$$

При ограничениях на производные:

$$D'_{P_t}(S_t, P_t) < 0; \quad D'_{s_t}(S_t, P_t) > 0;$$

$$\Phi'(s_t) > 0; \quad D'_{s_t}(S_t, P_t) > 0, \quad \text{при } i > t.$$

Второй вариант моделирования затрат на продвижение продукции. Задача розничного торговца:

$$D(S_t, P_t)[P_t - P_{w,t} - c] - J(s_t) - A_t \rightarrow \max_{P_t, s_t}, \quad t = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Задача вертикально-интегрированной структуры:

$$\sum_{t=1}^n (1+\rho)^{-t} [D(S_t, P_t)(P_t - c_w - c) - J(s_t)] \rightarrow \max_{P_t, s_t}. \quad (4)$$

При ограничениях на производные:

$$D'_{P_t}(S_t, P_t) < 0; \quad D'_{s_t}(S_t, P_t) > 0; \quad J'(s_t) > 0;$$

$$D'_{s_t}(S_t, P_t) > 0, \quad \text{при } i > t.$$

Если плата за франшизу не используется (в любом из вариантов модели), то  $A_t = 0$  (в этом случае получим модель без ограничений).

## 4. АНАЛИЗ МОДЕЛИ

### 4.1. Первый вариант

Рассмотрим условия первого порядка для задачи розничного торговца (1):

$$D'_{s_t}(S_t, P_t)[P_t - P_{w,t} - \Phi(s_t) - c] - D(S_t, P_t)\Phi'(s_t) = 0; \quad (5)$$

$$D'_{P_t}(S_t, P_t)[P_t - P_{w,t} - \Phi(s_t) - c] + D(S_t, P_t) = 0. \quad (6)$$

Выразив  $D(S_t, P_t)$  из (6) и подставив в (5), получим:

$$\Phi'(s_t) = -\frac{D'_{s_t}(S_t, P_t)}{D'_{P_t}(S_t, P_t)}. \quad (7)$$

Выражение (7) имеет ясный экономический смысл – предельный рубль, вложенный в расходы на продвижение товара (в расчете на единицу продукции), должен давать такой же прирост спроса, как снижение цены на рубль.

Условия на вторые частные производные имеют вид:

$$D''_{s_t}(S_t, P_t)[P_t - P_{w,t} - \Phi(s_t) - c] - 2D'_{s_t}(S_t, P_t)\Phi'(s_t) - D(S_t, P_t)\Phi''(s_t) < 0;$$

$$D''_{P_t}(S_t, P_t)[P_t - P_{w,t} - \Phi(s_t) - c] + 2D'_{P_t}(S_t, P_t) < 0.$$

Гарантировать выполнение этих условий можно при следующих ограничениях на функции спроса и затрат на продвижение товара:

$D''_{s_t}(S_t, P_t) \leq 0$  – вполне логичное допущение (мы не можем «раздуть» спрос все быстрее с ростом затрат на продвижение продукции);

$D''_{P_t}(S_t, P_t) \leq 0$  – обычно функция спроса характеризуется  $D''(P) \geq 0$ , но даже в классической модели монополии (без расходов на продвижение товара) при этом нельзя гарантировать наличие максимума у функции прибыли (линейная по цене функция спроса нас устраивает);

$\Phi''(s_t) \geq 0$  – нас устраивает в частности  $\Phi(s_t) = s_t$ ,

т.е. измерение объема усилий по продвижению товара непосредственно в денежном выражении.

Мы исходим из того, что

<sup>4</sup> То, что розничные торговцы имеют стимул к предоставлению искаженной информации о рынке и своих затратах, рассматривается в частности в статье Gal-Or E. Vertical Restraints with Incomplete Information // The Journal of Industrial Economics, 1991. Vol. 39, P. 503-516.

$$[P_t - P_{w,t} - \Phi(s_t) - c] \geq 0,$$

иначе прибыль розничного торговца окажется отрицательной, если плата за франшизу неотрицательна. Как станет ясно из дальнейшего в случае, если плата за франшизу входит в достаточный набор инструментов, она будет положительной. Кроме того, при:

$$[P_t - P_{w,t} - \Phi(s_t) - c] < 0$$

не могут выполняться условия первого порядка.

Мы сформулировали ограничения на вторые частные производные функций спроса и затрат на продвижение товара, которые гарантируют выполнение условий второго порядка для задачи розничного торговца. Естественно, условия на вторые производные могут выполняться и для ряда функций, не удовлетворяющих приведенным ограничениям.

Теперь рассмотрим условия первого порядка для задачи вертикального объединения (2):

$$\begin{aligned} \sum_{i=t}^n D'_{s_t}(S_i, P_i) [P_i - c_w - c - \Phi(s_i)] (1 + \rho)^{-i} - \\ - D(S_t, P_t) \Phi'(s_t) (1 + \rho)^{-t} = 0, \quad t = 1, \dots, n; \\ D'_{P_t}(S_t, P_t) [P_t - c_w - c - \Phi(s_t)] (1 + \rho)^{-t} + \\ + D(S_t, P_t) (1 + \rho)^{-t} = 0, \quad t = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Выполним аналогичные преобразования. Сократим первое равенство на  $(1 + \rho)^{-t}$  и выведем из под знака суммы слагаемое для  $i = t$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=t+1}^n D'_{s_t}(S_i, P_i) [P_i - c_w - c - \Phi(s_i)] (1 + \rho)^{-i} + \\ + D'_{s_t}(S_t, P_t) [P_t - c_w - c - \Phi(s_t)] - \\ - D(S_t, P_t) \Phi'(s_t) = 0, \quad t = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Из второго равенства выразим  $[P_t - c_w - c - \Phi(s_t)]$  и подставим в полученное выражение:

$$\begin{aligned} \sum_{i=t+1}^n D'_{s_t}(S_i, P_i) [P_i - c_w - c - \Phi(s_i)] (1 + \rho)^{-i} - \\ - \frac{D'_{s_t}(S_t, P_t) D(S_t, P_t)}{D'_{P_t}(S_t, P_t)} - D(S_t, P_t) \Phi'(s_t) = 0, \quad t = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \Phi'(s_t) = - \frac{D'_{s_t}(S_t, P_t)}{D'_{P_t}(S_t, P_t)} + \\ + \frac{\sum_{i=t+1}^n D'_{s_t}(S_i, P_i) [P_i - c_w - c - \Phi(s_i)] (1 + \rho)^{-i}}{D(S_t, P_t)}, \quad (8) \end{aligned}$$

для  $t = 1, \dots, n - 1$ .

И здесь, как и в выражении (7) хорошо прослеживается экономический смысл полученного выражения. Второе слагаемое отражает прирост дисконтированной прибыли для оставшихся после текущего периода, деленный на текущий объем продаж, т.е. будущая прибыль на единицу продаж данного периода.

Для последнего периода выражение (8) совпадает с выражением (7). Это известный результат<sup>5</sup>. Он состоит в том, что при принятых предпосылках в однопериодной модели достаточными инструментами являются плата за франшизу или количественное фиксирование, а поддержание перепродажной цены не является

достаточным инструментом. Действительно, назначив  $P_w = c_w$  и присвоив всю ренту с помощью  $A_t$ , можно сделать розничного торговца претендентом на остаток и заставить решать задачу вертикально интегрированного объединения.

Однако, в динамике ситуация меняется. В остальные периоды выражение (8) определяет иное (по сравнению с выражением (7)) соотношение между затратами на продвижение товара и розничной ценой, поскольку при принятых предпосылках второе слагаемое в первой части обращается в нуль с нулевой вероятностью.

Отсюда следует вывод, что плата за франшизу не является достаточным инструментом в рассматриваемой модели. Она не влияет на выражение (7), поскольку фиксированный платеж не оказывает влияния на решение задачи максимизации прибыли.

Также не является достаточным инструментом и поддержание перепродажной цены. Покажем это. Если  $P_t$  фиксировано, то максимизация в задаче (1) производится только по объему средств, расходуемых на продвижение товара, т.е. остается одно (5) условие первого порядка.

$$D'_{s_t}(S_t, P_t^*) [P_t^* - P_{w,t} - \Phi(s_t) - c] - D(S_t, P_t^*) \Phi'(s_t) = 0.$$

Это уравнение отражает некоторую зависимость  $s_t$  от  $P_{w,t}$  (ведь  $P_t$  зафиксировано). Таким образом, мы можем установить оптимальную розничную цену и оптимальный объем усилий по продвижению товара, но не остается инструментов для сбора полученной розничным торговцем ренты (мы не используем плату за франшизу  $A_t = 0$ ). Если же производитель не может собрать полученную ренту, то он не будет заинтересован в установлении таких ограничений.

Проверим, что часть ренты в этом случае присваивается розничным торговцем. Если рента розничного торговца равна нулю, то:

$$[P_t - P_{w,t} - c - \Phi(s_t)] = 0$$

(мы предполагаем, что продается ненулевой объем товаров). Следовательно, и первое слагаемое в выражении (5) равно нулю. Но тогда и второе слагаемое равно нулю, а при ненулевом объеме продаж это невозможно. Вывод: предположение о нулевой прибыли розничного торговца ведет к противоречию. Что и требовалось.

Количественное фиксирование также не является достаточным инструментом в данном случае. Это будет показано в дальнейшем, когда мы выясним, что даже в сочетании с платой за франшизу количественного фиксирования оказывается недостаточно.

Поскольку ни один рассматриваемый нами инструмент вертикального контроля не оказался достаточным в отдельности, рассмотрим различные комбинации из двух инструментов.

Если в качестве инструментов вертикального контроля используются количественное фиксирование и плата за франшизу, задача розничного торговца принимает вид:

$$Q_t^* [P_t(s_t) - P_{w,t} - c - \Phi(s_t)] - A_t \rightarrow \max_{s_t}, \quad t = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где  $P_t(s_t)$  получено из тождества:

$$D(S_t, P_t) - Q_t^* = 0, \quad (10)$$

которое определяет неявную функцию  $P_t(s_t)$ , поскольку по условию производные  $D(S_t, P_t)$  всюду существуют и не равны нулю. Накопленное влияние усилий по

<sup>5</sup> Похожая задача рассматривается в Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности, с. 285-286.

продвижению товара на спрос, выражаемое через  $S_t$ , в части усилий предыдущих периодов также представляет собой константу для данного периода.

Тогда условие первого порядка для полученной задачи (9) имеет вид:

$$Q_t^* [P_t'(s_t) - \Phi'(s_t)] = 0, \quad t=1, \dots, n. \quad (11)$$

Поскольку оптимальный объем продаж не равен нулю, получаем:

$$P_t'(s_t) = \Phi'(s_t). \quad (12)$$

Левая часть уравнения представляет собой производную неявной функции (9). Поскольку производная константы  $Q_t^*$  равна нулю, можем выразить ее как:

$$P_t'(s_t) = - \frac{D'_{s_t}(S_t, P_t)}{D'_{P_t}(S_t, P_t)}. \quad (13)$$

Подставив (13) в (12) получим:

$$\Phi'(s_t) = - \frac{D'_{s_t}(S_t, P_t)}{D'_{P_t}(S_t, P_t)},$$

что в точности эквивалентно (7). Отметим, что выражение (12) выполняется только при фиксированном объеме продаж.

Выражение (7) определяет, как мы видели ранее, неэффективное, с точки зрения производителя, соотношение розничной цены и уровня усилий по продвижению товара (за исключением последнего периода). Следовательно, плата за франшизу в сочетании с количественным фиксированием не дают достаточного инструмента в данной модели. Данный результат является нетривиальным, ведь в однопериодной модели каждый из перечисленных инструментов в отдельности являлся достаточным. В многопериодной модели наоборот – эта комбинация из двух вертикальных ограничений единственная не является достаточной.

Попытаемся понять причины такого свойства модели. Дело в том, что количественное фиксирование при данной оптовой цене определяет фиксированную сумму, которую розничный торговец выплачивает при приобретении товара. В этом смысле количественное фиксирование очень близко к плате за франшизу (такой же фиксированный платеж). В то же время, количественное фиксирование позволяет установить оптимальный объем продаж (чего не позволяет плата за франшизу). Однако при любом уровне продаж дополнительный рубль, вложенный в продвижение товара, оценивается розничным торговцем ниже, чем вертикальным объединением (поскольку не учитываются дополнительные выгоды, получаемые в последующих периодах). Поэтому при любом уровне продаж розничный торговец склонен недоинвестировать в продвижение товара. Фиксированная плата за франшизу не позволяет скорректировать соотношение между розничной ценой и расходами на продвижение. Важно еще и то, что оптовая цена никак не влияет в этом случае на выбор розничного торговца. Функцию сбора ренты выполняет плата за франшизу. Оптовая цена вообще может не использоваться (быть равной нулю).

Если в качестве инструментов вертикального контроля используются плата за франшизу и поддержание перепродажной цены, то оптимальное поведение розничного торговца определяется уравнением (5), в котором  $P_t$  фиксировано.

$$D'_{s_t}(S_t, P_t^*) [P_t^* - P_{w,t} - \Phi(s_t) - c] - D(S_t, P_t^*) \Phi'(s_t) = 0.$$

Это уравнение отражает некоторую зависимость  $s_t$  от  $P_{w,t}$ . Хотя при произвольных функциях спроса и расходов на продвижение товара нельзя гарантировать, что изменяя  $P_{w,t}$ , можно достичь любого желаемого уровня  $s_t$ , логично ожидать, что в большом количестве случаев это окажется возможным. Следовательно, вопрос о достаточности данного набора инструментов остается открытым, но скорее следует говорить об их достаточности. Плата за франшизу остается для сбора полученной розничным торговцем ренты.

Если в качестве инструментов вертикального контроля используются количественное фиксирование и поддержание перепродажной цены, то из уравнения спроса непосредственно получается оптимальный уровень расходов на продвижение товара. С помощью оптовой цены тогда можно собрать ренту розничного торговца. Следовательно, такая комбинация вертикальных ограничений всегда достаточна.

#### 4.2. Второй вариант

Аналогично выполним анализ второго варианта модели. Условия первого порядка для задачи розничного торговца (3):

$$D'_{s_t}(S_t, P_t) [P_t - P_{w,t} - c] - J'(s_t) = 0; \quad (14)$$

$$D(S_t, P_t) + D'_{P_t}(S_t, P_t) [P_t - P_{w,t} - c] = 0. \quad (15)$$

После преобразований:

$$D(S_t, P_t) + \frac{D'_{P_t}(S_t, P_t)}{D'_{s_t}(S_t, P_t)} J'(s_t) = 0. \quad (16)$$

Условия второго порядка:

$$D''_{s_t}(S_t, P_t) [P_t - P_{w,t} - c] - J''(s_t) < 0;$$

$$D''_{P_t}(S_t, P_t) [P_t - P_{w,t} - c] + 2D'_{P_t}(S_t, P_t) < 0.$$

Ограничения на функции спроса и затрат на продвижение товара, при которых гарантированно выполнение данных условий, аналогично варианту 1:

$$D''_{s_t}(S_t, P_t) \leq 0;$$

$$D''_{P_t}(S_t, P_t) \leq 0;$$

$$J''_{s_t}(s_t) \geq 0.$$

Условия первого порядка для задачи вертикального объединения (4):

$$\sum_{i=t}^n D'_{s_t}(S_i, P_i) [P_i - c_w - c] (1+\rho)^{-i} - J'(s_t) (1+\rho)^{-t} = 0, \quad t=1, \dots, n; \quad (17)$$

$$D'_{P_t}(S_t, P_t) [P_t - c_w - c] (1+\rho)^{-t} + D(S_t, P_t) (1+\rho)^{-t} = 0, \quad t=1, \dots, n. \quad (18)$$

Здесь преобразования несколько сложнее. Из (18):

$$[P_t - c_w - c] = - \frac{D(S_t, P_t)}{D'_{P_t}(S_t, P_t)}, \quad t=1, \dots, n. \quad (19)$$

В (17) сократим на  $(1+\rho)^{-t}$  и выведем из под знака суммы первое слагаемое:

$$\sum_{i=t+1}^n D'_{s_t}(S_i, P_i) [P_i - c_w - c] (1+\rho)^{t-i} + D'_{s_t}(S_t, P_t) [P_t - c_w - c] - J'(s_t) = 0, \quad t=1, \dots, n-1.$$

В получившееся выражение подставим (19) и разделим на  $-\frac{D'_{s_t}(S_t, P_t)}{D'_{P_t}(S_t, P_t)}$ .

После преобразований получим:

$$D(S_t, P_t) + \frac{D'_{P_t}(S_t, P_t)}{D'_{s_t}(S_t, P_t)} J'(s_t) - \frac{\sum_{i=t+1}^n D'_{s_t}(S_i, P_i) [P_i - c_w - c] (1+\rho)^{t-i} D'_{P_t}(S_i, P_i)}{D'_{s_t}(S_t, P_t)} = 0,$$

$$t = 1, \dots, n-1.$$

Это выражение совпадает с (16) только если последнее слагаемое равно нулю, к чему нет никаких предположений. Также как и в первом варианте модели, в последнем периоде последнее слагаемое отсутствует.

Отсюда, как и в первом варианте модели, следует вывод, что плата за франшизу не является достаточным инструментом в рассматриваемой модели.

Также не является достаточным инструментом и поддержание перепродажной цены. Покажем это. Если  $P_t$  фиксировано, то максимизация в задаче (3) производится только по объему средств, расходуемых на продвижение товара, т.е. остается одно (14) условие первого порядка.

$$D'_{s_t}(S_t, P_t) [P_t - P_{w,t} - c] - J'(s_t) = 0.$$

Это уравнение отражает некоторую зависимость  $s_t$  от  $P_{w,t}$ . Как и ранее, не остается инструментов для сбора полученной розничным торговцем ренты (мы не используем плату за франшизу  $A_t = 0$ ). Если же производитель не может собрать полученную ренту, то он не будет заинтересован в установлении таких ограничений.

Количественное фиксирование также не является достаточным инструментом в данном случае даже в сочетании с платой за франшизу.

Если в качестве инструментов вертикального контроля используются количественное фиксирование и плата за франшизу, задача розничного торговца принимает вид:

$$Q_t^* [P_t(s_t) - P_{w,t} - c] - J(s_t) - A_t \rightarrow \max_{s_t}, t = 1, \dots, n, \quad (20)$$

где  $P_t(s_t)$  получено из тождества (в точности как и в варианте 1):

$$D(S_t, P_t) - Q_t^* = 0, \quad (21)$$

которое определяет неявную функцию  $P_t(s_t)$ , поскольку по условию производные  $D(S_t, P_t)$  всюду существуют и не равны нулю.

Тогда условие первого порядка для полученной задачи (20) имеет вид:

$$Q_t^* P_t'(s_t) - J'(s_t) = 0, t = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Берем производную неявной функции (21):

$$P_t'(s_t) = -\frac{D'_{s_t}(S_t, P_t)}{D'_{P_t}(S_t, P_t)}. \quad (23)$$

Подставим (23) и (21) в (22) и разделим на:

$$-\frac{D'_{s_t}(S_t, P_t)}{D'_{P_t}(S_t, P_t)}.$$

Получим:

$$D(S_t, P_t) + \frac{D'_{P_t}(S_t, P_t)}{D'_{s_t}(S_t, P_t)} J'(s_t) = 0,$$

что в точности эквивалентно (16).

Выражение (16) определяет, как мы видели ранее, неэффективное с точки зрения производителя соотношение розничной цены и уровня усилий по продвижению товара (за исключением последнего периода). Следовательно, плата за франшизу в сочетании с количественным фиксированием не дают достаточного инструмента и в данном варианте модели.

Остается рассмотреть в качестве инструментов вертикального контроля плату за франшизу и поддержание перепродажной цены. Тогда оптимальное поведение розничного торговца определяется уравнением (14), в котором  $P_t$  фиксировано.

$$D'_{s_t}(S_t, P_t) [P_t - P_{w,t} - c] - J'(s_t) = 0. \quad (24)$$

Выражение в квадратных скобках – константа с точки зрения решения задачи розничного торговца (обозначим  $K$ ). Можно с большой долей уверенности говорить о том, что, установив некоторую оптовую цену, можно достичь требуемого уровня усилий по продвижению товара, если наложить ограничения на функции спроса и затрат на продвижение продукции, аналогичные тем, которые рассматривались при анализе условий второго порядка, а именно (одно из неравенств должно быть строгим):

$$D''_{s_t}(S_t, P_t) \leq 0; J''(s_t) \geq 0.$$

Перепишем (24) в виде:

$$D'_{s_t}(S_t, P_t) K = J'(s_t). \quad (25)$$

Пусть задано некоторое  $K$ . Если при этом  $s_t < s_t^*$  (уровень усилий по продвижению товара меньше оптимального), то увеличим  $K$ , понизив оптовую цену. Чтобы равенство (25) выполнялось,  $s_t$  должно повыситься (согласно условиям на вторые производные). Таким образом можно достичь требуемого уровня усилий по продвижению товара.

Плата за франшизу остается для сбора полученной розничным торговцем ренты. Вывод: плата за франшизу в сочетании с поддержанием перепродажной цены является достаточным инструментом.

Если в качестве инструментов вертикального контроля используются количественное фиксирование и поддержание перепродажной цены, то (аналогично первому варианту модели) из уравнения спроса непосредственно получается оптимальный уровень расходов на продвижение товара. С помощью оптовой цены тогда можно собрать ренту розничного торговца. Следовательно, такая комбинация вертикальных ограничений всегда достаточна.

## 5. ПРИМЕР С ЗАДАНЫМИ ФУНКЦИЯМИ СПРОСА И ЗАТРАТ НА ПРОДВИЖЕНИЕ ТОВАРА

Рассмотрим, как работает сформулированная модель на конкретных функциях спроса и затрат на продвижение товара.

Пусть:

$$S_t = \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2} + \sqrt{s_t}, t = 1, \dots, n. \quad (26)$$

$$J(s_t) = s_t. \quad (27)$$

Таким образом, пример относится ко второму варианту модели.

Функция спроса:

$$D(S_t, P_t) = a - bP_t + S_t, \quad (28)$$

где  $a$  и  $b$  – константы, не изменяющиеся во времени. Влияние расходов на продвижение товара на спрос моделируется чрезвычайно упрощенно. Тем не менее, выбранные функции спроса и расходов на продвижение товара отвечают ограничениям на производные, сформулированным в части анализа второго варианта модели.

С точки зрения возможной эконометрической оценки влияние расходов на продвижение товара на спрос моделируется неудачно. Нет ни одного параметра, который в данном случае мог бы быть оценен. Но задача исследования в этом случае состоит не в оценке реального влияния таких затрат, а в проверке выводов, полученных в предыдущем анализе.

Задача розничного торговца:

$$D(S_t, P_t) [P_t - P_{w,t} - c] - s_t - A_t \rightarrow \max_{P_t, s_t}, \quad t = 1, \dots, n. \quad (29)$$

Задача вертикально-интегрированной структуры:

$$\sum_{t=1}^n (1 + \rho)^{-t} [D(S_t, P_t) (P_t - c_w - c) - s_t] \rightarrow \max_{P_t, s_t}. \quad (30)$$

Если плата за франшизу не используется, то  $A_t = 0$ .

Подставим  $S_t$  (26) в функцию спроса (27):

$$D(P_t, s_{t-1}, s_t) = a + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2} + \sqrt{s_t} - bP_t. \quad (31)$$

Для розничного торговца предыдущие затраты на продвижение товара не являются переменной величиной в данный период. Максимизация происходит лишь по текущим затратам. Задачу розничного торговца (29) можно переписать как:

$$(P_t - P_{w,t} - c) \left( a + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2} + \sqrt{s_t} - bP_t \right) - s_t \rightarrow \max_{P_t, s_t}. \quad (32)$$

Для решения задачи возьмем производные по каждому параметру и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{s_t}} (P_t - P_{w,t} - c) - 1 = 0; \\ a + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2} + \sqrt{s_t} - 2bP_t + b(P_{w,t} + c) = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Легко убедиться, что вторые частные производные здесь отрицательны. Определитель матрицы Гессе меньше нуля при  $b > 1/4$ .

Решив систему (33) относительно  $P_t$  и  $\sqrt{s_t}$  (в дальнейшем удобно рассматривать именно этот показатель, а не  $s_t$ ), получим:

$$P_t = \frac{2a + \sqrt{s_{t-1}} + (2b-1)(P_{w,t} + c)}{4b-1}; \quad (34)$$

$$\sqrt{s_t} = \frac{a - b(P_{w,t} + c)}{4b-1} + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2(4b-1)}. \quad (35)$$

Полученные выражения отнюдь не свидетельствуют о том, что, установив оптимальную оптовую цену, можно достичь оптимальных (с точки зрения вертикальной структуры) значений розничной цены и затрат на продвижение товара. Наоборот, при выборе оптовой цены мы можем гарантированно добиться оптимального значения лишь одного из этих параметров. При этом нет никакой гарантии, что второй показатель также примет оптимальное значение. Кроме того, если оптовая цена используется для регулирования параметров деятель-

ности розничного торговца, она уже не может быть использована для сбора полученной торговцем ренты.

Розничные цены, затраты на продвижение товара текущего и предыдущего периода будут связаны между собой выражением (при любых оптовых ценах):

$$a + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2} + (1-2b)\sqrt{s_t} - bP_t = 0. \quad (36)$$

Условия первого порядка для задачи вертикально-интегрированной структуры (30) имеют вид:

$$\begin{cases} a - 2bP_t + bc + bc_w + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2} + \sqrt{s_t} = 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{s_t}} (P_t - c - c_w) - 1 + (1 + \rho)^{-1} (P_{t+1} - c - c_w) \frac{1}{4\sqrt{s_t}} = 0, \\ t = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (37)$$

Выразив  $c + c_w$  из первого уравнения и подставив во второе, получим после преобразований:

$$\begin{aligned} a + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2} + (1-2b)\sqrt{s_t} - bP_t + \frac{1}{2}(1 + \rho)^{-1} * \\ * (bP_{t+1} - 2bP_t + a + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2} + \sqrt{s_t}) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Без последнего слагаемого (38) совпадает с (36). Однако последнее слагаемое не обращается в нуль (за исключением последнего периода). Можно сделать вывод, что при любой оптовой цене соотношение розничной цены и затрат на продвижение продукции будет неоптимальным с точки зрения вертикального объединения, если не используются вертикальные ограничения.

Следовательно, и платы за франшизу не будет достаточно в данном случае, поскольку она не окажет влияние на выражение (36). Недостаточным оказывается и поддержание перепродажной цены. Покажем это. Подставим в функцию прибыли розничного торговца (32) полученные значения параметров из (34) и (35). После преобразований получим:

$$\frac{4b[a - b(P_{w,t} + c) + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2}]^2}{(4b-1)^2} - \frac{[a - b(P_{w,t} + c) + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2}]^2}{(4b-1)^2}.$$

Из условия на определитель матрицы Гессе имеем  $b > 1/4$  (см. комментарий к системе (33)). Следовательно, розничный торговец собирает часть ренты при любой оптовой цене.

Количественное фиксирование недостаточно даже в сочетании с платой за франшизу. Для доказательства запишем задачу розничного торговца в виде:

$$Q_t^* [P_t(s_t) - P_{w,t} - c] - s_t - A_t \rightarrow \max_{s_t}, \quad (39)$$

где  $P_t(s_t)$  получено из уравнения спроса:

$$P_t(s_t) = \frac{a + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2} + \sqrt{s_t} - Q_t^*}{b}. \quad (40)$$

Условие первого порядка для задачи (39) выглядит:

$$\frac{Q_t^*}{2b\sqrt{s_t}} - 1 = 0. \quad (41)$$

Подставив в полученное выражение

$$Q_t^* = a + \frac{\sqrt{s_{t-1}}}{2} + \sqrt{s_t} - bP_t$$

и умножив на  $2b\sqrt{s_t}$ , получим в точности выражение (36), которое, как показано ранее, определяет неэффективное, с точки зрения вертикального объединения, соотношение затрат на продвижение продукции и розничной цены.

Достаточным инструментом оказывается сочетание поддержания перепродажной цены и платы за франшизу. Если розничная цена фиксирована, то остается только первое уравнение системы (33):

$$\frac{1}{2\sqrt{s_t}}(P_t^* - P_{w,t} - c) - 1 = 0. \quad (42)$$

Откуда:

$$\sqrt{s_t} = \frac{P_t^* - P_{w,t} - c}{2}.$$

С помощью оптовой цены можно установить требуемый уровень расходов на продвижение товара. Плату за франшизу можно установить так, чтобы собрать всю прибыль розничного торговца.

Если зафиксировать цену и количество, то из функции спроса можно получить  $s_t$ , а с помощью оптовой цены собрать всю ренту. Следовательно, сочетание количественного фиксирования и поддержания перепродажной цены является достаточным инструментом.

Для конкретных функций мы подтвердили выводы предыдущего анализа относительно достаточности различных инструментов вертикального контроля.

Рассмотрим некоторые числовые решения по примеру, рассчитанные в Mathcad.

Сначала рассмотрим простейший случай с двумя периодами. Начальные условия:

$$a = 100 \quad c_w = 15$$

$$b = 2 \quad \rho = 0.1$$

$$c = 10 \quad t = 1, 2.$$

Оптимальные значения переменных деятельности вертикального объединения (эти значения достигаются использованием достаточных вертикальных ограничений) представлены в табл. 1.

Таблица 1

#### ОСНОВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ

Период (t)	$P_t$	$Q_t$	$s_t$	$PR_{w,t} + PR_t$
t = 1	40.318	30.636	127.051	342.277
t = 2	40.896	31.792	63.17	442.192

Затраты (они же и усилия при сформулированных предпосылках) на продвижение товара во втором периоде меньше чем в первом (что логично, ведь они не влияют на последующий спрос).

Для сравнения рассмотрим переменные вертикальной цепочки без использования вертикальных ограничений (см. табл. 2).

Таблица 2

#### ОСНОВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЦЕПОЧКИ

Период (t)	$P_{w,t}$	$P_t$	$Q_t$	$s_t$	$PR_t$	$PR_{w,t}$	$PR_{w,t} + PR_t$
t = 1	27.079	44.463	14.767	13.628	95.399	178.369	273.768
t = 2	27.961	45.368	14.813	13.714	96	191.999	287.999

Прежде всего, отметим, что суммарная прибыль участников в данном случае значительно ниже. Если бы производитель и мог присвоить всю прибыль розничного торговца, ее величина уступала бы максимально воз-

можной. Это, в частности, подтверждает, что одна лишь плата за франшизу не будет достаточным инструментом.

Затраты на продвижение товара распределяются равномерно по двум периодам и составляют значительно меньшую величину. Цены выше (что объясняется двойной надбавкой), объемы продаж ниже.

Если по этим данным оценить влияние вертикальных ограничений на общественное благосостояние, то можно говорить скорее о положительном влиянии ограничений. Найдем числовые значения для оптимальных вертикальных ограничений.

Если используется сочетание количественного фиксирования и поддержания перепродажной цены, то оптимальные значения по розничной цене и объему продаж берем непосредственно из табл. 1. Оптовую цену найдем, приравняв прибыль розничного торговца к нулю.

$$P_{w,t} = P_t^* - c - \frac{s_t^*}{Q_t}.$$

Результаты отражены в таблице.

Таблица 3

#### КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ФИКСИРОВАНИЕ И ПОДДЕРЖАНИЕ ПЕРЕПРОДАЖНОЙ ЦЕНЫ

Период (t)	$P_t$	$Q_t$	$P_{w,t}$
t = 1	40.318	30.636	26.171
t = 2	40.896	31.792	28.909

Если используется сочетание поддержания перепродажной цены и платы за франшизу, то необходимое значение оптовой цены можно получить из (42):

$$P_{w,t} = P_t^* - c - 2\sqrt{s_t^*}.$$

А плату за франшизу получим, приравняв прибыль розничного торговца к нулю.

$$A_t = Q_t^*(P_t^* - P_{w,t} - c) - s_t^*.$$

Таблица 4

#### ПЛАТА ЗА ФРАНШИЗУ И ПОДДЕРЖАНИЕ ПЕРЕПРОДАЖНОЙ ЦЕНЫ

Период (t)	$P_t$	$A_t$	$P_{w,t}$
t = 1	40.318	563.588	7.775
t = 2	40.896	442.192	15

Полученные значения весьма интересны. Мы видим, что во втором периоде всю прибыль получает розничный торговец, а затем ее присваивает производитель через плату за франшизу (напомним, что в последнем периоде плата за франшизу одна является достаточным инструментом). А в первом периоде производитель назначает оптовую цену ниже своих издержек, что должно побудить розничного торговца увеличить объем продаж до оптимального.

Рассмотрим также ситуацию, когда используется плата за франшизу в сочетании с количественным фиксированием. Ранее было показано, что такая комбинация ограничений не является достаточной. Поставим вопрос так: какие параметры будут выбраны розничным торговцем при фиксировании количества на оптимальном уровне, и какая совокупная прибыль при этом будет получена?

Возможна (но не будет рассматриваться) еще и другая постановка вопроса в данном случае: какими должны быть ограничения для получения производителем максимальной дисконтированной прибыли только при помощи этих инструментов? Это разные вопросы, поскольку розничный торговец не выбирает опти-



мальные (с точки зрения вертикального объединения) цену и расходы на продвижение товара при оптимальном объеме продаж. Понятно, что, если параметры не оптимальны, то совокупная прибыль снижается.

Мы лишь покажем, что во всех периодах кроме последнего данная комбинация ограничений ведет к тому, что розничный торговец выбирает неоптимальные параметры деятельности.

Из (41) получим:

$$\sqrt{s_t} = \frac{Q_t^*}{2b} \tag{43}$$

Подставим (43) в (40):

$$P_t = \frac{a + \frac{\sqrt{s_{t-1}} + Q_t^*}{2b} - Q_t^*}{b} \tag{44}$$

Чтобы собрать всю ренту  $A_t$  должно обращать (39) в нуль. С учетом (43) и (44):

$$A_t = Q_t^* \left( \frac{a + \frac{\sqrt{s_{t-1}} + Q_t^*}{2b} - Q_t^*}{b} - P_{w,t} - c \right) - \frac{(Q_t^*)^2}{4b^2}$$

Назначим оптовую цену на уровне затрат производителя на единицу  $c$  (можно назначить любую оптовую цену, она повлияет только на размер фиксированного платежа  $A_t$ ). Тогда  $A_t$  будет отражать всю прибыль вертикальной цепочки.

Таблица 5

**ПЛАТА ЗА ФРАНШИЗУ И КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ФИКСИРОВАНИЕ**

Период (t)	$Q_t$	$A_t$	$P_{w,t}$	$P_t$	$s_t$
t = 1	30.636	456.637	15	41.82	58.66
t = 2	31.792	442.192	15	40.896	63.17

То, что размер платы за франшизу в первом периоде превышает прибыль вертикального объединения, не говорит об эффективности инструмента. Таблицу 5 следует читать так: если бы в первом периоде был установлен оптимальный объем торговли и вся прибыль розничного торговца собрана с помощью платы за франшизу, то установились бы соответствующие значения переменных, где розничная цена и расходы на продвижение товара не оптимальны. Большая прибыль в первом периоде приведет к потерям во втором. Вторая строка подтверждает, что если бы ограничения применялись **только** во втором (последнем) периоде, то они были бы достаточными.

Рассмотрим случай с пятью периодами. Основные параметры оставим на прежнем уровне. Начальные условия:

- a = 100            c<sub>w</sub> = 15
- b = 2              ρ = 0.1
- c = 10             t = 1, 2, 3, 4, 5.

Таблица 6

**ОСНОВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕРТИКАЛЬНОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ**

Период (t)	$P_t$	$Q_t$	$s_t$	$PR_{w,t} + PR_t$
t = 1	40.397	30.795	134.305	339.846
t = 2	42.118	34.234	160.681	425.345
t = 3	43.117	33.338	175.139	428.846
t = 4	43.370	32.122	149.94	440.141
t = 5	41.035	32.07	64.28	449.962

Теперь снижение затрат на продвижение товара начинается уже в предпоследнем периоде.

Рассмотрим динамику переменных на графиках (см. рис. 1-4).

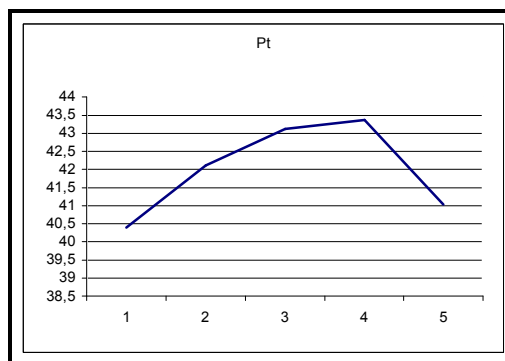


Рис. 1. Динамика розничной цены

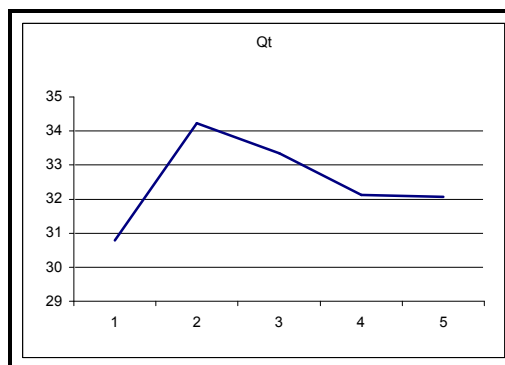


Рис. 2. Динамика количества

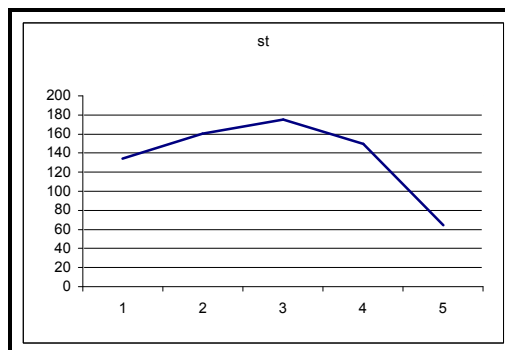


Рис. 3. Динамика расходов на продвижение товара

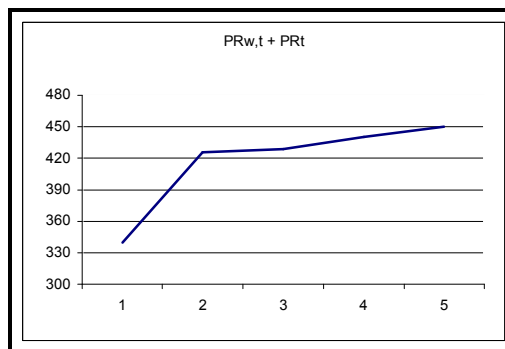


Рис. 4. Динамика совокупной прибыли

Видно, что первый и последний периоды сильно отличаются от остальных. Также посмотрим параметры данной цепочки без ограничений.

Таблица 7

### ОСНОВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЦЕПОЧКИ

Период (t)	$P_{w,t}$	$P_t$	$Q_t$	$s_t$	$PR_t$	$PR_{w,t}$	$PR_{w,t} + PR_t$
t = 1	27.065	44.456	14.783	13.658	95.608	178.355	273.963
t = 2	27.526	45.182	15.312	14.653	102.574	191.797	294.371
t = 3	27.543	45.208	15.330	14.689	102.820	192.288	295.108
t = 4	27.557	45.215	15.316	14.660	102.623	192.318	294.941
t = 5	27.978	45.395	14.833	13.752	96.263	192.508	288.771

Здесь ситуация очень похожа на результаты с двумя периодами. Также присутствует недоинвестирование в продвижение товара, более высокие цены, меньшие объемы продаж и значительно меньшая суммарная прибыль, чем в случае интегрированного решения.

Как и ранее определим оптимальные вертикальные ограничения.

Таблица 8

### КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ФИКСИРОВАНИЕ И ПОДДЕРЖАНИЕ ПЕРЕПРОДАЖНОЙ ЦЕНЫ

Период (t)	$P_t$	$Q_t$	$P_{w,t}$
t = 1	40.397	30.795	26.036
t = 2	42.118	34.234	27.442
t = 3	43.117	33.338	27.864
t = 4	43.370	32.122	28.702
t = 5	41.035	32.07	29.031

Таблица 9

### ПЛАТА ЗА ФРАНШИЗУ И ПОДДЕРЖАНИЕ ПЕРЕПРОДАЖНОЙ ЦЕНЫ

Период (t)	$P_t$	$A_t$	$P_{w,t}$
t = 1	40.397	579.462	7.219
t = 2	42.118	707.219	6.766
t = 3	43.117	707.252	6.649
t = 4	43.370	636.728	8.88
t = 5	41.035	449.962	15

Таблица 10

### ПЛАТА ЗА ФРАНШИЗУ И КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ФИКСИРОВАНИЕ

Период (t)	$Q_t$	$A_t$	$P_{w,t}$	$P_t$	$s_t$
t = 1	30.795	354.979	15	38.452	59.271
t = 2	34.234	442.299	15	40.059	73.248
t = 3	33.338	452.851	15	40.667	69.464
t = 4	32.122	457.903	15	41.263	64.489
t = 5	32.07	449.962	15	41.035	64.28

Ситуация аналогична случаю с двумя периодами.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА

Построена многопериодная модель вертикальной цепочки с учетом затрат на продвижение товара. Специфическая предпосылка, предложенная в формулировке модели, состоит в различных временных горизонтах планирования фирм участников вертикальной цепочки. Эта предпосылка позволяет облегчить решение задачи максимизации прибыли участников и получить выводы для функций общего вида.

Рассмотрены две модификации модели, в которых затраты на продвижение продукции учитываются по-разному. Оба предложенных способа моделирования встречались в работах по данной тематике (в однопериодных моделях). Выводы в обоих случаях сохраняются.

Показано, что ни один из рассматриваемых инструментов вертикального контроля в отдельности не является достаточным (за исключением последнего периода). Не является достаточной также комбинация инструментов: плата за франшизу и количественное фиксирование. Этот результат не тривиален, поскольку в однопериодном случае любой из этих инструментов в отдельности является достаточным.

Найдены достаточные инструменты вертикального контроля:

1. Плата за франшизу в сочетании с поддержанием перепродажной цены (при ограничениях на функции спроса и затрат на продвижение продукции).
2. Количественное фиксирование в сочетании с поддержанием перепродажной цены.

Теоретические результаты, полученные в общем виде, проиллюстрированы на простых примерах. Для данных примеров найдены численные значения переменных деятельности вертикальной цепочки и оптимальные значения ограничений.

## Литература

1. Косачев Ю.В. Экономико-математические модели эффективности финансово-промышленных структур. – М.: Логос, 2004.
2. Плещинский А.С. Механизм равновесных трансфертных цен при вертикальном взаимодействии производственных экономических агентов // Экономика и математические методы. 2001. Т. 37, номер 2, с. 70-91.
3. Плещинский А.С. Динамическая эффективность механизма равновесных трансфертных цен // Экономика и математические методы. 2001. Т. 37, номер 4, с. 12-32.
4. Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности. СПб.: Экономическая школа, 2000.
5. Хэй Д., Моррис Д. Теория организации промышленности. СПб.: Экономическая школа, 1999.
6. Gal-Or E. Vertical Restraints with Incomplete Information // The Journal of Industrial Economics, 1991. Vol. 39, P. 503-516.
7. James C. Cooper, Luke M. Froeb, Dan O'Brien, Michael G. Vita Vertical Antitrust Policy as a Problem of Inference // International Journal of Industrial Organization, 2005. Vol. 23, P. 639-664.
8. G.F. Mathewson, R.A. Winter. Vertical Integration by Contractual Restraints in Spatial Markets // The Journal of Business, 1983. Vol. 56, P. 497-517.
9. G.F. Mathewson, R.A. Winter. An Economic Theory of Vertical Restraints // The Rand Journal, 1984. Vol. 15, P. 27-38.
10. J.J. Spengler, Vertical Integration and Antitrust Policy // The Journal of Political Economy, 1950. Vol. 58, P. 347-352.

Челноков Александр Юрьевич

## РЕЦЕНЗИЯ

Работа Челнокова А.Ю. посвящена моделированию вертикальных взаимодействий. В российской экономике вертикальные связи предприятий широко распространены, а теоретическая разработанность данной темы в отечественной экономической литературе еще недостаточна.

Предложена аналитическая модель вертикальной цепочки предприятий. В модели автору удалось отразить влияние двух специфических факторов – различных горизонтов планирования участников и репутации фирм. В предшествующих исследованиях эти факторы не рассматривались. Анализ модели произведен в общем виде. Найдены достаточные ограничения. Получены выводы для большого класса функций спроса и затрат на продвижение товара. Устойчивость результатов подтверждается при рассмотрении различных способов влияния расходов на продвижение товара, что нашло отражение в двух вариантах рассмотренной модели.

Пример с конкретными функционалами позволяет рассчитать в явном виде некоторые параметры модели, проиллюстрировать теоретические результаты. Предложенная модель имеет теоретическую значимость, и полученные результаты могут быть использованы в последующих исследованиях.

Практическая значимость полученных результатов не столь высока из-за упрощенных предположений о структуре рынка (монополия).

Рекомендую данную статью к публикации в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Черемных Ю.Н., д.э.н., профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

### **3.9. DYNAMIC MODEL OF VERTICAL STRUCTURE WITH PROMOTION COSTS**

A.Y. Chelnokov, Post-Graduate Student,  
Faculty of Economics

*Moscow state university it. M.V. Lomonosov*

The article presents a dynamic model of vertical structure with promotion costs. The analysis focuses on the case of different time horizons in profit maximization of vertical chain members. We find sufficient vertical constraints. Two approaches to model promotion costs were introduced. In both cases the key results hold. Theoretical results were illustrated by an example.