

## 8.4. О МЕТОДЕ ОЦЕНКИ РИСКОВ ИНВЕСТИРОВАНИЯ В ФИНАНСОВЫЕ АКТИВЫ С ВЫСОКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ

Назаренко К.М., соискатель

ГОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»

В работе предложен метод оценки рисков с использованием новой математической модели вероятностной смеси экстремальных величин, разработаны и строго обоснованы эффективные алгоритмы моделирования смеси экстремальных величин и вычисления размеров рисков капитала по VaR-технологии. На примере ценовых данных индекса Dow Jones 01.01.1950 – 10.08.2005 был проведен сравнительный анализ расчетов оценок VaR с использованием порогового метода и модели вероятностной смеси, показавший высокую эффективность смешанной модели для вычисления рисков капитала инвестиционной компании.

### Введение

Современные финансовые рынки характеризуются значительными колебаниями стоимостных показателей их активов, что, как правило, негативно отражается на экономическом развитии как отдельных компаний, так и регионов и стран в целом. Все это, как следствие, приводит к высокой волатильности ценных бумаг на фондовых рынках, возрастанию рисков значительных убытков от инвестирования в них, а также возникновения существенного ущерба от некорректного формирования видов вложения капитала и ценных бумаг для инвестирования. В связи с этим, как отмечается Базельским комитетом по регулированию банковской деятельности, одной из актуальных и значимых задач управления рисками является формирование рисков капитала инвестиционной компании и корректное вычисление его величины [1]. Основой методологии получения таких оценок является методика Value at Risk (VaR) [2], позволяющая оценить величину допустимого ущерба от рисков деятельности инвестиционной компании. Ее превышение может повлечь за собой последствия катастрофического характера – банкротство компании, дефолт по корпоративным обязательствам, снижение кредитного рейтинга компании и т.д. Проведенные нами исследования рисков инвестирования на фондовых и страховых рынках показали, что в условиях высокой волатильности финансовых активов основной проблемой является оценка предельно допустимой (пороговой) величины таких убытков.

Таким образом, современный уровень развития финансовых рынков предъявляет высокие требования к математическим методам количественного анализа и управления рисками, все большее место среди которых занимают методы теории экстремальных величин [3]. Наибольшее распространение среди них получили метод блок-максимумов и пороговый метод [4], основанные на обобщенных распределениях экстремальных величин. С точки зрения преимуществ практического использования пороговый метод, опирающийся на обобщенное распределение Парето, позволяет получить оценки экстремальных убытков, т.е. убытков, превышающих некоторую допустимую для компании величину. Тем не менее, недостатком порогового метода является необходимость априорного разделения статистики убытков на экстремальные и неэкстремальные [5]. Целью настоящей работы является разработка нового метода оценки рисков инвестирования в финансовые активы с высокой волатильностью, основанного на модели распределения экстремальных величин, свободной от детерминированного выбора порога.

### 1. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Для моделирования экстремальных величин воспользуемся математической теорией экстремальных

величин. В ее основе лежит теорема Фишера-Типпета, которая устанавливает три типа предельных распределений нормализованных экстремумов последовательностей независимых, одинаково распределенных случайных величин. Пусть таковыми являются случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , имеющие некоторую неизвестную функцию распределения  $F(x)$ . Обозначим

$$M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

и

$$W_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Очевидно, что

$$P(M_n < x) = F^n(x); \tag{1}$$

$$P(W_n \geq x) = 1 - L_n(x) = (1 - F(x))^n.$$

Рассмотрим вместо величин  $M_n$  ( $W_n$ ) нормализованные случайные величины

$$Z_n = \frac{M_n - a_n}{b_n} \left( \frac{W_n - c_n}{d_n} \right),$$

где

$$a_n \text{ и } b_n > 0;$$

$c_n$  и  $d_n > 0$  некоторые константы, и ее функцию распределения  $H_n(x)$ .

Найдем условия, которые нужно наложить на функцию распределения  $F(x)$ , при которых существуют такие последовательности констант  $a_n, b_n > 0, c_n, d_n > 0$ , что величина  $M_n$  ( $W_n$ ) может быть нормализована константами  $a_n, b_n > 0, c_n, d_n > 0$  так, чтобы пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(a_n + b_n x) = H(x); \tag{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - F(c_n + d_n x))^n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(c_n + d_n x) = L(x) \tag{3}$$

существовали для всех точек непрерывности функций  $H(x)$  и  $L(x)$  соответственно, где  $H(x)$  и  $L(x)$  – невырожденные функции распределения. Такая сходимость называется слабой сходимостью функций распределения случайных величин.

### Определение 1

Пусть  $H(x)$  – невырожденная функция распределения. Говорят, что функция распределения  $F(x)$  принадлежит области притяжения  $H(x)$ , если существуют последовательности  $a_n, b_n > 0$ , для которых справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) = H(x).$$

Сформулируем теоремы для максимумов и минимумов. Очевидно, что они эквивалентны, поскольку мы всегда сможем получить результаты для минимума из результатов для максимума, переходя от случайных величин  $X_j$  к величинам  $-X_j$ . Более подробное описание, а также доказательства сформулированных теорем можно найти, например, в монографии Я. Галамбоша [3].

Через  $\omega(F)$  и  $\alpha(F)$  обозначим верхнюю и нижнюю крайние точки случайной величины  $X$  соответственно.

**Теорема 1**

Пусть  $\omega(F) = \infty$ , и существует такая постоянная  $\gamma > 0$ , что для всех  $x > 0$  выполняется соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\gamma}. \tag{4}$$

Тогда существует последовательность  $b_n > 0$ , для которой выполняется соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < b_n x) = H_{1,\gamma}(x),$$

где

$$H_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-\gamma}), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Нормирующие константы  $b_n$  могут быть выбраны следующим образом:

$$b_n = \inf \{x : 1 - F(x) \leq 1/n\}.$$

**Пример 1**

Распределение Коши. Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x, \quad (-\infty < x < \infty).$$

Следовательно,  $\alpha(F) = -\infty$ ,  $\omega(F) = \infty$ . Обратимся к теореме 1, применяя правило Лопиталья, получим:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 + t^2)x}{1 + (tx)^2} = x^{-1}.$$

Приняв значение  $\gamma = 1$ , приходим к равенству:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Z_n < b_n x\} = \exp\left\{-\frac{1}{x}\right\} \quad (x > 0),$$

где

$$b_n = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right), \text{ находим из соотношения}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg b_n = \frac{1}{n}.$$

**Теорема 2**

Пусть  $\omega(F)$  конечна, и пусть функция распределения:

$$F^*(x) = F(\omega(F) - 1/x) \quad (x > 0)$$

удовлетворяет условию (4). Тогда можно выбрать такие последовательности  $a_n$ ,  $b_n > 0$ , для которых существует предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H_{2,\gamma}(x),$$

где

$$H_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ \exp(-(-x)^\gamma), & x < 0. \end{cases}$$

Замечание к теореме 2: константы  $a_n$ ,  $b_n$  можно определить следующим образом:

$$a_n = \omega(F)$$

и

$$b_n = \omega(F) - \inf \{x : 1 - F(x) \leq 1/n\}.$$

**Пример 2**

Равномерное распределение на отрезке [0,1]. Пусть функция распределения  $F(x)$  определяется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Таким образом,  $\alpha(F) = 0$ ,  $\omega(F) = 1$ , и для случайной величины  $Z_n$  можно применить теорему 2. Для  $x > 0$  введем функцию  $F^*(x) = F(1 - 1/x)$ . В нашем случае  $F^*(x) = 1 - 1/x$ , если  $x > 1$ . Применяя теорему 2 со значением  $\gamma = 1$  и учитывая, что справедливо равенство  $\inf \{x : 1 - F(x) \leq 1/n\} = 1 - 1/n$ , получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Z_n < 1 + x/n\} = H_{2,1}(x),$$

где (для конкретного случая)

$$H_{2,1}(x) = e^x,$$

если

$$x < 0 \text{ и } H_{2,1}(x) = 1,$$

если  $x \geq 0$ .

**Теорема 3**

Пусть при некотором конечном  $a$  справедливо соотношение

$$\int_a^{\omega(F)} (1 - F(y)) dy < \infty, \tag{6}$$

и для

$$\alpha(F) < t < \omega(F)$$

функция  $R(t)$  определена следующим образом:

$$R(t) = (1 - F(t))^{-1} \int_t^{\omega(F)} (1 - F(y)) dy.$$

Предположим также, что при всех вещественных  $x$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - F(t + xR(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}. \tag{7}$$

Тогда существуют такие последовательности  $a_n$ ,  $b_n > 0$ , для которых выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H_{3,0}(x),$$

где

$$H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}), \quad (-\infty < x < \infty). \tag{8}$$

Замечание к теореме 3: Центрирующие и нормирующие константы  $a_n$  и  $b_n$  могут быть выбраны следующим образом:

$$a_n = \inf \{x : 1 - F(x) \leq 1/n\}$$

и

$$b_n = R(a_n).$$

**Пример 3**

Стандартное нормальное распределение. Здесь в качестве примера можно привести функцию распределения

$$F(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

В этом случае  $\alpha(F) = -\infty$  и  $\omega(F) = \infty$ . При выборе констант

$$a_n = (2 \log n)^{1/2} - \frac{\log \log n + \log 4\pi}{2(2 \log n)^{1/2}}$$

и

$$b_n = (2 \log n)^{-1/2}$$

функция распределения случайной величины  $(Z_n - a_n)/b_n$  слабо сходится к  $H_{3,0}(x)$ .

Распределения  $H_{1,\gamma}(x)$ ,  $H_{2,\gamma}(x)$  и  $H_{3,0}(x)$ , называемые стандартными распределениями экстремальных величин, можно выразить в единой параметрической форме, называемой обобщенным распределением экстремальных величин (GEV). Пусть  $H_\xi(x)$  – функция распределения такая, что при всех  $x$ , удовлетворяющих соотношению  $0 < H_\xi(x) < 1$ , справедливо равенство:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\} & : \xi \neq 0 \\ \exp\{-e^{-x}\} & : \xi = 0 \end{cases}, \quad 1 + \xi x > 0, \quad (9)$$

где

$\xi$  – вещественное число.

Для  $\xi = 0$  определим  $H_\xi(x)$  как поточечный предел функции  $H_\xi(x)$  при  $\xi \rightarrow 0$ . Поэтому с точностью до сдвига и изменения масштаба из  $H_\xi(x)$  получаем  $H_{1,\gamma}(x)$ ,  $H_{2,\gamma}(x)$  и  $H_{3,0}(x)$  соответственно при  $\xi > 0$ ,  $\xi < 0$  и  $\xi = 0$ , причем  $\gamma = |1/\xi|$ , если  $\xi \neq 0$ . Эти распределения связаны между собой:

$$X \approx H_{1,\gamma}(x) \Leftrightarrow \ln X^\gamma \approx H_{3,0}(x) \Leftrightarrow -1/X \approx H_{2,\gamma}(x).$$

Параметр  $\xi$  называют параметром формы функции распределения  $H$ . Так как для любой случайной величины  $X \sim F_X$  и констант  $\mu \in \mathbb{R}$  и  $\sigma > 0$  функция распределения  $\tilde{X} = \mu + \sigma X$  задана:

$$F_{\tilde{X}}(x) = F_X\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

мы можем добавить параметры локализации и масштаба к указанной выше параметризации и рассматривать:

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x) = H_\xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Если теоремы 1-3 справедливы, то функция распределения  $F$  принадлежит области притяжения функции  $H$ , и пишут  $F \in MDA(H)$ . Большинство распределений в статистике лежат в  $MDA(H_\xi)$  с некоторым значением параметра  $\xi$ . Если  $F \in MDA(H_\xi)$  и  $\xi = 0$  или  $F \in MDA(H_\xi)$  и  $\xi < 0$ , то говорят, что функция  $F$  имеет тонкий или короткий хвост соответственно. Тонкохвостые ( $\xi = 0$ ) распределения включают в себя нормальное, экспоненциальное, гамма и логнормаль-

ное распределения. Короткохвостые ( $\xi < 0$ ) распределения имеют конечную правую границу и включают в себя равномерное и бета распределения. Тяжелохвостые распределения, которые лежат в области притяжения распределения Фреше,  $F \in MDA(H_\xi)$  с  $\xi > 0$ , особенно интересны в области исследования экстремальных величин.

Выше была описана математическая модель функции распределения экстремальных значений финансовых показателей в виде обобщенного распределения экстремальных величин  $H_{\xi,\mu,\sigma}$  (9). Покажем теперь, как ее можно использовать при анализе финансового состояния компании на основе выборки значений ее показателей. Одним из таких методов является метод блоков выборки, в котором предполагается, что максимумы имеют функцию распределения  $H_{\xi,\mu,\sigma}$ . Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_m$  – члены выборки, разобьем их на  $m$  смежных блоков длины  $n$ . Следует выбирать размер блока  $n$  достаточно большим, чтобы стало возможным применить результаты нашей предельной теоремы к

$$M_n^{(j)} = \max(X_{(j-1)n+1}, \dots, X_{(j-1)n+n}),$$

где  $j = 1, \dots, m$ .

Ряд данных должен быть достаточно длинным, чтобы его можно было разбить на  $m$  блоков длины  $n$ . Теперь нам нужно определить значения трех параметров:  $\xi$ ,  $\mu$  и  $\sigma$ , для оценки которых используем, например, метод максимального правдоподобия на основании распределения экстремальных величин. Количество блоков  $m$  также должно быть достаточно большим, чтобы позволить оценку параметров с достаточным уровнем доверия. Увеличивая число блоков  $m$ , мы уменьшаем дисперсию, при этом уменьшая размер блока  $n$ , что увеличивает смещение. После того как параметры GEV-модели  $H_{\xi,\mu,\sigma}$  по имеющимся в нашем распоряжении максимумам  $M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(m)}$  выбраны, мы можем вычислять интересующие нас квантили.

Положим, имеются  $n = 261$  дней измерений в году. Пусть нам требуется найти  $R_{261,k}$ , т.е. значение случайной величины, которое будет превосходить все остальные в году каждые  $k$  лет. Если это значение превышает в данный день, мы будем называть этот день эксцессивным, а тот год, к которому он относится, – эксцессивным годом.

Пока в эксцессивном году есть хотя бы один эксцессивный день. В противном случае это повлечет за собой необходимость рассмотрения свойства экстремальных событий формировать кластеры. Так как  $M_{261}$  является наименьшим среди  $R_{261,k}$  из  $k-1$  за  $k$  лет, то  $R_{261,k}$  является квантилем порядка  $1-1/k$  функции распределения случайной величины  $M_{261}$ :

$$R_{261,k} = \inf \left\{ r \mid P(M_{261} \leq r) \geq 1 - \frac{1}{k} \right\}. \quad (10)$$

Если мы предполагаем, что  $M_{261}$  приблизительно распределена по закону  $H_{\xi,\mu,\sigma}$ , то квантиль  $R_{261,k}$  может быть вычислена следующим образом:

$$R_{261,k} = H_{\xi,\mu,\sigma}^{-1} \left( 1 - \frac{1}{k} \right) = \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left( \left( -\ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \right)^{-\xi} - 1 \right), \quad \xi \neq 0, \quad (11)$$

так как обратная функция к  $y = \exp\{-(1 + \xi x)\}^{-1/\xi}$  есть  $x = (1/\xi)[(-\ln y)^{-\xi} - 1]$ .

На рис. 1 показана аппроксимация максимальных значений блоков выборки исторических данных фондового индекса NASDAQ 01.01.1976-01.01.2007 обобщенным распределением экстремальных величин.

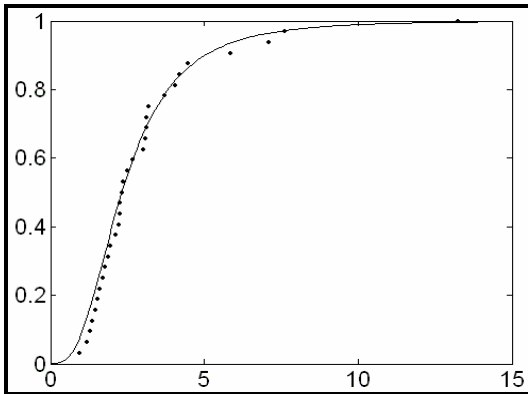


Рис. 1. GEV-распределение  $H_{\xi,\mu,\sigma}$ , аппроксимирующее 31 ежегодных максимума дневных приращений фондового индекса NASDAQ

Рассмотренный выше метод блок-максимумов нами был применен для проведения стресс-тестинга, т.е. построения и анализа наихудшего сценария изменения финансовых показателей компаний. Нас будут интересовать квантили высокого порядка функции распределения  $F$  приращений наблюдений  $X_i$ , а не максимумов  $M_n$ . Если  $X_i \sim F$  имеет непрерывное распределение, то мы получаем:

$$P(M_n \leq R_{n,k}) = 1 - 1/k.$$

Если они к тому же независимы и одинаково распределены, то

$$P(M_n \leq R_{n,k}) = (P(X \leq R_{n,k}))^n,$$

где  $X \sim F$ , откуда

$$P(X \leq R_{n,k}) = (1 - 1/k)^{1/n}. \quad (12)$$

Это означает, что  $R_{n,k}$  представляет собой квантиль порядка  $(1 - 1/k)^{1/n}$  функции распределения  $F$ . Предположим, что нам нужно вычислить значение квантиля очень высокого порядка с целью проведения стресс-тестинга. Зафиксируем размер блока  $n$  для настройки модели. Это оставляет свободным параметр  $k$  для  $R_{n,k}$ . Квантили высокого порядка  $\alpha$ ,  $x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$  функции  $F$  могут быть вычислены из (12) путем выбора  $\alpha = (1 - 1/k)^{1/n}$ , что соответствует  $k = 1/(1 - \alpha^n)$ . Откуда

$$x_\alpha(X) = R_{n,k}, \quad (13)$$

где  $k = \frac{1}{1 - \alpha^n}$ . На практике для заданного  $\alpha$  сначала выбирают  $k = 1/(1 - \alpha^n)$ , затем вычисляют  $R_{n,k}$ , используя выражение (11), и таким образом получают  $x_\alpha(X) = R_{n,k}$ .

Современный подход к моделированию и анализу стоимостных показателей ценных бумаг с высокой волатильностью предполагает описание не только их наибольших (максимальных) значений, но и значений, превосходящих некоторый, заранее известный верхний порог. Такой подход называют методом надпороговых значений (Peaks Over Threshold (POT)) [6]. Кратко изложим его содержание. Обозначим через  $F(x)$  функцию распределения вещественной случайной величины  $X$  и пусть

$$F_u(x) = P(X \leq u + x | X > u).$$

Согласно теореме Балкема, де Хаана,  $X$  принадлежит области притяжения функции распределения экстремальных величин, если и только если существует положительная вещественная функция  $a(u)$ , такая, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} |F_u(xa(u)) - G_{\xi,\sigma}(x)| = 0, \quad (14)$$

где  $G_{\xi,\sigma}$  – обобщенное распределение Парето с параметрами  $\xi$  и  $\sigma$  [7]. Это распределение имеет следующий вид

$$G_{\xi,\sigma}(x) = 1 - (1 + \xi x/\sigma)^{-1/\xi}, \quad (15)$$

если  $\xi \neq 0$ , или если  $\xi > 0$  и  $x > 0$ , или если  $\xi < 0$  и  $0 < x < -\sigma/\xi$ , и  $G_{\xi,\sigma}(x) = 1 - \exp(x/\sigma)$ , если  $\xi = 0$  и  $\sigma > 0$ .

Очевидно, что распределение имеет тяжелый хвост, если  $\xi > 0$ . Следовательно, для некоторого высокого порога  $u$ ,  $F_u(x)$  может быть аппроксимирована обобщенным распределением Парето (15) с соответствующими значениями параметров  $\xi$  и  $\sigma$ . На практике аппроксимация хвоста эмпирической функции распределения осуществляется по цензурированным данным, либо сама выборка целиком уже является таковой, причем параметр  $u$ , как правило, неизвестен. Таким образом, для строго обоснованного применения модели (15) хвоста эмпирического распределения, т.е. справедливости теоремы де Хаана (14), необходимо корректно оценить пороговую величину цензурирования, фактически описываемой параметром  $u$ . С одной стороны, величина порога  $u$  должна быть выбрана достаточно большой, что оставляет лишь небольшое количество членов выборки для оценки параметров  $\xi$  и  $\sigma$ , что приводит к возрастанию их вариаций, с другой стороны, слишком низкий порог приводит к нарушению условия (14) и к увеличению систематической ошибки их оценок.

В связи с изложенным выше методы фиксированного выбора порога, каковым является пороговый метод, не позволяют решить задачу вычисления необходимого размера рискового капитала финансовой компании, позволяющего ей осуществлять эффективные инвестиционные стратегии. В следующем разделе нами предложена и исследована новая модель функции распределения экстремальных данных, позволяющая более гибкое ее описание.

## 2. МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТНОЙ СМЕСИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Одним из эффективных направлений решения поставленной задачи является развитие адаптивных методов, не требующих предварительного выбора порога. В работе [8] предлагается упрощенный механизм проверки модели для выбора порога. В данном методе каждой точке исходных данных присваивается некоторый вес от 0 до 1, более высокий вес означает достаточную точность аппроксимации. Несмотря на ее преимущество, все еще остается потребность использования порога для уровня весов.

В этом параграфе развивается адаптивный подход к моделированию функции распределения убытков, опирающийся на три следующих положения: во-первых, в отличие от порогового метода при моделировании нами принимается во внимание вся выборка; во-вторых, в качестве модели эмпирической функции распределения используется вероятностная смесь двух распределений, одним из которых является распределение (15); в-третьих, по мере стремления к  $\omega(X)$  доля случайных величин, имеющих распределение (15), является монотонно неубывающей функцией.

### Теорема 4

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – совокупность неотрицательных, независимых или слабостационарных, одинаково распределенных, случайных величин, в которой доля значений, имеющих распределение (15), описывается возрастающей функцией  $p(x; \theta)$ , принимающей значения на  $(0, 1]$ , такой, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x; \theta) = 1. \tag{16}$$

Тогда их плотность распределения имеет следующий вид

$$I(x) = \frac{[1 - p(x; \theta)]f(x; \beta) + p(x; \theta)g(x; \xi, \sigma)}{Z(\theta, \beta, \xi, \sigma)}, \tag{17}$$

где

$g(x; \xi, \sigma)$  – плотность распределения (15),

$$g(x; \xi, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \left( 1 + \frac{\xi x}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\xi} - 1}; \tag{18}$$

$f(x; \beta)$  – некоторая другая плотность распределения;

$Z(\theta, \beta, \xi, \sigma)$  – нормализующая константа.

Доказательство приведено в работе [9].

Модель (17) является вероятностной смесью  $f$  и  $g$ , где смешивающая функция  $p(x; \theta)$  зависит от  $x$ . Согласно свойству (16), правый хвост  $I(x)$  определяется для больших  $x$  компонентом (15), тогда как левый хвост описывается с помощью функции  $f(x)$ .

В качестве модели (17) рассмотрим следующую: будем использовать в качестве смешивающей функции

$$p(x, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \left( \frac{x - \mu}{\tau} \right),$$

$$\theta = (\mu, \tau), \quad \mu, \tau > 0 \tag{19}$$

с параметрами локализации  $\mu$  и масштаба  $\tau$ . В качестве левого компонента смеси возьмем распределение Вейбулла, плотность которого имеет следующий вид:

$$f(x; \beta, \lambda) = \beta \lambda^\beta x^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta}, \quad \beta, \lambda > 0. \tag{20}$$

Нормализующая константа в этом случае имеет следующий вид:

$$Z = \int_0^\infty \left( \beta \lambda^\beta x^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg \left( \frac{x - \mu}{\tau} \right) \right) + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \left( \frac{x - \mu}{\tau} \right) \right) \left( 1 + \frac{\xi x}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\xi} - 1} \right) dx.$$

Рассматриваемая плотность распределения  $I(x)$  (17) имеет шесть параметров:  $\beta$  и  $\lambda$  для компонента плотности Вейбулла,  $\mu$  и  $\tau$  – смешивающей функции  $p$ ,  $\xi$  и  $\sigma$  – для плотности распределения (18).

Тяжелохвостые распределения могут быть формально описаны с помощью понятия регулярно изменяющихся функций.

### Определение 2

Измеримая функция  $h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  является регулярно меняющейся на бесконечности с индексом  $\rho \in \mathbb{R}$  (обозначим через  $h \in RV_\rho$ ) если, для  $x > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\rho.$$

Если  $\rho = 0$ ,  $h$  называется медленно меняющейся (на бесконечности). Будем обозначать медленно меняющиеся функции через  $L$ . Если  $h \in RV_\rho$ , то  $h(x)/x^\rho \in RV_0$ . Далее, полагая  $L(x) = h(x)/x^\rho$ , получаем, что функция  $h \in RV_\rho$  представима как  $h(x) = L(x)x^\rho$ .

### Пример 1

Пусть

$$F(x) = 1 - x^{-\alpha}, \quad \text{для } x \geq 1 \text{ и } \alpha > 0.$$

Тогда

$$\bar{F}(tx)/\bar{F}(t) = x^{-\alpha} \quad \text{для } t > 0.$$

Из чего следует, что  $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ .

### Пример 2

Пусть

$$F(x) = \Phi_\alpha(x) \exp\{-x^{-\alpha}\},$$

где

$$x > 0 \text{ и } \alpha > 0.$$

Тогда

$$\frac{\bar{F}(x)}{x^{-\alpha}} = x^\alpha \left( 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^{-\alpha})^k}{k!} \right) \quad 1 - x^{-\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-x^{-\alpha})^{k-2}}{k!} \rightarrow 1$$

при  $x \rightarrow \infty$ .

Откуда

$$\bar{F}(tx)/\bar{F}(t) \sim (tx)^{-\alpha}/t^{-\alpha} = x^{-\alpha}$$

при  $t \rightarrow \infty$ , т.е.  $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ .

**Определение 3**

Говорят, что неотрицательная случайная величина является регулярно меняющейся, если ее функция распределения  $F$  удовлетворяет  $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$  для некоторого  $\alpha \geq 0$ .

**Определение 4**

Обобщенная обратимость. Пусть  $h$  – неубывающая на  $\mathbb{D}$ . Определим обобщенную обратную  $h$  следующим образом

$$h^{\leftarrow}(u) = \inf \{x \in \mathbb{D} : h(x) \geq u\}, \tag{21}$$

принимая  $\inf \emptyset = \infty$ .

Далее характеризуем область притяжения максимумов распределений Фреше и Вейбулла.

**Теорема 5**

Область притяжения максимумов  $\Phi_{\alpha}$ . Функция распределения  $F$  лежит в области притяжения максимумов  $\Phi_{\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ), если и только если  $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ). Если  $F \in MDA(\Phi_{\alpha})$ , то

$$a_n^{-1}M_n \xrightarrow{d} \Phi_{\alpha},$$

с

$$a_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}).$$

Заметим, что если

$$F(x) = 1 - x^{-\alpha},$$

для  $x > 1$ , то

$$F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) = n^{1/\alpha}.$$

Отметим также, что  $\Psi_{\alpha}(-x^{-1}) = \Phi_{\alpha}(x)$  при  $x > 0$ , что свидетельствует о тесной связи  $MDA(\Psi_{\alpha})$  и  $MDA(\Phi_{\alpha})$ . О чем сказано в следующем утверждении.

**Теорема 6**

Область притяжения максимумов  $\Psi_{\alpha}$ . Функция распределения  $F$  лежит в области притяжения максимумов  $\Psi_{\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ), если и только если  $\omega(F) < \infty$  и  $\bar{F}(\omega(F) - x^{-1}) \in RV_{-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ). Если

$$F \in MDA(\Psi_{\alpha}),$$

то

$$a_n^{-1}(M_n - \omega(F)) \xrightarrow{d} \Psi_{\alpha},$$

где

$$a_n = \omega(F) - F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}).$$

Теоремы 5 и 6 доказаны Б.В. Гнеденко в работе [10].

Покажем, что (17) обладает хвостовыми свойствами (15). Сделаем некоторые предположения относительно свойств смешивающей функции. Пусть  $\omega(X) = \infty$ .

**Теорема 7**

Пусть  $p(x)$  – медленно меняющаяся функция,  $f$  и  $g$  – два тяжелохвостых распределения, такие что  $P(X > x) \sim cx^{-1/\xi}$  для больших  $x$ . Обозначим их хво-

стовые индексы через  $\xi_g$  и  $\xi_f$  соответственно и предположим, что  $\xi_g < \xi_f$ , так, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)/f(t) = 0$ . Тогда смесь  $(1 - p(x))f(x) + p(x)g(x)$  после нормализации на константу  $Z$  является плотностью с хвостовым индексом  $\xi_g$ . Утверждение остается верным даже в том случае, когда  $f$  – легкохвостое распределение.

Доказательство приведено в работе [9].

Другим выбором для функции  $p$  может служить функция Хевисайда

$$p(x, \theta) = \begin{cases} 1, & x \geq \theta, \\ 0, & x < \theta. \end{cases} \tag{22}$$

В этом случае параметр  $\theta$  является порогом  $u$ , над которым в модели (17) участвует лишь компонент (15).

**3. Алгоритм генерирования вероятностных смесей**

Для моделирования величин с динамически смешанным распределением мы предлагаем использовать следующий алгоритм.

**Алгоритм 1**

Генерирование динамически смешанной выборки (17).

- Шаг 1. Генерировать  $U$  равномерно на  $[0,1)$ .
- Шаг 2. Если  $U < 1/2$ , то генерировать  $x$  из  $f(x)$ ; взять  $x$  с вероятностью  $1 - p(x)$  и закончить; или, с вероятностью  $p(x)$ , вернуться к шагу 1.
- Шаг 3. Если  $U \geq 1/2$ , то генерировать  $x$  из  $g(x)$ ; взять  $x$  с вероятностью  $p(x)$  и закончить; или, с вероятностью  $1 - p(x)$ , вернуться к шагу 1.

Покажем, что алгоритм 1 действительно позволяет получить выборку с плотностью распределения (17). Определим величину-индикатор  $A = 1$ , если  $x$  принят,  $A = 0$  в противном случае. Тогда

$$P(X \leq x | A = 1) = \frac{P(X \leq x, A = 1)}{P(A = 1)} = \frac{P(X \leq x, A = 1, U < 1/2) + P(X \leq x, A = 1, U \geq 1/2)}{P(A = 1)},$$

откуда получаем соответствующую плотность распределения,

$$\frac{1/2(1 - p(x))f(x) + 1/2 p(x)g(x)}{1/2 \int_0^{\infty} [(1 - p(y))f(y) + p(y)g(y)] dy} \equiv l(x).$$

Исследуемые для калибровки алгоритмов выборки были генерированы при помощи алгоритма 1. Для оценки параметров модели по имеющейся выборке нами использовался метод максимального правдоподобия, при этом для вычисления нормализующей константы  $Z$  производилось численное интегрирование. Нами исследовались 12 различных комбинаций параметров. Использовались только положительные значения  $\xi$ , чтобы  $g(x)$  и  $l(x)$  были тяжелохвостыми.

Форма плотности распределения Вейбулла в значительной степени зависит от значения параметра  $\beta$ . В случае  $\beta < 1$ ,  $f(x)$  не имеет моды и  $f'(x) < 0$  для всех

положительных значений  $x$ , в случае  $\beta > 1$  функция  $f(x)$  унимодальна. В случае  $\beta = 1$ ,  $f(x)$  представляет собой экспоненциальное распределение. В экспериментах мы использовали значения  $\beta = 2.0$  и  $\beta = 0.5$ . Значение параметра  $\lambda$  выбиралось таким образом, чтобы математическое ожидание плотности распределения Вейбулла равнялась 1, т.е.  $\lambda = \Gamma(1 + 1/\beta)$ . В весовой функции мы

использовали значения  $\mu \in \{1/2, 1, 5\}$  и  $\tau \in \{1/2, 1, 5\}$ . Значение параметра  $\xi$  выбиралось  $\xi \in \{1/4, 1/2, 1\}$ , в случае  $\xi = 1$  распределение имеет наиболее тяжелый хвост. Значение масштабирующего параметра обобщенного распределения Парето  $\sigma \in \{1/2, 1, 5\}$ . Комбинации выбираемых значений параметров приведены в табл. 1 и 2 (обозначены номерами с 1 по 12).

Таблица 1

КОМБИНАЦИИ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ И ИХ ОЦЕНОК МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ, ДЛЯ РАЗМЕРА ВЫБОРКИ  $N=1000$

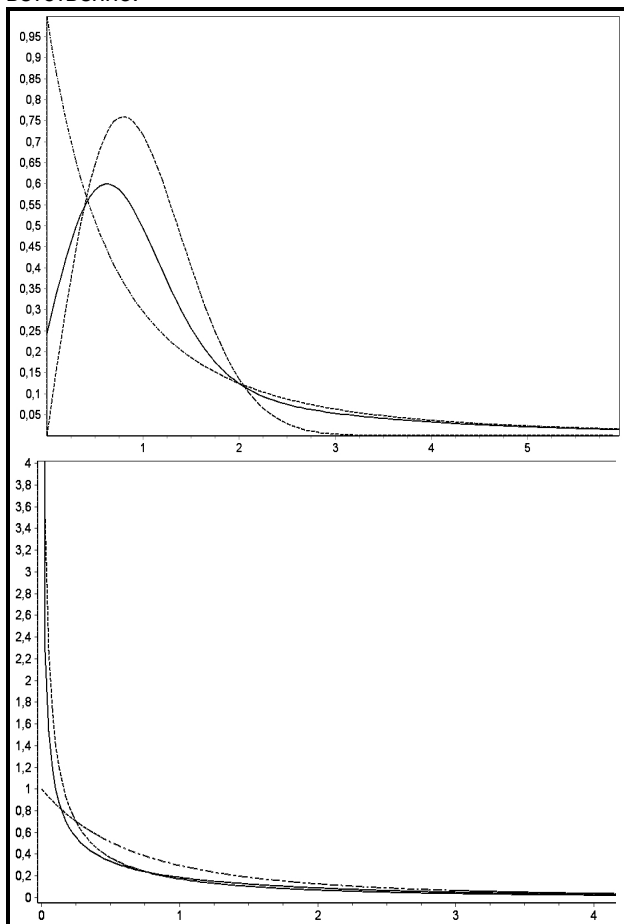
Case	Weibull component parameters				Weight function parameters				GPD component parameters			
	$\beta$	$\hat{\beta}$	$\lambda$	$\hat{\lambda}$	$\mu$	$\hat{\mu}$	$\tau$	$\hat{\tau}$	$\xi$	$\hat{\xi}$	$\sigma$	$\hat{\sigma}$
1	2.0	2.486 (0.616)	0.886	0.892 (0.082)	1.0	0.638 (0.292)	1.0	0.411 (0.281)	0.5	0.471 (0.086)	1.0	0.945 (0.246)
2	2.0	1.873 (0.168)	0.886	0.890 (0.047)	1.0	1.897 (0.936)	1.0	2.197 (2.061)	0.25	0.195 (0.100)	1.0	1.251 (0.308)
3	2.0	1.666 (0.192)	0.886	0.559 (0.168)	1.0	1.078 (0.135)	1.0	0.184 (0.130)	1.0	1.124 (0.092)	1.0	0.472 (0.249)
4	2.0	2.334 (0.414)	0.886	0.916 (0.123)	1.0	0.656 (0.320)	1.0	1.150 (1.552)	0.5	0.405 (0.109)	0.5	0.588 (0.216)
5	2.0	2.109 (0.202)	0.886	0.914 (0.085)	1.0	0.715 (0.367)	1.0	0.887 (0.457)	0.5	0.403 (0.059)	5.0	5.472 (0.537)
6	2.0	1.941 (0.525)	0.886	0.730 (0.173)	0.5	0.496 (0.278)	1.0	0.427 (0.292)	0.5	0.610 (0.099)	1.0	0.753 (0.243)
7	2.0	1.988 (0.073)	0.886	0.901 (0.018)	5.0	4.764 (0.344)	0.5	0.697 (0.305)	0.5	0.339 (0.090)	1.0	1.091 (0.204)
8	2.0	2.035 (0.257)	0.886	0.983 (0.058)	1.0	1.106 (0.441)	5.0	0.581 (0.269)	0.5	0.410 (0.070)	1.0	1.251 (0.192)
9	2.0	1.961 (0.161)	0.886	0.909 (0.040)	1.0	2.586 (1.347)	1.0	6.305 (5.154)	0.5	0.581 (0.083)	1.0	0.910 (0.193)
10	0.5	0.488 (0.036)	2.0	1.919 (1.430)	1.0	1.533 (1.142)	1.0	1.066 (1.406)	0.5	0.429 (0.092)	1.0	1.101 (0.236)
11	0.5	0.542 (0.037)	2.0	1.283 (0.905)	1.0	1.020 (0.497)	1.0	0.226 (0.234)	0.25	0.308 (0.082)	1.0	0.892 (0.224)
12	0.5	0.484 (0.035)	2.0	2.123 (2.410)	1.0	1.216 (1.602)	1.0	1.042 (1.443)	1.0	0.995 (0.112)	1.0	1.090 (0.279)

Таблица 2

КОМБИНАЦИИ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ И ИХ ОЦЕНОК МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ, ДЛЯ РАЗМЕРА ВЫБОРКИ  $N=10\ 000$

Case	Weibull component parameters				Weight function parameters				GPD component parameters			
	$\beta$	$\hat{\beta}$	$\lambda$	$\hat{\lambda}$	$\mu$	$\hat{\mu}$	$\tau$	$\hat{\tau}$	$\xi$	$\hat{\xi}$	$\sigma$	$\hat{\sigma}$
1	2.0	2.059 (0.091)	0.886	0.888 (0.024)	1.0	1.001 (0.169)	1.0	1.007 (0.254)	0.5	0.496 (0.030)	1.0	0.998 (0.078)
2	2.0	2.126 (0.118)	0.886	0.914 (0.023)	1.0	0.739 (0.157)	1.0	1.066 (0.269)	0.25	0.193 (0.023)	1.0	1.061 (0.062)
3	2.0	2.055 (0.085)	0.886	0.883 (0.021)	1.0	0.975 (0.132)	1.0	1.099 (0.233)	1.0	1.018 (0.034)	1.0	0.962 (0.078)
4	2.0	2.103 (0.127)	0.886	0.815 (0.042)	1.0	0.836 (0.112)	1.0	0.661 (0.172)	0.5	0.519 (0.030)	0.5	0.440 (0.046)
5	2.0	1.933 (0.076)	0.886	0.894 (0.036)	1.0	1.088 (0.187)	1.0	1.081 (0.346)	0.5	0.459 (0.021)	5.0	5.376 (0.243)
6	2.0	1.809 (0.091)	0.886	0.904 (0.027)	0.5	0.730 (0.229)	1.0	1.837 (0.647)	0.5	0.451 (0.032)	1.0	1.122 (0.091)
7	2.0	2.004 (0.025)	0.886	0.881 (0.006)	5.0	4.973 (0.211)	0.5	1.059 (0.165)	0.5	0.502 (0.032)	1.0	1.002 (0.073)
8	2.0	1.891 (0.079)	0.886	0.860 (0.031)	1.0	1.095 (0.102)	5.0	0.470 (0.092)	0.5	0.490 (0.025)	1.0	0.988 (0.063)
9	2.0	2.046 (0.067)	0.886	0.877 (0.023)	1.0	0.418 (0.649)	1.0	5.122 (3.334)	0.5	0.498 (0.035)	1.0	0.994 (0.115)
10	0.5	0.495 (0.014)	2.0	2.002 (1.291)	1.0	0.929 (0.702)	1.0	0.859 (0.274)	0.5	0.497 (0.034)	1.0	0.988 (0.121)
11	0.5	0.506 (0.012)	2.0	2.044 (1.157)	1.0	0.926 (0.473)	1.0	0.829 (0.381)	0.25	0.257 (0.033)	1.0	0.967 (0.107)
12	0.5	0.530 (0.012)	2.0	2.047 (0.482)	1.0	0.628 (0.229)	1.0	0.327 (0.241)	1.0	0.995 (0.030)	1.0	1.027 (0.063)

Для каждой комбинации параметров генерировались выборки размером  $N=1000$  и  $10\ 000$ . На рисунке 2 изображены плотности распределения для случаев 1 и 10. В первом случае распределение Вейбулла унимодально, тогда как в случае 10 распределение Вейбулла не имеет моды. Табл. 1 и 2 содержат результаты вычислений для случаев  $N=1000$  и  $N=10\ 000$  соответственно.



**Рис. 2.** Плотности смешанной модели  $I(x)$  —, компонентов  $f(x)$  ---,  $g(x)$  -·-·- для случая 1 (вверху) и случая 10 (внизу). В случае 1 распределение Вейбулла унимодально ( $\beta = 2.0$ ,  $\lambda = \Gamma(1.5)$ ), тогда как в случае 10 – не имеет моды ( $\beta = 0.5$ ,  $\lambda = 2.0$ ). В обоих случаях остальные параметры равны  $\mu = 1.0$ ,  $\tau = 1.0$ ,  $\xi = 0.5$  и  $\sigma = 1.0$

#### 4. ОЦЕНКА РИСКОВ ИНВЕСТИРОВАНИЯ В ЦЕННЫЕ БУМАГИ НА ФОНДОВЫХ РЫНКАХ

Как известно, практическая деятельность кредитно-финансовых организаций не всегда является прибыльной, и они по разным причинам несут убытки. Некоторые из них не наносят значительного ущерба. Однако возможны и такие убытки, которые угрожают нанести организации урон, не позволяющий ей в дальнейшем осуществлять свою финансовую деятельность. Поэтому одной из основных задач, например, в банковском секторе, является задача вычисле-

ния размеров резервного, рискованного капитала с целью страхования рисков, неизбежно присутствующих в банковской деятельности. Поэтому возникает задача определения величины рискованного капитала, текущей стоимости выданных кредитов и т.д., т.е. некоторого критического уровня, превышение которого в случае наступления экстремального события станет катастрофическим для предприятия [11]. В частности, для оценки размеров рискованного капитала общепринятой является концепция Value at Risk (VaR) Базельского комитета по контролю и регулированию банковской деятельности. В ее основании лежит понятие условной квантили  $x_q$ ,

$$x_q = \inf(x \in D, F_x(x) \geq q),$$

где

$X$  – величина убытков предприятия с функцией распределения  $F_x(x)$ ,  $q$  – уровень значимости.

Таким образом, VaR-технология на практике состоит в вычислении допустимого, порогового уровня убытков компании, а именно условной квантили  $x_q$

$$VaR(q) = x_q. \tag{23}$$

Используя выражение (21) для модели (17), можно получить оценку величины (23) как обобщенную обратную величину функции распределения с плотностью  $I(x)$ . Соответственно, под экстремальными убытками будем понимать убытки, превышающие величину зарезервированного рискованного капитала.

Предложенная нами модель позволяет решить эту задачу следующим образом. Следуя введенным ранее обозначениям, определим значение порога  $x_\varepsilon$  следующим образом

$$x_\varepsilon = \left\{ x : \inf_x (P(X > x, Z \notin A | 1) \leq \varepsilon) \right\}$$

для некоторого достаточно малого значения  $\varepsilon$ .

Тем самым для  $X$ , имеющего плотность распределения  $I$ , пороговое значение  $x_\varepsilon$  определяется как:

$$\varepsilon = P_i(X > x_\varepsilon \cap X \sim f(x)),$$

и может быть найдено из уравнения:

$$\frac{\int_{x_\varepsilon}^{\infty} [1 - p(x)] f(x) dx}{\int_0^{\infty} [(1 - p(x)) f(x) + p(x) g(x)] dx} = \varepsilon,$$

которое, в силу того, что  $f(x)$  имеет легкий хвост, а  $g(x)$  – тяжелый, эквивалентно следующему уравнению:

$$\frac{1 - p(x, \theta) f(x)}{p(x, \theta) g(x)} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \tag{24}$$

В табл. 3 приведены результаты оценки порогового значения  $\hat{x}_\varepsilon$  для каждого из двенадцати случаев с  $\varepsilon = 0.001$ . В табл. 3 также приведены оценки параметров распределения (15), используя члены выборки, превосходящие  $\hat{x}_\varepsilon$ . Анализ таблицы 3 позволяет сделать вывод о том, что выбор  $\hat{x}_\varepsilon$  в качестве порогового значения в большинстве случаев является оправданным.

В данном разделе мы используем смешанную модель для аппроксимации эмпирической функции распределения 4 246 логарифмических приращений фондового индекса Dow Jones за период 01.01.1950 – 10.08.2005.



Таблица 3

ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОБОБЩЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРЕТО, ПОЛУЧЕННЫЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ N ЧЛЕНОВ ВЫБОРКИ, ПРЕВОСХОДЯЩИХ ПОРОГОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ  $\hat{x}_\varepsilon$ , ПОЛУЧЕННОЕ ИЗ УРАВНЕНИЯ (24) ДЛЯ ЗНАЧЕНИЯ  $\varepsilon=0.001$  (среднеквадратичные отклонения оценок параметров указаны в скобках)

Case	$\xi$	$\sigma$	N = 1 000				N = 10 000			
			$\hat{\xi}$	$\hat{\sigma}$	N	$\hat{x}_\varepsilon$	$\hat{\xi}$	$\hat{\sigma}$	N	$\hat{x}_\varepsilon$
1	0.5	1.0	0.356 (0.110)	1.402 (0.420)	165	2.72	0.506 (0.043)	0.950 (0.118)	1252	3.40
2	0.25	1.0	0.137 (0.154)	1.601 (0.866)	60	3.97	0.216 (0.043)	0.994 (0.146)	841	3.20
3	1.0	1.0	0.720 (0.163)	2.257 (1.050)	122	6.05	1.007 (0.046)	0.934 (0.099)	1 946	3.44
4	0.5	0.5	0.113 (0.199)	1.982 (1.524)	58	3.00	0.373 (0.065)	0.876 (0.223)	455	3.70
5	0.5	5.0	0.396 (0.064)	5.133 (0.564)	483	2.70	0.431 (0.023)	5.115 (0.217)	4 057	3.52
6	0.5	1.0	0.667 (0.179)	0.644 (0.349)	107	4.16	0.447 (0.044)	1.123 (0.151)	1 059	3.94
7	0.5	1.0	0.078 (0.131)	3.338 (1.685)	62	4.06	0.329 (0.046)	2.082 (0.332)	741	4.09
8	0.5	1.0	0.412 (0.110)	1.205 (0.357)	161	3.00	0.465 (0.042)	1.068 (0.134)	1 157	3.66
9	0.5	1.0	0.296 (0.148)	2.410 (1.219)	82	3.86	0.460 (0.048)	1.117 (0.172)	937	3.70
10	0.5	1.0	—(—)	—(—)	1	57.10	0.376 (0.435)	2.011 (6.309)	18	41.91
11	0.25	1.0	—(—)	—(—)	0	65.18	—(—)	—(—)	0	95.88
12	1.0	1.0	0.858 (0.295)	1.443 (1.689)	33	26.70	0.922 (0.082)	1.026 (0.295)	557	14.08

Таблица 5

На рис. 3 показана гистограмма распределения выборки и ее аппроксимация смешанной моделью, полученные оценки параметров модели приведены в табл. 4. Полученные значения VaR приведены в табл. 5. Пороговые значения для различных уровней значимости представлены в табл. 6. Табл. 7 содержит значения квантилей, полученные с помощью пороговой модели с различными значениями порога. В скобках указаны среднеквадратичные отклонения оценок.

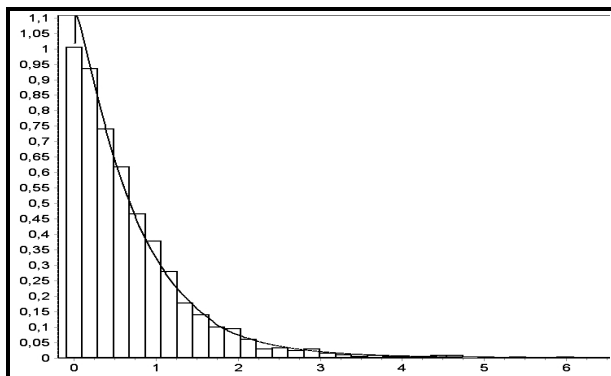


Рис. 3. Гистограмма логарифмических приращений индекса DJ и ее аппроксимация

Таблица 4

ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СМЕШАННОЙ МОДЕЛИ, ПОЛУЧЕННЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ АППРОКСИМАЦИИ ДАННЫХ ИНДЕКСА DOW JONES

Weibull component parameters		Weight function parameters		GPD component parameters	
$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\tau}$	$\hat{\xi}$	$\hat{\sigma}$
1.415	1.2	0.545	1.935	0.25	0.5

ЗНАЧЕНИЯ VAR ДЛЯ ДАННЫХ ИНДЕКСА DOW JONES, ПОЛУЧЕННЫЕ ПРИ ПОМОЩИ СМЕШАННОЙ МОДЕЛИ СО ЗНАЧЕНИЯМИ ПАРАМЕТРОВ ПРИВЕДЕННЫМИ В ТАБЛ. 4

q	0.95	0.99	0.999	0.9999	0.99999
$VaR_q$	2.14	4.169	9.1497	17.9757	33.6357

Таблица 6

АНАЛИЗ ПОРОГОВОГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ УРОВНЕЙ ЗНАЧИМОСТИ.

$\varepsilon$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$\hat{x}_\varepsilon$	3.91	4.82	5.50	6.15	6.89

Таблица 7

ЗНАЧЕНИЯ КВАНТИЛЯ, ПОЛУЧЕННОГО С ПОМОЩЬЮ ПОРОГОВОЙ МОДЕЛИ С РАЗЛИЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПОРОГА.

Порядок квантиля	Значение порога			
	3.91	4.82	5.50	6.15
0.95	1.5191(1.1565)	4.3542(0.8222)	2.9374(6.5416)	6.1463(0.0075)
0.99	2.8859(0.3931)	4.4704(0.5205)	3.7227(3.5226)	6.1463(0.0075)
0.999	5.3234(0.5527)	5.5427(0.9861)	5.8668(0.4732)	6.1487(0.0025)
0.9999	8.4777(2.7022)	14.2119(28.6882)	10.3917(9.1239)	23.9706(115.3777)
0.99999	12.5594(7.6629)	84.2984(446.7733)	19.9408(51.2386)	—(—)

**ВЫВОДЫ**

В работе предложен новый метод оценки рисков на основе математической модели вероятностной смеси экстремальных величин. На наш взгляд, многочисленные известные на текущий момент методы оценки рисков, опирающиеся на детерминированный выбор порога, являются ограниченными в силу априорного разделения исследуемых данных на экстремаль-

ные и неэкстремальные с последующей аппроксимацией распределения надпороговых величин обобщенным распределением Парето. В отличие от такого подхода, в разработанной нами модели предлагается описывать область экстремальных величин, не выделяя их при этом из всей совокупности данных. Исходя из этого, порог нами рассматривается как некоторая функция принадлежности членов выборки к одному из определенных выше классов случайных величин (Вейбулла или обобщенного распределения Парето). Далее в качестве оценки рисков в рамках методологии **VaR** нами используется значение квантили распределения смеси экстремальных величин.

На основе предложенного метода разработаны и строго обоснованы эффективные алгоритмы моделирования смеси экстремальных величин и вычисления размеров рискованного капитала по **VaR**-технологии. На примере ценовых данных индекса Dow Jones 01.01.1950 – 10.08.2005 был проведен сравнительный анализ расчетов оценок **VaR** с использованием порогового метода и модели вероятностной смеси. Его результаты показали, что смешанная модель позволяет более точно оценить значение порога и, соответственно, вычислить размер рискованного капитала.

## Литература

1. Basel Committee on Banking Supervision (2004).
2. Щетинин Е.Ю. О новых подходах к управлению компанией в чрезвычайных ситуациях, Финансы и кредит, М.: Финансы и кредит, 2005, 30(198), с. 71-75.
3. J. Galambos, The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, John Wiley and Sons Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1978.
4. Embrechts, P., Kluppelberg, C., Mikosch, T. (1997), Modelling Extremal Events, number 33 in Applications of Mathematics: Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer Verlag.
5. Scshetinin Eu. Yu., Nazarenko K.M., Mathematical models and methods of estimation extreme values distribution functions. Preprint JINR (2003).
6. Balkema, A.A. & de Haan, L. (1974) Residual life time at great age, Annals of Probability (2): 792–804.
7. Pickands, J. Statistical inference using extreme order statistics, The Annals of Statistics (3): 119–131. (1975).
8. Dupuis, D. J. (2000). Exceedance over high thresholds: A guide to threshold selection.
9. Щетинин Е.Ю., Назаренко К.М. О новом подходе к моделированию экстремальных величин: Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. трудов. Под ред. Г.Ю. Ризниченко, 2007. (В печати).
10. B.V. Gnedenko, Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire.-Ann. Math., 1943, v. 44, 423-453.
11. Щетинин Е.Ю., Назаренко К.М., Парамонов А.В., О методах анализа эффективности бизнеса компании в условиях высокой изменчивости ее финансовых показателей, Динамика неоднородных систем, - М.: КомКнига, 2005, 9(2), с. 206-212.

*Назаренко Кирилл Михайлович*

## РЕЦЕНЗИЯ

Рассмотренные в работе К.М. Назаренко «О методе оценки рисков инвестирования в финансовые активы с высокой волатильностью» научные проблемы моделирования фондовых рынков и рисков инвестирования являются актуальными и имеющими высокую практическую ценность.

Современные методы количественного анализа и оценки рисков являются далеко не всегда адекватными в условиях высокой волатильности. Поэтому целью данной работы является разработка нового метода оценки рисков инвестирования в финансовые активы, основанного на модели распределения экстремальных величин.

В первом разделе подробно изложены методы моделирования экстремальных величин и выявлены их недостатки применительно к вычислению рискованности инвестирования на фондовых рынках. Во втором разделе автором предложена новая модель функции распределения финансовых показателей в виде вероятностной смеси. В третьем разделе автором описан вычислительный алгоритм моделирования экстремальных величин, реализующий предлагаемые свойства вероятностных смесей. В заключительном разделе автором про-

ведены практические вычисления размеров рискованного капитала для финансового показателя Dow Jones и соответствующие оценки рискованности инвестирования.

Работа К.М. Назаренко «О методе оценки рисков инвестирования в финансовые активы с высокой волатильностью» выполнена на высоком теоретическом уровне и вносит значительный вклад в развитие математической теории экстремальных величин. Полученные в ней результаты имеют большую практическую ценность для решения задач финансового риск-менеджмента.

Считаю, что статья может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

*Щетинин Е.Ю., д.ф.-м.н., профессор кафедры «Прикладная математика» ГОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»*

## 8.4. ABOUT A METHOD OF VALUATION OF HAZARDS OF INVESTMENT IN FINANCIAL ASSETS WITH HIGH VOLATILNOSTJU

K.M. Nazarenko, the Competitor

New method of risk estimation based on a new mathematical model of extreme values probability mixture is suggested in this paper. Effective computation algorithms for modeling probability mixture and Value at Risk capital estimation are developed and strictly proved. On Dow Jones 01.01.1950-10.08.2005 historical data comparative analysis on VaR-estimation with threshold and mixture models showed high effectiveness of the last one for risk capital estimation of issuing company.