10.3. ГИПОТЕЗЫ ТЕОРИИ ОПЕРЕЖАЮЩЕГО ПОТРЕБЛЕНИЯ ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ

Колмаков И.Б., к.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры информатики факультета информатики

Российская Экономическая Академия им. Г.В. Плеханова

В статье рассматривается задача получения математической функции – распределения населения по уровню среднедушевых среднемесячных денежных расходов (СДР). С этой целью анализируются уровни доходов разнодоходных групп населения и для каждого диапазона дохода выстраиваются возможные варианты расходов. Индивидуальные решения домашних хозяйств о расходах приводят к решению дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. Совокупные решения всех домохозяйств о доходах и расходах сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода. Решениями таких уравнений в итоге являются плотности вероятности распределения населения по уровню доходов или расходов. Плотность вероятности распределения населения по уровню расходов в несимметричном варианте при значениях расхода, превышающих величину ($x > e^{\mu}$), имеет вид плотности вероятности распределения населения по уровню доходов, умноженной на поправочную функцию. Исследован вид поправочной функции и её асимптотические свойства. Впервые предложена методика расчета плотности распределения населения по уровню среднедушевых среднемесячных денежных расходов. Для одного из частных случаев решена замкнутая задача, то есть, доказана справедливость рассматриваемых решений и предлагаемой методики.

1. ОЦЕНКИ ДОХОДОВ И РАСХОДОВ ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ

Система оценок благосостояния населения в настоящее время изучена достаточно хорошо [9-17], что позволило создать методики расчета показателей благосостояния населения и практически использовать их в разработках Росстата. При построении распределения населения по уровню доходов используются две системы показателей, наблюдение которых осуществляется Росстатом России:

- данные выборочного обследования бюджетов домашних хозяйств (ВОБДХ) [19 с. 79], [21];
- данные объёма и структуры денежных доходов населения на макроуровне, получаемые в ходе построения баланса денежных доходов и расходов населения (БДРН) [19 с. 93].

Каждая из этих систем наблюдения в отдельности не дает полной информации для построения распределения генеральной совокупности – распределение всего населения по уровню среднедушевого среднемесячного денежного дохода (***СДД***). Но в совокупности показатели этих двух систем наблюдения позволяют создать такие методы и модели интеграции макроэкономических и выборочных данных, которые, в конечном счете, определяют характеристики распределения населения по уровню ***СДД*** для генеральной совокупности [10], [11].

Первичными источниками данных о дифференциации доходов населения являются данные выборочного обследования бюджетов домашних хозяйств (ВОБДХ). Дополнительно ежегодно проводятся выборочные обследования распределения работающих по размерам заработной платы. Публикуемые Росстатом России официальные данные о распределении населения по уровню денежных доходов являются результатом специальных расчетов, в основе которых лежит информация и ВОБХД, и данные баланса денежных доходов и расходов населения (БДРН). Происходит переход от структурного (постатейного) описания доходов в БДРН и дискретных данных выборочного обследования бюджетов домашних хозяйств к непрерывному математическому аналогу – распределению населения по уровню ***СДД***. Интегральное воздействие всех источников доходов населения порождает математическую функцию – логарифмически нормальное распределение населения по уровню ***СДД***.

1.1. Логарифмически нормальное распределение

Функция распределения и плотности вероятностей для этого закона имеет математическое выражение, как и для нормального распределения, с той только разницей, что вместо случайной величины ***y*** берется ее логарифм ***lny*** и параметры μ и σ исчисляются соответственно для ***lny***. Иными словами, случайная переменная имеет логарифмически нормальное распределение с параметрами μ и σ, если случайная переменная $x = \ln y$ имеет нормальное распределение с теми же параметрами μ и σ.

Таким образом

$$F(\ln y) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln y} e^{-\frac{(\ln u-\mu)^2}{2\sigma^2}} d(\ln u); \qquad (1)$$

$$f(\ln y) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что кривая плотности логарифмически нормального распределения симметрична для ***lny*** (то есть, если на оси абсцисс откладывать значения не случайной переменной ***y***, а ее натуральных или любых других логарифмов). Она симметрична также в том случае, если значения ***y*** откладывать не на арифметической, а на логарифмической шкале. Выражения функции распределения ***F(x)*** и плотности вероятностей ***f(x)*** случайной величины ***x*** (а не её натурального логарифма) для логарифмически нормального закона получим, если произведем подстановку $x = \ln y$, откуда $dx=dy/y$ или $dy = y \cdot dx$.

Тогда

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} \frac{1}{u} e^{-\frac{(\ln u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du; \qquad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (4)$$

Если же значения ***x*** откладывать на обычной арифметической шкале, то кривая плотности вероятностей логарифмически нормального распределения (4) имеет правостороннюю асимметрию, которая тем сильнее, чем больше значения параметров μ и σ. Эта кривая имеет один максимум и является положительно определенной для всех положительных значений ***x***.

Решения задач дифференциации доходов населения получаются из кривой логарифмически-нормального распределения населения по уровню ***СДД***. Из кривой логарифмически-нормального распределения (плотность вероятности распределения) населения ***f(x)*** (4) строятся еще три функции.

1. Функция $F(x)$ или интеграл (3): накопленные доли численности населения по уровню ***СДД***.

2. Кривая распределения (плотность вероятности распределения) доходов населения по уровню ***СДД*** функция – $\psi(x)$:

$$\psi(x) = x \cdot f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (5)$$

Выражение (5) дает распределение (плотность вероятности распределения) доходов населения по уровню ***СДД*** в денежном выражении (рублях). Для того, чтобы выразить распределение доходов населения по уровню ***СДД*** (функцию $\varphi(x)$) в относительных единицах, необходимо произведение $x * f(x)$ нормировать к величине среднего дохода X_c. Величина параметра нормировки X_c определяется интегралом первого момента распределения:

$$X_c = \int_0^\infty x\, f(x)dx = \int_0^\infty \psi(u)\, du. \qquad (6)$$

Функция $\varphi(x)$ определяет какие доли доходов сосредоточены в каких диапазонах доходов:

$$\varphi(x) = \frac{1}{X_c}\,\psi(x) = \frac{1}{X_c}\ x \cdot f(x) = \frac{1}{X_c\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (7)$$

3. Функция накопленные доли доходов населения по уровню СДД есть функция $\Psi(x)$ или интеграл:

$$\Psi(x) = \int_0^x \varphi(u)du = \frac{1}{X_c\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(\ln u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ du. \qquad (8)$$

Как видно из формул (4) – (8), функция $f(x)$ – плотность вероятности логарифмически нормального распределения населения по уровню ***СДД*** является базовой. На основе функции $f(x)$ определяются остальные функции. Построение именно всех четырех функций принципиально необходимо для решения задач дифференциации доходов населения.

Из интегральных оценок кривых распределения по уровню ***СДД*** (3) и (8) осуществляется переход к кривой концентрации доходов Лоренца. На основе кривой Лоренца вычисляются: коэффициент дифференциации доходов Лоренца (индекс Джини) и коэффициент фондов.

Р. Лерман и Ш. Ицхаки (1984) [18] предложили формулу, по которой индекс Джини вычисляется непосредственно по функции распределения $F(x)$:

$$ID = (2/X_c)\cdot cov_F(x, F(x)), \qquad (9)$$

где

X_c – среднедушевой доход во всем диапазоне доходов;

$cov_F(x, F(x))$ – ковариация между уровнем дохода x и долей $F(x)$;

$F(x)$ – население с доходами на душу не выше, чем x, рассматриваемыми как случайные переменные с одной и той же функцией распределения $F(x)$:

$$cov_F(x, F(x)) = \int_0^\infty (x - X_c)\,(F(x) - F_c)\, dF(x).$$

Кривые распределения и кривые Лоренца позволяют вычислять и другие (дополнительные) показатели, необходимые для исследования дифференциации денежных доходов населения. На самом деле в основе такой методики оценок благосостояния населения лежит сомнительное условие – Баланс доходов и расходов населения. Логичнее определять оценки благосостояния населения по объёмам расходов. В современной рыночной среде совокупные показатели расходов населения превышают совокупные показатели доходов.

Появление в рыночных условиях финансовых механизмов в виде кредитных организаций и фондовых рынков открывает населению возможности для опережающего потребления. Происходит приобретение товаров и услуг в счет будущих доходов. Поэтому макроэкономическое требование равенства между текущими доходами и расходами всего населения уже не является доказательно необходимым. Более того, Росстат регулярно фиксирует превышения расходов над доходами, что позволяет изучать характер (объемы и цикличность) этих превышений. И здесь имеет место не только потребление за счет теневых доходов, но и реально существующее опережающее потребление, имеющее явное экономическое объяснение.

Расходы до сих пор рассматривались только дискретно. Фиксировался структурный (постатейный) уровень расходов и проводились исследования постатейных расходов для разнодоходных групп населения. Задача получения математической функции – распределения населения по уровню среднедушевых среднемесячных денежных расходов (***СДР***) даже не ставилась. Автору не известны результаты публикаций, в которых бы проводились исследования распределения населения по уровню ***СДР***. Необходимость наблюдения и прогнозирования распределения населения по уровню среднедушевых среднемесячных денежных расходов (***СДР***) является не менее актуальной, чем наблюдение и прогнозирование распределения населения по уровню среднедушевых среднемесячных денежных доходов (***СДД***). В настоящей статье предпринята попытка рассмотреть макроинтегральные характеристики расходов домашних хозяйств и, предложив некоторые гипотезы, дать математическое и экономическое объяснение процессов распределения населения по уровню ***СДР***.

Естественно, что ограничения по доходам домашних хозяйств накладывают ограничения и на расходы и, следовательно, плотность распределения населения по уровню среднедушевых среднемесячных денежных расходов (***СДР***) определяется возможностями той ниши, в которой находится субъект (домашнее хозяйство), то есть, расходы определяются доходами. Многочисленными исследованиями и наблюдениями установлена взаимосвязь между доходами и расходами в каждой разнодоходной группе населения и установлено, что в каждой разнодоходной группе населения существуют специфические предпочтения, определяемые доходами [12-15], [21-23].

По аналогии с $f(x)$ – плотностью распределения населения по уровню ***СДД*** предположим существование $g(y)$ – плотности распределения населения по уровню ***СДР***.

Как соотносятся эти функции между собой? Тот факт, что функции $f(x)$ и $g(y)$ существенно различаются не вызывает сомнений на интуитивном уровне и доказывается на качественном уровне.

В зоне низких доходов даже такая цель, как выживание – не всегда достижима. В зоне низких или близких к ним доходов находятся обязательные платежи и взносы; расходы на продукты питания и лекарства, на минимальные непродовольственные товары и услуги. Очевидно, что расплатой за дефицит доходов этой группы является сокращение продолжительности жизни. Но и малообеспеченные слои населения, накопив определенные суммы, периодически вынуждены производить дорогостоящие покупки (бытовая техника, мебель).

Начиная с доходов выше модального значения, когда у домохозяйства появляется положительная кредитная история заемщика, начинает работать логика максимального удовлетворения потребностей текущего момента. В то же самое время регулярно оплачивать дорогостоящие покупки, включая оплату кредитов, на рынках товаров и фондовых рынках имеют возможность только представители высокодоходных групп населения. То есть, логично ожидать, что функция расходов населения $g(y)$ будет смещена в сторону высоких расходов, по сравнению с функцией доходов $f(x)$.

2. ИСТОЧНИКИ ДОХОДОВ ДЛЯ ОПЕРЕЖАЮЩЕГО ПОТРЕБЛЕНИЯ ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ

Решение о текущих покупках товаров или услуг принимается индивидуально каждым домашним хозяйством, исходя из нескольких очевидных критериев. Но существуют ниши покупок, в которых цена покупки превышает текущие доходы хозяйства. В рыночной среде разработаны, применяются и совершенствуются финансовые и правовые механизмы (кредиты, ипотеки, субсидии), позволяющие, заплатив часть текущей цены товара кредитору, получить товар в пользование и рассчитываться с кредитором за товар из будущих денежных поступлений (через год, пять, десять и даже двадцать лет). Здесь уже необходимо, не исключая инфляции, принимать во внимание и ставки по депозитам и ставки по кредитам, стоимость услуг по кредитам, комиссионные сборы, доходность по ценным бумагам. Появление таких инструментов, как единый реестр заемщиков и контроль реестра со стороны ЦБ, открывает перспективы опережающего потребления домохозяйствам с положительной кредитной историей заемщика.

Чем выше возможности заемщика, чем выше его оптимизм по отношению к скорости поступления будущих доходов, тем большее число неоплаченных покупателем (а оплаченных кредитором под будущий доход заемщика) товаров оказывается в потреблении. Именно так фактически и происходит опережающее потребление. Это одна из наиболее реалистичных процедур расходов, совершаемых домашними хозяйствами.

Решение потребителя о расходах принимается под воздействием многих факторов, из которых выделим важнейшие по принципу разделения источников доходов и направлений расходов.

1. Текущий стабильный регулярный доход – оплата труда и/или трансферты (Z) (с вычетами обязательных платежей и взносов). Расходами являются: текущие регулярные расходы, а также возможность за счет профицита семейного бюджета делать сбережения, и/или оплачивать кредиты, и/или участвовать в операциях на финансовых рынках.
2. Сбережения (Z'). Использование накопленных средств по тем же направлениям расходов, что и в п. 1.
3. Использование процентных доходов по вкладам (Z''), по тем же направлениям расходов, что и в п. 1.
4. Использование предпринимательских доходов от собственности (доходы по ценным бумагам) ($+Z'''$) по тем же направлениям расходов, что и в п. 1 и вдобавок возможность осуществлять прямые инвестиции.

Гипотеза 1

Прямые текущие поступления доходов рассматриваются как функция текущего дохода $z(u)$. Аргументом функции $z(u)$ является u – переменная, которая зависит от ниши доходов (x) и ниши расходов (y), в которую попадает домашнее хозяйство. Хотя и (x), и (y) измеряются в рублях, но для доходов и расходов – это уже денежные единицы разной природы. Поэтому переменная u определяется двумя аргументами $u = (x,y)$. Накопления по первой производной дохода позволяют создать генератор постоянного дохода по депозитной ставке, то есть создать доход по второй производной дохода. Но пополнять депозитные вклады в состоянии только те домохозяйства, чей доход превышает затраты на выживание, то есть те, у кого

$$z'(u) = \Delta z(u)/z(u) = (z(u)-2ПМ)/z(u) > 0$$

(здесь **ПМ** – прожиточный минимум). Процентные доходы по вкладам можно рассматривать как вторую производную – скорость изменения процентных доходов $+ z''(u)$. Приобретение ценных бумаг на процентные доходы от процентных доходов на финансовых рынках является расходным аналогом второй производной от дохода – $z''(u)$. Приобретать ценные бумаги может позволить себе только то домохозяйство, у которого $z''(u) \gg 0$. В тех случаях, когда не производится приобретение ценных бумаг, доход по второй производной может быть целиком истрачен на потребление. В тех случаях, когда накопления по второй производной дохода не целиком идут на потребление, то частично могут идти на сбережения или использоваться для приобретения акций, облигаций, паев или других ценных бумаг на фондовых рынках. Доход, получаемый по ценным бумагам в качестве дивидендов (доход от собственности) является аналогом третьей производной от текущего дохода – $z'''(u)$. Доход от собственности (доходность акций и ценных бумаг), используется как на потребление или накопление, так и на операции на фондовых рынках или прямые инвестиции.

Домашним хозяйствам постоянно приходится решать проблемы расходов. Покупать или не покупать, сейчас или потом, на рынке товаров и услуг или фондовом рынке, этот товар (услугу) или другой, одни ценные бумаги или другие, накапливать сбережения или брать кредит, с какой процентной ставкой по кредиту, с каким сроком расплаты по кредиту? Вот примерный (но далеко не полный) перечень вопросов и задач о расходах, постоянно решаемых домашними хозяйствами.

Экспертные оценки доступности и ёмкости источников доходов и направлений расходов сведены в табл. 1.

Решение всех домашних хозяйств о текущих расходах в итоге сводится к отысканию функции $z(u)$, определяющей решение дифференциального уравнения второго или третьего порядка с переменными коэффициентами. В общем случае решениями таких дифференциальных уравнений могут быть достаточно сложные комбинации гипергеометрических функций [6]. Не всегда удается представить результат решения в каком-либо простом виде.

В простейших точечных случаях решение о расходах можно описать дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами. Например, уравнение вида [6], [7]

$$4u^2 z'' + u(1 - 2\alpha) z' + (u^2\beta^2 + (\alpha - v^2)) z = 0 \qquad (10)$$

имеет решение

$$z(u) = u^{\alpha} Z_v(\beta u),$$

где $Z_v(u)$ – функция Бесселя первого $J_v(u)$, второго $Y_v(u)$ или третьего $H_v(u)$ рода порядка v.

Таблица 1

ЭКСПЕРТНЫЕ ОЦЕНКИ ДОСТУПНОСТИ И ЁМКОСТИ ИСТОЧНИКОВ ДОХОДОВ И НАПРАВЛЕНИЙ РАСХОДОВ

№	Экономическое содержание источников доходов и направлений расходов	Математическое содержание направлений расходов	Доля населения (от общей численности), имеющая доступ к источнику расходов	Доля в общем объёме расходов
1	Оплата труда и/или трансферты (на текущее потребление). Прямые расходы	$k_1 \cdot z(u)$	100%	(15÷20)%
	Оплата труда и/или трансферты (на сбережение). Отложенное потребление	$- k_2 \cdot z(u)$	80%	
	Оплата труда и/или трансферты (на выплаты по кредитам). Опережающее потребление	$k_3 \cdot z(u)$	50%	
2	Сбережения (на текущее потребление). Прямые расходы	$+ k_4 \cdot z'(u)$	80%	(20÷25)%
	Сбережения (на сбережение). Отложенное потребление	$- k_5 \cdot z'(u)$	60%	
	Сбережения (на выплаты по кредитам). Опережающее потребление	$+ k_6 \cdot z'(u)$	50%	
3	Процентный доход от сбережений (на текущее потребление) Прямые расходы	$+ k_7 \cdot z''(u)$	40%	(25÷30)%
	Процентный доход от сбережений (на сбережение и/или приобретение ценных бумаг). Отложенное потребление	$- k_8 \cdot z''(u)$	20%	
	Процентный доход от сбережений (на выплаты по кредитам). Опережающее потребление	$+ k_9 \cdot z''(u)$	12%	
4	Доход от собственности (дивиденды) (на потребление). Прямые расходы	$+ k_{10} \cdot z'''(u)$	9-10%	(30÷35)%
	Доход от собственности (дивиденды) (на сбережение и/или приобретение ценных бумаг и/или прямые инвестиции)	$- k_{11} \cdot z'''(u)$		
	Доход от собственности (дивиденды) (на выплаты по кредитам или на погашение базовых сумм кредита). Опережающее потребление	$- k_{12} \cdot z'''(u)$		

При $\alpha = 0$ и $\beta^2 = 1$ уравнение (10) принимает вид:

$$z'' + u z' + (u^2 - v^2)\, z = 0.$$

Решением такого уравнения являются обычные функции Бесселя $z(u) = Z_v(u)$.

При $\alpha = ½$ уравнение (10) принимает вид:

$$4u^2 z'' + (4u^2\beta^2 - (4v^2 - 1))\, z = 0. \qquad (11)$$

Решением такого уравнения являются трансформации Ганкеля [6 с.245], [7]:

$$z(u) = \sqrt{u}\, Z_v(\beta u),$$

если решением (11) является трансформация Ганкеля с функцией Бесселя первого рода $J_v(u)$

$$z(u) = \sqrt{u}\, J_v(\beta u), \qquad (12)$$

то эта трансформация симметричная. При $v = -1/2$ уравнение (11) вырождается в уравнение обычных колебаний и дает решения в виде косинус-трансформации Фурье

$$z(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \cos(\beta u), \qquad (13)$$

а при $v = 1/2$ решение уравнения (11) сводится к синус-трансформации Фурье

$$z(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sin(\beta u). \qquad (14)$$

Трансформации (12) – (14), оставаясь симметричными, не приводят к деформации распределения.

Расхождение в поведении доходов и расходов проявляется в более сложных вариантах решений о расходах с проявлением эффектов доходов от собственности (проявлением эффектов третьей производной от доходов). В одном из возможных точечных вариантов дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами принимает вид:

$$Au^3 z''' + B u^2 z'' + u(Cu^2 - D)\, z' + E z = 0 \qquad (15)$$

Решения уравнений такого вида известны и изучены достаточно хорошо [6], [7]. Не теряя общности, можно рассматривать нормированное уравнение, полагая коэффициент $A = 1$. Кроме того, в предлагаемой логике опережающего потребления весьма часто возникают случаи, когда весь процентный доход по депозитам идет либо на погашение кредитов, либо на приобретение ценных бумаг, то есть, когда коэффициент $B = 0$ по совокупности операций со второй производной. Тогда уравнение (15) примет вид:

$$u^3 z''' + u\,(Cu^2 - D)\, z' + E z = 0 \qquad (16)$$

Анализ асимптотических решений этого уравнения сводится либо к анализу поведения решений при больших значениях аргумента, либо к анализу поведения коэффициентов уравнения при больших значениях аргумента. Асимптотическое решение уравнения (16) будет соответствовать асимптотическим решениям вида (12) – (14). Один из множества возможных вариантов, доступный для аналитического исследования точного решения, может выглядеть следующим образом. В частных случаях решениями дифференциальных уравнений типа (16) могут быть функции Бесселя в различных комбинациях. Но, при некоторых точечных значениях коэффициентов решение приобретает простой вид. Так, например, при $C = 4$, $D = E = 3$ уравнение (16) преобразуется в уравнение

$$u^3 z''' + u\,(4u^2 - 3) z' + 3 z = 0$$

и имеет одно из возможных решений в виде:

$$z(u) = w_1(u) = a[uJ_1^2(u)] + b[uJ_1(u)Y_1(u)] + c[uY_1^2(u)]. \qquad (17)$$

Здесь $w_1(u)$ есть сумма произведений функций Бесселя первого и второго рода $J_1(u)$ и $Y_1(u)$ первого порядка на аргумент u [6 с. 246], [7 с.544 (3.61, 3.67)].

Несмотря на кажущуюся громоздкость, функция $w_1(u)$ достаточно проста. Поведение ее вблизи нуля известно (приложение). При больших значениях аргумента (когда $b = 0$ и $c = 0$) она асимптотически вырождается в обычную тригонометрическую функцию, близкую к $-(1/\pi)\sin(2u)$.

Каждое домохозяйство на уровне оценок всех своих возможностей принимает решение о направлениях расходов, которое можно представить как использование в своей доходной нише максимума расходов с последующим погашением платежей за счет будущих доходов

$$\Delta g_k = f(x)\, z(u) \Delta x_k. \qquad (18)$$

Общий расход домохозяйств по различным направлениям расходов определяется суммой компонент, соответствующих различным источникам доходов:

$$g(y) = \sum_k \Delta g_k = \sum_k f(x) * z(x,y) \Delta x_k\ . \qquad (19)$$

Переходя к предельным характеристикам и суммируя расходы по всему спектру доходов с учетом всех условий, получим аналитическую интегральную характеристику расходов – ***g(y)*** – плотность распределения населения по уровню среднедушевых среднемесячных денежных расходов (***СДР***):

$$g(y) = \sum_k \Delta g_k = \lim_{\Delta xk \to 0} \sum_k f(x) * z(x,y) \Delta x_k =$$

$$= \int_0^\infty f(x) D(x,y) dx\ . \qquad (20)$$

Здесь ***D(x,y)*** – ядро интегрального уравнения, определяемое функцией ***z(x,y)***, которая, в свою очередь, является одним из возможных решений дифференциальных уравнений вида (15).

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСХОДОВ

Гипотеза 2

Логично предположить, что если источники доходов разной экономической природы взятые по всему спектру статей доходов в итоге математически выражаются математической функцией плотности логарифмически нормального распределения населения по уровню доходов, то и постатейные расходы разной экономической природы, взятые по всему спектру статей расходов (переплавляясь в общем котле расходов), в итоге должны приводить к некоторой обобщенной математической функции – плотности распределения населения по уровню ***СДР***. Более того, можно предположить, что обобщенная математическая функция плотности распределения населения по уровню СДР будет иметь характер функции логарифмически нормального распределения, умноженной на некоторую поправочную функцию. Модель распределения населения по уровню ***СДР*** можно построить, основываясь на следующих рассуждениях.

Пусть существует оператор прямого преобразования ***P[D(x,y)]***, который переводит распределение населения по уровню ***СДД*** – ***f(x)*** в распределение населения по уровню ***СДР*** – ***g(y)***. Математически такие процессы могут быть представлены уравнениями вида (20). Уравнения вида (20) называются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода [3]- [5] (приложение):

$$g(y) = P[D(x,y)]\{f(x)\}$$

или

$$g(y) = \int_0^\infty f(x) D(x,y) dx\ , \qquad (21)$$

где ***D(x,y)*** – ядро прямого интегрального преобразования.

Функции ***f(x)*** и ***g(y)*** достаточно жестко связаны между собой. Действительно, макроэкономические факторы: оплата труда и/или трансферты, уровень инфляции; а так же факторы финансового рынка: процентные ставки по депозитам и кредитам, котировки ценных бумаг – влияют на решения домашних хозяйств о направлениях и объёмах расходов. Очевидно, что должно существовать и обратное преобразование. Следовательно, должен существовать и оператор обратного преобразования ***P^{-1}[R(x,y)]***, который переводит плотность распределения населения по уровню расходов ***g(y)*** в плотность распределения населения по уровню доходов ***f(x)***:

$$f(x) = P^{-1}[R(x,y)]\{g(y)\}$$

или

$$f(x) = \int_0^\infty g(y) R(x,y) dy\ , \qquad (22)$$

где ***R(x,y)*** – ядро обратного интегрального преобразования.

Математические аспекты таких преобразований изучены достаточно хорошо [3], [4]. Некоторые свойства интегралов (21) и (22), например, такие весьма важные, как сходимость, доказываются в приложении.

С экономической точки зрения, до сих пор хорошо изученными оставались распределения по уровню ***СДД***. Достаточно хорошо изучены и структурные проблемы распределения доходов и расходов по статьям баланса доходов и расходов населения.

Здесь же вводятся три новых функции ***g(y)***, ***D(x,y)*** и ***R(x,y)***:

g(y) – плотность распределения населения по уровню ***СДР***;

D(x,y) – ядро прямого интегрального преобразования доходов в расходы;

R(x,y) – ядро обратного интегрального преобразования расходов в доходы.

Оператор ***D(x,y)*** можно трактовать как функцию интеграции решений о расходах по различным разнодоходным группам населения в зависимости от объема доходов, цен на товары и услуги, параметров финансовых рынков, состояния кредитной истории заемщика, уровня инфляции, прогноза развития экономики, направленности социальных программ и др.

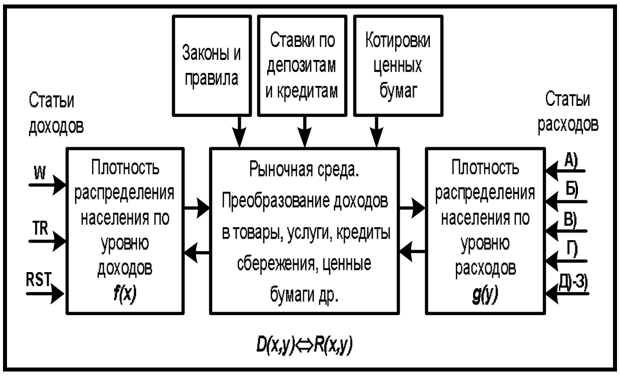

Рис. 1. Схема процессов прямого и обратного преобразований доходов и расходов

Пояснения к рис. 1:
W – оплата труда в ***БДРН***;
TR – трансферты населению;
RST – прочие доходы населения;
А) – З) структура расходов (пояснения в тексте).

Что представляют собой эти функции с экономической точки зрения и каким требованиям они должны удовлетворять с математической точки зрения?

Оператор ***R(x,y)*** можно трактовать как функцию интеграции решений о возможных доходах по различным разнодоходным группам населения в зависимости от тех же самых факторов, от которых зависит и оператор ***D(x,y)***. Именно совокупные (интегральные) решения потребителей всех разнодоходных групп населения о расходах определяют вид ядер интегральных уравнений.

О функции ***f(x)*** известно достаточно и написано много [9-13,17]. Поэтому рассмотрим функцию ***g(y)***. Во-первых, эта функция ограничена. Во вторых, как и функция ***f(x),*** функция ***g(y)*** является непрерывным аналогом дискретных статей расходов. Чтобы изучить поведение функции ***g(y,)*** шкалу расходов представим (после выплаты обязательных платежей и взносов) на качественном уровне (по аналогии со статьями ***БДРН***):

- продовольственные товары;
- непродовольственные товары краткосрочного пользования (одежда, обувь, бельё…);
- непродовольственные товары долгосрочного пользования (электрорадиотехника, бытовая техника, мебель и т.п.);
- лекарства, профилактика здоровья, лечение, отдых, туризм;
- сбережения;
- покупка автомобилей, оплата автостоянок и автообслуживания;
- покупка недвижимости (квартир, земельных участков, коттеджей);
- покупка на фондовых рынках ценных бумаг (облигаций, акций, паёв).

Как видно, по мере продвижения по оси качественных расходов удельные расходы резко возрастают. Доля численности населения по мере продвижения по оси качественных расходов снижается. И, несмотря на значительное возрастание удельных расходов, доступных резко сокращающемуся количеству населения, функция $g(y) \Rightarrow 0$ при $y \Rightarrow \infty$. То есть, логично предположить, что решения асимптотически существуют в классе $exp(-\beta y^2)$ с некоторой функциональной поправкой. Тогда ожидаемое преобразование, например, примет вид:

$$g(y) = \int_0^\infty f(x)D(x,y)dx = B\, exp(-\beta y^2)Q(y). \qquad (23)$$

Если аргументом ядра рассматривать произведение аргументов ***xy*** функций ***f(x)*** и ***g(y),*** то ядра таких операторов связаны между собой преобразованиями Меллина [1], [4]. Примем это допущение. Некоторые свойства интегральных преобразований Меллина приведены в приложении. Подставим в (23) выражение для ***f(x)*** из *(4)* и получим:

$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} D(xy)dx =$$
$$= B\, exp(-\beta y^2)\, Q(y). \qquad (24)$$

Чтобы вычислить интеграл (24) применим замену переменой $t = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$ и, после соответствующих преобразований $t\sigma + \mu = \ln x$ и $dx = x \cdot \sigma \cdot dt$, уточним интервалы измерения подинтегральной функции. Диапазону по ***x*** $0 < x < \infty$ соответствует диапазон по ***t***: $-\infty < t < \infty$. Но диапазон с отрицательным доходом в данном случае теряет смысл. Следует рассматривать интеграл в диапазоне по ***t***: $0 < t < \infty$. Замена переменной ***x*** в интеграле (24) приводит и к замене переменной ***y*** на η

$$g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty exp(-t^2/2)D(t\eta)dt =$$
$$= B\, exp(-b\eta^2)Q(\eta). \qquad (25)$$

Переход к переменной ***y*** в уравнениях вида (25) осуществляется по формулам обратного преобразования ($\eta = \frac{\ln y - \mu}{\sigma}$, $y = exp(\eta\sigma + \mu)$). С учетом замены диапазона интегрирования для диапазона по ***y*** получаем

$e^\mu < y < \infty$.

Так как нам предположительно известен вид плотности распределения населения по уровню среднедушевых среднемесячных денежных расходов, то основной проблемой отыскания распределения населения по уровню расходов является отыскание вида ядер возможных операторов преобразования ***D(u)***.

В соответствии с гипотезой 1, ядро ***D(u)*** и резольвента ***R(u)*** могут быть представлены как решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим два типа решений, соответствующих двум типам трансформаций: симметричные и несимметричные [3], [4].

1. Пусть решение дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами типа (11) представлено решениями в виде симметричных трансформаций Фурье (12) – (14). Например, ядро прямого интегрального преобразования (13):

$$D(u) = z(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, cos(\beta u)$$

является симметричным ядром. Такому ядру соответствует точно такое же ядро обратного интегрального преобразования

$$R(u) = z(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, cos(\beta u).$$

Например, в случае ядра (13) – симметричной косинус-трансформации Фурье, интеграл (25) прямого преобразования доходов в расходы принимает вид и дает решение [2 (3.896.4) с. 494)]:

$$g(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty exp(-\rho t^2)cos(t\eta)dt =$$
$$= 0{,}5\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{\rho}}\; exp(-\eta^2/4\rho)). \qquad (26)$$

В (26) параметр $\rho = ½$. Отсюда получим:

$$g(\eta) = exp(-0{,}5\eta^2). \qquad (27)$$

Аналогичный результат получается и с симметричной трансформацией Ганкеля (12). То есть, подтверждён очевидный факт: симметричная трансформация интегрального преобразования не меняет функции. Вид исходной функции ***f(t)***, функции ***g(η)*** прямого преобразования (27) и функции ***f(t)*** обратного преобразования полностью совпадают.

Экономически это означает, что при отсутствии доходов от собственности и равенстве отложенного и опережающего потребления возможно (при полном отсутствии теневых доходов) сохранение баланса между доходами и расходами населения.

2. В более сложных случаях, когда отсутствует равенство отложенного и опережающего потребления и имеют место доходы от собственности, решение о расходах определяется решением дифференциально-

го уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами типа (16). Решениями дифференциальных уравнений такого типа в некоторых случаях являются произведения функций Бесселя. Например, обыкновенное дифференциальное уравнение (16), разрешимое в функциях Бесселя (17). Ядро $D(u)$ и резольвента $R(u)$ могут быть представлены в виде несимметричных трансформаций Фурье.

Возможным оператором ядра может быть, например, оператор $D(u)$, отличающийся от функции $w_1(t)$ на величину константы сдвига $1/\pi$ [3 – 6]:

$$D(u) = w_1(t) - 1/\pi = uJ_1^2(u) - 1/\pi. \qquad (28)$$

Функция $uJ_1^2(u) - 1/\pi$ асимптотически, при больших $u \Rightarrow \infty$, вырождается в обычную синус-трансформацию Фурье с удвоенной частотой (приложение).

Оператор преобразования $f(t)$ в $g(\eta)$ с ядром (28) примет вид:

$$g(\eta) = \eta\int_0^\infty \exp(-\rho t^2)t\,J_1^2(t\eta)dt - (1/\pi)\int_0^\infty \exp(-\rho t^2)dt =$$
$$= g_1(\eta) + g_2(\eta), \qquad (29)$$

где $g_1(\eta)$ [2 (6.633.2 с. 732)], [4 433(1)]:

$$g_1(\eta) = \eta\int_0^\infty \exp(-\rho t^2)\,t\,J_1^2(t\eta)dt =$$
$$= \eta\,\frac{1}{2\rho}\exp(-\eta^2/2\rho)I_1(\eta^2/2\rho). \qquad (30)$$

Правая часть выражения (30) в точности совпадает с выражением (24). Происходит уточнение вида функции $Q(\eta)$:

$$Q(\eta) = \eta\,I_1(\eta^2/2\rho)$$

и коэффициентов B и b.

Здесь $I_1(u)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка [6], [5 с. 247, с. 248] и её свойства приведены в приложении.

Коэффициенты $B = (1/2\rho)$, $b = (1/2\rho)$ в случае (30), при $\rho = 1/2$ получаются равными $B = 1$ и $b = 1$. Тогда

$$g_1(\eta) = \exp(-\eta^2)\,\eta\,I_1(\eta^2). \qquad (31)$$

Вычисление второго слагаемого в (29) $g_2(\eta)$ не представляет трудностей:

$$g_2(\eta) = -(1/\pi)\int_0^\infty \exp(-t^2/2)dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \qquad (32)$$

В результате выполнения всех преобразований получили функцию $g(\eta)$ – плотность распределения населения по уровню *СДР*, которая отличается от $f(t)$ – плотности распределения населения по уровню *СДД* множителем – функцией $\eta I_1(\eta^2)$. Именно эта функция определяет характер опережающего потребления. Поведение функции $I_1(u)$ изучено достаточно хорошо [6 с. 247, с. 248], [8 с.431]. При малых значениях стремится к нулю, в диапазоне средних значений – пропорционально аргументу, а при больших значениях аргумента – возрастает по экспоненциальному закону. Исследуем поведение функции $g_1(\eta)$ при больших значениях аргумента [8 с. 341]:

$$\mathrm{Lim}_{\eta\to\infty}\exp(-\eta^2)\eta\,I_1(\eta^2) =$$
$$= \mathrm{Lim}_{\eta\to\infty}\exp(-\eta^2)\eta\,\eta^{-1}\exp(-\eta^2)b_0 = b_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \qquad (33)$$

Учитывая, что $g(\eta) = g_1(\eta) + g_2(\eta)$, добавим к функции $g_1(\eta)$ поправку $g_2(\eta)$. Функция $g_2(\eta)$ оказалась константой в точности равной асимптотическому значению функции $g_1(\eta)$.

$$g(\eta) = \exp(-\eta^2)\,\eta\,I_1(\eta^2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \qquad (34)$$

Фактически происходит смещение функции $g_1(\eta)$ на величину этой константы и в пределе при больших η функция $g(\eta)$ будет стремиться к нулю [8].

$$\mathrm{Lim}_{\eta\to\infty}\,g(\eta) \to 0(O(\eta^{-2})).$$

В общем случае ядру $D(u) = uJ_1^2(u) - 1/\pi$ соответствует резольвента $R(u)$ – ядро обратного интегрального преобразования. Используя известные свойства ядер интегральных уравнений первого рода и интегральных преобразований (приложение), для резольвенты $R(u)$ получим:

$$R_1(u) = 2\pi(-J_1(u)\,Y_1(u) +$$
$$+ u(J_1(u)\,Y_0(u) + J_0(u)\,Y_1(u))). \qquad (35)$$

Тогда

$$f(t) = 2\pi\int_0^\infty (\exp(-\eta^2)\eta I_1(\eta^2) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}})(-J_1(\eta t)Y_1(t\eta) +$$
$$+\eta t(J_1(t\eta)Y_0(t\eta) + J_0(t\eta)Y_1(t\eta)))d\eta. \qquad (36)$$

В результате решения уравнения (36) получается распределение $f(t) = \exp(-t^2/2)$, совпадающее с исходным. Этот факт подтверждает правильность выполненных преобразований и представленных гипотез, на основе которых были сделаны эти преобразования. Доказательство этого факта приведено в приложении.

Используя тождество Ломмеля (приложение) из (35) можно получить еще два эквивалентных выражения для резольвенты (35) $R_2(u)$ и $R_3(u)$, что позволяет записать соответственно ещё два эквивалентных выражения для расчета плотности распределения населения по уровню доходов $f_{12}(t)$ и $f_{13}(t)$.

Полученные результаты относятся к той части населения, доходы которых превышают значение $(x > e^{\mu})$. Граница проходит при доходах, превышающих модальное значение дохода, и находится вблизи среднего значения, оставаясь меньше среднего значения.

Рассмотренные гипотезы, методологические подходы и предварительные точечные математические результаты решения проблемы, возможно, открывают новое направление исследований и нуждаются в уточнениях.

Полученные результаты позволяют сделать следующие экономические выводы.

1. Для населения с низкими доходами опережающее потребление отсутствует. Если доходы домохозяйств ниже прожиточного минимума, но домохозяйства продолжают как-то жить, значит расплатой за такое существование является либо сокращение продолжительности такой жизни, либо форсированная потеря здоровья. Необходимость государственных дотаций или дотаций благотворительных организаций для населения в этой нише доходов очевидна.
2. Для населения со средними доходами опережающее потребление весьма незначительно и имеет чисто символическое значение. Возможность получения кредитов существует, но реально никаких проблем опережающих расходов не решает.
3. Для населения с высокими доходами опережающее потребление открывает широкие возможности и резко возрастает по экспоненциальному закону от величины плотности распределения по уровню *СДД*. Доступность кредитов в больших размерах, длительные сроки выплат по кредитам порождают значительное превышение расходов над доходами.

Приобретут ли такие процессы (жизнь взаймы) характер снежного кома? Не приведет ли такая финансовая политика к катастрофе какой, то части банковской системы? При всех положительных моментах этих процессов, при самых тщательных расчетах кредиторами рисковых прогнозов, нельзя исключать массового не возврата выплат по кредитам. Особенно при ставках по кредитам выше 12% годовых, когда суммарный возврат превышает базовую величину кредита в 2-3 раза.

Вполне понятными становятся публичные оценки дифференциации благосостояния населения в СМИ и их отличие от официальных данных Росстата. Если оценивать показатели дифференциации населения не по доходам, а по расходам, то они приобретают совершенно иной смысл. Резко и заметно возрастают показатели дифференциации населения. Происходят не только количественные, но и качественные изменения характеристик дифференциации.

4. ПРИЛОЖЕНИЕ

4.1. Применение операторных преобразований к решению интегральных уравнений

Если функция $k(u,s)$ известная функция двух переменных u и s и интеграл

$$F(s) = \int_0^\infty f(u)\, k(u,s)du \qquad (П.1)$$

сходится, то он определяет интегральную трансформанту функции $f(u)$ с ядром $k(u,s)$. Ядро, исследованное Меллином [1], [3] имеет вид:

$$k(u,s) = u^{s-1}. \qquad (П.2)$$

Это ядро дает трансформанту функции $f(u)$:

$$F(s) = \int_0^\infty f(u)\, u^{s-1}du\ , \qquad (П.3)$$

заданной на интервале $(0,\infty)$. Здесь s некоторое комплексное число, принадлежащее полосе

$$\sigma_1 < Re s < \sigma_2. \qquad (П.4)$$

Достаточными условиями для существования преобразования Меллина являются:

1) кусочная непрерывность функции $f(u)$ в любом промежутке $0 < u < \infty$;

2) сходимость интегралов

$$\int_0^1 |f(u)|\, u^{\sigma_1-1}du$$

и

$$\int_1^\infty |f(u)|\, u^{\sigma_2-1}du. \qquad (П.5)$$

Оператор, преобразующий функцию в ее интегральную трансформанту с ядром (*П.2*), есть линейный оператор, который обозначим через M: $M[f] = F(s)$.

Если предположить, что для каждой функции $F(s)$, принадлежащей к определенному классу функций переменной s, уравнение (*П.3*) удовлетворяется одной и только одной функцией $f(u)$, то легко показать, что существует такой обратный линейный оператор M^{-1}, что уравнения $M[f] = F(s)$ и $M^{-1}[F] = f(u)$ являются эквивалентными [3].

Так, например, если функция $f(u)$ удовлетворяет условиям Дирихле в любом конечном промежутке, принадлежащем интервалу $(0,\infty)$, то имеет место формула обращения Меллина, представляющая функцию $f(u)$ через ее преобразование Меллина $F(s)$:

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} F(s)\, u^{-s}ds. \qquad (П.6)$$

Здесь путь (**C**) есть бесконечная прямая, параллельная мнимой оси плоскости комплексной переменной s и лежащая в полосе (*П.4*).

Если поведение функции $f(u)$ известно как при $u \to 0$ так и при $u \to \infty$, то значения σ_1 и σ_2 находятся из условия абсолютной сходимости интеграла (*П.1*). Если же поведение функции $f(u)$ известно лишь вблизи одного из концов интервала $(0,\infty)$, например, при $u \to \infty$, то определяется величина σ_2 , и прямая (**C**) проводится левее прямой $Re\ s = \sigma_2$, но правее близлежащей особой точки функции $F(s)$. Более подробное изложение теории преобразований Меллина имеется, например, в работах [1], [3], [4].

При определенных условиях можно представить решение интегрального уравнения

$$g(y) = \int_0^\infty f(x)D(x,y)dx \qquad (П.7)$$

в форме

$$f(x) = \int_0^\infty g(y)R(x,y)dy\ . \qquad (П.8)$$

Сходимость интеграла (*П.7*) (21) доказывается следующим образом. В подинтегральном выражении (21) сходимость функции доходов $f(t) \Rightarrow (O(exp(-t^2/2)))$ выше, чем сходимость ядра $D(t,y)$. Следовательно, произведение $f(t)D(t,y)$ сходится всегда, так как $f(t)D(t,y)\Rightarrow (O(exp(-t^2/2)))$ при $t \Rightarrow \infty$ и тогда интеграл (21) существует.

И в случае (*П.8*) (22), точно так же как и в случае (*П.7*) в подинтегральном выражении сходимость функции расходов $g(\eta) \Rightarrow (O(-\eta^{-2}))$ выше, чем сходимость ядра $R(x,y)$. Следовательно, произведение $g(\eta)R(t,\eta)$ сходится всегда, так как $g(\eta)R(t,\eta) \Rightarrow (O(-\eta^{-2}))$ при $\eta\Rightarrow\infty$ и тогда интеграл (22) существует.

Из факта существования интегралов (*П.7*) и (*П.8*) формально следует [3], [4], что:

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(v)D(v,y)dv\right)R(x,y)dy = f(x) \qquad (П.9)$$

и

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty g(u)\, R(x,u)du\right)D(x,y)dx = g(y)\ . \qquad (П.10)$$

Если соотношение между функцией (*П.8*) и ее интегральной трансформантой (*П.7*) симметрично, то есть, $D(x,y) = R(x,y)$, то ядро $D(x,y)$ называется ядром Фурье [3], [4]. Ограничимся случаем, когда ядра $D(x,y)$ и $R(x,y)$ являются функцией только от произведения $xy=yx =u$.

$$D(x,y) = D(xy) = D(yx) = D(u);$$

$$R(x,y) = R(xy) = R(yx) = R(u).$$

Именно такой случай имеет место в рассматриваемой задаче.

Для несимметричных формул обращения (*П.7*) и (*П.8*) известна теорема: интегральное уравнение (*П.7*) имеет решение в виде (*П.8*), если трансформации Меллина ядер $D(s)$ и $R(s)$ функций $D(u)$ и $R(u)$ удовлетворяют функциональному уравнению [3 с. 279]:

$$D(s)\, R(1-s) = D(1-s)\, R(s) = 1. \qquad (П.11)$$

Доказательство этой теоремы приводится, например, в работах [3], [4]. Из (*П.11*) следует, что ядро разрешающего уравнения $D(u)$, которое, следуя Е. Титчмаршу [3], в дальнейшем будем называть резольвентой, можно отыскать, если известно ядро исходного уравнения:

$$R(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} R(s)\, u^{-s} ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \frac{1}{D(1-s)}\, u^{-s} ds. \qquad (П.12)$$

В случае, когда известно отображение Меллина функции $f(x)$, формально решение $g(y)$ отыскивается по уравнению:

$$g(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(1-s)\, D(s)\, x^{-s} ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \frac{F(1-s)}{R(1-s)}\, x^{-s} ds. \qquad (П.13)$$

В этой формуле интегрирование производится при таких $C = Res$, для которых выполняются условия обращения преобразований Меллина.

Оператор обращения ядер

Введем здесь оператор обращения ядер несимметричных интегральных уравнений P, который определим как результат последовательного применения трех простых операторов: прямой трансформации Меллина (**П.3**), оператора перехода от отображения ядра к отображению резольвенты (**П.11**) и обратной трансформации Меллина (**П.6**). Полная запись оператора обращения ядер имеет вид:

$$R(u) = P[D(u)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \left(\int_0^\infty D(u)\, u^{-s} ds\right)^{-1} u^{-s} ds \qquad (П.14)$$

или символически:

$$D(u) \Rightarrow D(s) \Leftrightarrow 1/D(1-s) = R(s) \Rightarrow R(u). \qquad (П.15)$$

Как видим из (**П.11**), оператор P является отображением множества функций $D(u)$ на множество функций $R(u)$.

Отметим очевидные свойства этого оператора.

Свойство 1.

При умножении ядра на некоторое постоянное число ω необходимо резольвенту разделить на это же постоянное число:

$$P[\omega D(u)] = \frac{1}{\omega} R(u). \qquad (П.16)$$

Свойство 2.

Двойное применение оператора P к ядру дает само ядро. Действительно, по определению имеем:

$$R(u) = P[D(u)]\ D(u) = P[R(u)]. \qquad (П.17)$$

Тогда справедливо соотношение

$$D(u) = P[R(u)] = P[P[D(u)]] = P^2[D(u)], \qquad (П.18)$$

то есть, оператор P имеет период 2.

Для симметричных ядер

$$D(u) = P[D(u)] = P^n[D(u)] \qquad (П.19)$$

оператор P имеет период 1.

В дальнейшем рассматриваются свойства только несимметричных ядер. Оператор P обладает некоторыми особенностями, вытекающими из его построения, которые позволяют определять взаимозависимость ядра и резольвенты при некоторых операциях над ними.

4.2. Взаимозависимость ядер интегральных уравнений

Преобразования Меллина легко получаются из преобразований Лапласа заменой переменной. Естественно поэтому, что преобразования Меллина обладают рядом свойств, аналогичных свойствам преобразований Лапласа. Пусть для функции $f(u)$ существует трансформанта $F(s)$:

$$f(u) \Rightarrow F(s). \qquad (П.20)$$

Предполагая, что все рассматриваемые ниже преобразования Меллина существуют, можем записать:

$$u^b f(au^c) \Rightarrow (1/c)a^{-(s+b)/c} F((s+b)/c))\ a>0. \qquad (П.21)$$

Если предел $f(u)\, u^{s-1}$ при $u \to 0$ и $u \to \infty$ равен нулю, то

$$f'(u) \Rightarrow -(s-1)F(s-1). \qquad (П.22)$$

Из (**П.21**) и (**П.22**) имеем:

$$uf'(u) \Rightarrow -sF(s). \qquad (П.23)$$

Если предел $s^{-1} u^s \int_0^u f(t)dt$ при $u \to 0$ и $u \to \infty$ равен нулю, то

$$\int_0^u f(t)dt \Rightarrow -s^{-1} F(s+1). \qquad (П.24)$$

Из (**П.21**) и (**П.24**) найдем

$$u^{-1}\int_0^u f(t)dt \Rightarrow (1-s)^{-1} F(s). \qquad (П.25)$$

Достаточно полные сведения о преобразованиях Меллина основных формул и функций приведены в работах [1], [3], [4].

Возвращаясь к решению интегральных уравнений, будем полагать, что имеется ядро $D(u)$, которому соответствует резольвента $R(u)$. В некоторых случаях возникает необходимость изменить вид ядра, выполнив над ним (или его аргументом) некоторые операции. Тогда возникает вопрос: какие действия нужно совершить над резольвентой, чтобы уравнения остались совместными? В некоторых случаях ответ можно получить из рассматриваемых ниже двух теорем.

Теорема 1

Если ядру $D(u)$ соответствует резольвента $R(u)$, то ядру

$$D_1(u) = u^b D(au^c)$$

соответствует резольвента

$$R_1(u) = a^{1/c} c^2 u^{-b} R(au^c) \quad (\text{здесь } a>0,\ c \text{ и } b \text{ любые числа}). \qquad (П.26)$$

Действительно, условию теоремы соответствует запись оператора обращения (**П.15**):

$$D(u) \Rightarrow D(s) \Leftrightarrow R(s) \Rightarrow R(u). \qquad (П.27)$$

Из свойств преобразований Меллина [3], следует

$$D_1(u) = u^b D(au^c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1/c)a^{-(s+b)/c} D((s+b)/c)) = D_1(\bar{s}). \qquad (П.28)$$

Из условий разрешимости (**П.11**) находим $R_1(\bar{s})$:

$$R_1(\bar{s}) = \frac{1}{D_1(1-\bar{s})} = \frac{ca^{b/a} a^{(1-s)/c}}{D(\frac{1}{c} - (\frac{s-b}{c}))} =$$

$$= (1/c)a^{1/c} c^2 a^{-(s-b)/c} D((s-b)/c)). \qquad (П.29)$$

Такому изображению $R_1(\bar{s})$ (**П.29**) соответствует оригинал $R_1(u)$:

$$R_1(u) = a^{1/c} c^2 u^{-b} R(au^c). \qquad (П.30)$$

Теорема 1 доказана.

В симметричном виде доказанное утверждение можно записать так:

$$a^{1/2c} cu^b D(au^c) = P[a^{1/2c} cu^{-b} R(au^c)]. \qquad (П.31)$$

Например, если ядру

$$D_1(u) = u\frac{d}{du}[uJ_1^2(u) - 1/\pi]$$

соответствует резольвента

$$R_1(u) = -2\pi J_1(u)Y_1(u), \qquad (П.32)$$

то ядру

$$D_2(u) = \frac{d}{du}[uJ_1^2(u) - 1/\pi]$$

соответствует резольвента

$$R_2(u) = -2\pi u J_1(u)Y_1(u). \qquad (П.33)$$

Утверждение (***П.33***) справедливо, так как здесь применено следствие из теоремы 1:

$$u^{-1}D_1(u) = P[uR_1(u)]. \qquad (П.34)$$

Здесь $J_1(u)$ и $Y_1(u)$ функции Бесселя первого и второго рода соответственно и первого порядка.

Аналогичными приёмами, используя условия разрешимости (***П.11***), доказывается справедливость другой теоремы.

Теорема 2

Если ядру $D(u)$ соответствует резольвента $R(u)$ и каждая из функций

$$u^{s-1} D(u) \Big/_0^\infty$$

и

$$s^{-1}u^s \int_0^u D(t)\,dt \Big/_0^\infty$$

в полосе $(\sigma_1 < Res < \sigma_2)$ равна нулю, то при интегрировании ядра резольвенту нужно продифференцировать и результат взять с обратным знаком, то есть справедливо утверждение:

$$\int_0^u D(t)dt = P[-\frac{d}{du}R(u)]. \qquad (П.32)$$

Приведенные выше теоремы о взаимозависимости ядер позволяют сформулировать ряд следствий, которые являются определенной комбинацией этих теорем. Так, например, справедливо утверждение если:

$$D_1(u) = P[R_1(u)], \text{ то } u^{-1}\int_0^u D_1(t)dt = u\frac{d}{du}[R_1(u)]. \qquad (П.35)$$

Например, если ядру

$$D_1(u) = \frac{d}{du}[uJ_1^2(u) - 1/\pi]$$

соответствует резольвента

$$R_1(u) = 2\pi u J_1(u)Y_1(u), \qquad (П.36)$$

то ядру

$$D_3(u) = uJ_1^2(u) - 1/\pi$$

соответствует резольвента

$$R_3(u) = -2\pi\frac{d}{du}[uJ_1(u)Y_1(u)]. \qquad (П.37)$$

Применяя оператор $u^{-1}(\int_0^u ..dt)$ к ядру и оператор $u\frac{d}{du}(\ldots)$ к резольвенте n раз, получим серию из n ядер и резольвент, если выполняются условия применимости этих теорем. Эти операторы не изменяют размерностей, установленных ранее для ядер и резольвент.

В частном случае для $R_3(u)$ из (***П.37***), используя известные правила дифференцирования бесселевых функций, получим [3], [6]:

$$R_3(u) =$$
$$= 2\pi(-J_1(u)Y_1(u) + u(J_1(u)Y_0(u) + J_0(u)Y_1(u))$$

Выражение для расчета плотности распределения населения по уровню доходов $f_1(t)$ с такой резольвентой примет вид

$$f_{11}(t) = 2\pi\int_0^\infty g(\eta)\,(-J_1(\eta t)Y_1(t\eta) +$$
$$+ t\eta(J_1(t\eta)Y_0(t\eta) + J_0(t\eta)Y_1(t\eta)))d\eta. \qquad (П38)$$

Если воспользоваться известным тождеством Ломмеля [5], [6]:

$$u(J_\nu(u)Y_{\nu-1}(u) + J_{\nu-1}(u)Y_\nu(u)) = 2/\pi$$

то для резольвенты $R_3(u)$ можно записать еще два эквивалентных выражения:

$$R_{31}(u) = 2\pi((J_1(u)Y_1(u)(2u - 1) + 2/\pi); \qquad (П.39)$$

$$R_{32}(u) =$$
$$= 2\pi(-J_1(u)Y_1(u) + 2uJ_1(u)Y_0(u) - 2/\pi). \qquad (П.40)$$

Эквивалентные выражения для резольвенты (***П.39***) и (***П.40***) $R_2(u)$ и $R_3(u)$ позволяют записать ещё два эквивалентных выражения для расчета плотности распределения населения по уровню доходов $f_{12}(t)$ и $f_{13}(t)$:

$$f_{12}(t) =$$
$$= \pi\int_0^\infty g(\eta)\,((2\eta t - 1)J_1(\eta t)Y_1(t\eta) + 2/\pi)d\eta; \qquad (П41)$$

$$f_{13}(t) = \pi\int_0^\infty g(\eta)\,(2t\eta J_1(t\eta)Y_0(t\eta) -$$
$$- J_1(t\eta)Y_1(t\eta) - 2/\pi)d\eta. \qquad (П42)$$

В результате решения любого из уравнений (***П41***) или (***П42***) получается распределение $f(t)$, совпадающее с исходным.

Доказательство справедливости решения

Справедливость решения (22)

$$g_1(\eta) = exp(-\eta^2)\eta I_1(\eta^2)$$

будет доказана, если уравнение (22) (***П8***)

$$f(t) = \int_0^\infty g(\eta)\,R(\eta t)d\eta$$

при

$$g_1(\eta) = exp(-\eta^2)\eta I_1(\eta^2)$$

и

$$R(u) = 2\pi(-J_1(u)Y_1(u) + u(J_1(u)Y_0(u) + J_0(u)Y_1(u))$$

даст решение

$$f(t) = exp(-t^2/2).$$

Доказательство. В операторной форме функция $f(t)$ принимает вид (***П.6***):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} F(s)\,t^{-s}ds.$$

Здесь путь (C) есть бесконечная прямая, параллельная мнимой оси плоскости комплексной переменной s и лежащая в полосе (***П.4***).

В свою очередь для интегрального уравнения (***П8***) справедлива эквивалентная запись этого уравнения в операторной форме:

$$F(s) = G(1-s)\,R(s).$$

В нашем случае, резольвента

$$R(u) = -2\pi \frac{d}{du}[uJ_1(u)Y_1(u)].$$

В операторной форме резольвенте $R(u)$ соответствует отображение $R(s)$:

$$R(s) = -2\pi \frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{1}{2})\Gamma(2-\frac{s}{2})}.$$

Для получения отображения $G(1-s)$ найдем сначала $G(s)$ [3 с.260 (7.10.7)]:

$$G(s) = 2^{-1-s/2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{s}{2})\Gamma(-\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{s}{2})}.$$

Переходя к отображению $G(1-s)$ получим:

$$G(1-s) = 2^{-2+s/2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{1}{2})\Gamma(2-\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}.$$

Тогда $F(s) = G(1-s)\,R(s) = 2^{-1+s/2}\Gamma(s/2)$ и такому отображению $F(s)$ соответствует функция [2], [3]:

$$f(t) = \exp(-t^2/2).$$

Исходная функция $f(t)$ и результат, полученный обращением функции $g_1(\eta)$ полностью совпадают, что и доказывает справедливость выполненных преобразований.

Асимптотические оценки найденных ядер и резольвент

Поведение функций $J_v(u)$ и $Y_v(u)$ при конечных $u \to 0$ $|u| << 1$ для фиксированного порядка $|v| >= 0$ [6 с. 182 с. 189 с. 223]

$$J_v(u) \cong \frac{1}{\Gamma(v+1)}\left(\frac{u}{2}\right)^v;\ Y_0(u) \cong -\frac{1}{\pi}\ln\frac{2}{cu};$$

$$Y_v(u) \cong -\frac{\Gamma(v)}{\pi}\left(\frac{2}{u}\right)^v.$$

здесь c – константа Эйлера.

Например, $uJ_1(u)Y_1(u)$ при конечных $u \to 0$ $|u| << 1$ для фиксированного порядка $|v| >= 0$

$$uJ_1(u)Y_1(u) \cong -\frac{1}{\pi}u.$$

Асимптотически произведения $uJ_1^2(u)$, $uJ_1(u)Y_1(u)$ и $uY_1^2(u)$ вырождаются в обычные тригонометрические функции. Поведение функций $J_v(u)$ и $Y_v(u)$ при больших $|u| \to \infty$ равно:

$$J_v(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\cos(u - v\pi/2 - \pi/4);$$

$$Y_v(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\sin(u - v\pi/2 - \pi/4)\ (|u| >> 1\ |u| >> v).$$

И тогда $uJ_1(u)Y_1(u)$ при больших $|u| \to \infty$ стремится к

$$\frac{1}{\pi}\sin(2u - 3\pi/2) = \frac{1}{\pi}\cos(2u)$$

а

$uJ_1^2(u) - \frac{1}{\pi}$ при больших $|u| \to \infty$ стремится к

$$\frac{1}{\pi}\cos(2u + \pi/2) = -\frac{1}{\pi}\sin(2u)\ (|u| >> 1\ |u| >> v).$$

Модифицированная функция Бесселя 1-го рода 1-го порядка $I_v(x)$, если порядок действительный и аргумент $x = |x| > 0$, принимает действительные значения. При x $0 < |x| < 1$ поведение $I_v(x)$ описывается формулой

$$I_v(x) \cong \frac{1}{\Gamma(v+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^v.$$

Функция $I_v(x)$ при больших $|x| >> 1$ возрастает по показательному закону [6 с. 248].

Расчетные формулы и алгоритмы и для функций Бесселя приведены, например, в [8].

Литература

1. Mellin H. Acta matematical stock. 25, 139, 1902.
2. Градштейн И.С. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – /М.:Физматгиз, 1962, 1160 с.
3. Тичмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. – / М.: ГИТТЛ 1948.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. – /М.: ИЛ 1955.
5. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. – /М.: ИЛ 1949.
6. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. (Формулы, графики, таблицы) /М.: Наука 1964 г. 344 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – /М.: Физматгиз, 1961.
8. Лозинский Н.Н., Макушкин А.Т., Розенберг В.Я., Эрглис В.Р. Справочник программиста. Том 2. – /Л.: издательство «Судостроение» 1964 г. 852 с. (с. 430).
9. Айвазян С.А. Модель формирования распределения населения России по величине среднедушевого дохода. / М.: Экономика и математические методы. 1997. том 33 № 4 74-86 с.
10. Великанова Т.Б., Колмаков И.Б., Фролова Е.Б. Совершенствование методики и моделей распределения населения по среднедушевому доходу./ Вопросы статистики, № 5 1996.
11. Колмаков И.Б. Прогнозирование показателей дифференциации денежных доходов населения. – /М.: Проблемы прогнозирования. Из-во ИНП РАН № 1 2006. 136-162 с.
12. Суворов А.В. Доходы и потребление населения: макроэкономический анализ и прогнозирование. – /М.: МАКС Пресс, 2001. – 271 с.
13. Суринов А.Е. Уровень жизни населения России: 1992-2002 гг. (по материалам официальных статистических наблюдений). – М.: ИИЦ «Статистика России», 2003 . – 279 с.
14. Сухорукова Г.М., Митяева О.А. Моделирование структуры потребительских расходов населения. /М.: Проблемы прогнозирования, №1, 1999.
15. Швырков В.В. Экономико-математический анализ потребительского спроса. М.: МГУ,1966 . – 252 с.: ил.
16. Шевяков А.Ю., Кирута А.Я. Измерение экономического неравенства. – М.: «Лето», 2002. – 320 с.
17. Уровень жизни населения: методы и результаты анализа. // Вопросы статистики, – 2000, №8.- с.3 – 33.
18. Lerman R.I., Yitchaki Sh. A note on the calculation and interpretation of the Gini index. *Economic letter,* 1984, 15, 363-368.
19. Методологические положения по статистике. Выпуск 1,2,3,4 /М.: Госкомстат России, 1996, 1998, 1999, 2003.
20. Методика расчета баланса денежных доходов и расходов населения. Госкомстат России. Минэкономики России. Минфин России. Минтруд России. Центробанк России. / М.; Госкомстат России. 1996 – 19 с.
21. Статистическое обозрение. (Ежеквартальный журнал) – / М.: Госкомстат России, №1-№4, 1995-2006.
22. Доходы, расходы и потребление домашних хозяйств (по итогам выборочного обследования бюджетов домашних хозяйств) ГКС 1998-2005 г./ М..
23. Социальное положение и уровень жизни населения России: Стат. сб./М.: Госкомстат России, 1997-2006.

Контактный телефон:
+7 (495) 457-20-39
Колмаков Игорь Борисович
E-mail: kolibor@ rambler.ru

РЕЦЕНЗИЯ

Необходимость наблюдения и прогнозирования распределения населения по уровням среднедушевых среднемесячных денежных расходов (***СДР***) является не менее актуальной, чем исследования проблем распределения населения по уровням среднедушевых среднемесячных денежных доходов (***СДД***).

В современных экономических публикациях прогнозно-аналитические оценки расходов домашних хозяйств рассматриваются в основном в дискретной постановке с фиксацией их структурного (постатейного) уровня для разнодоходных групп населения в структуре баланса денежных доходов и расходов населения.

В рецензируемой статье рассматривается задача формирования математической функции распределения населения по уровням среднедушевых среднемесячных денежных расходов (***СДР***), которая заложена автором статьи в гипотезы об опережающем потреблении домашних хозяйств.

По аналогии с данными о плотности распределения населения по уровню среднедушевых среднемесячных денежных доходов (***СДД***) сделано предположение о существовании плотности распределения населения и по уровню ***СДР***.

На основе ряда гипотез автором предпринята попытка математического и экономического объяснения структуры распределения населения по уровню ***СДР***. При этом закладывается предположение, что значения функции расходов населения, по сравнению с функцией доходов будут смещены в сторону высоких расходов.

С этой целью анализируются доходы разных групп населения и для диапазона каждой из этих групп выстраиваются возможные варианты расходов. Распределение индивидуальных расходов домашних хозяйств описываются в рамках решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Совокупные решения всех домохозяйств о доходах и расходах сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода. В результате решений таких уравнений определяются плотности вероятности распределения населения по уровням доходов или расходов. Плотность распределения населения по уровню ***СДД*** и плотность распределения населения по уровню ***СДР*** достаточно жестко связаны между собой, т.к. макроэкономические факторы: оплата труда и/или трансферты, уровень инфляции, а также факторы финансового рынка (процентные ставки по депозитам и кредитам, котировки ценных бумаг и т.п.) влияют на решения домашних хозяйств о направлениях и объёмах расходов.

В итоге, плотность вероятности распределения населения по уровню расходов (в несимметричном варианте) при значениях расхода, превышающих величину $x > e^{\mu}$, имеет вид плотности вероятности распределения населения по уровню доходов, умноженной на поправочную функцию. При этом осуществляются исследования вида поправочной функции и её асимптотических свойств.

В работе впервые изложена методика автора по расчетам плотности распределения населения по уровню среднедушевых среднемесячных денежных расходов.

Для одного из частных случаев в результате решения замкнутой (прямой и обратной) задачи получено распределение, совпадающее с исходным, что подтверждает правильность выполненных преобразований, гипотез и исследуемой методики, являющихся основой теоретических положений автора в части гипотезы об опережающем потреблении домашних хозяйств.

Так как полученные результаты открывают довольно новое направление исследований, то они в последующем, несомненно, нуждаются в уточнениях.

Вместе с тем, по высокому уровню поставленных и решаемых проблем статья может быть рекомендована к опубликованию.

Турмачев Е.С., д.э.н., директор ЦИИР при Минэкономразвития России

10.3. OF THE THEORY OF ADVANCED CONSUMPTION OF HOUSE EQUIPMENTS

I.B. Kolmakov, Candidate of Science (Physico-Mathematical), the Senior Lecturer, the Professor of Faculty of Information Science of Faculty of Information Science

Russian Economic Academy it. G.V.Plehanova

The task of deriving community distribution function on monthly average spending (MAS) is discussed. To develop this function the author analyses different levels of income segregated groups of families in community and builds a model of probable ways of spending. Families separate decisions on how to spend are defined by differential equations in third power with floating variables. Cumulative decisions concerning earnings and spending made by community as a whole are reduced to type – I Fredholm integral equations. The ultimate resolution of this type of equation is probability density function describing community of families segregated by income or expense (spending) levels. The probability density function on community segregation by expenses with asymmetric level of expenses (grater than ($x>e^{\mu}$) is defined as product of probability density function of community segregation by income and correction function. The narrator observes and investigates correction function behavior and asymptotic properties. For the first time the method of calculation for community density distribution by monthly average spending per head is disclosed. The fair and true presentation of solutions and methods is proofed for one of particular reserved cases.