

3.10. ХЕДЖИРОВАНИЕ В СЛУЧАЕ КОИНТЕГРАЦИИ

Соколов П.И., аспирант кафедры «Математические методы анализа экономики»

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В статье развивается методика хеджирования с использованием коинтеграции. Предлагается способ снижения отклонения реплицирующего портфеля от хеджируемого актива, применимый в случае наличия коинтеграционных соотношений хеджируемого актива с двумя различными наборами других активов. Приводится математическая постановка и решение оптимизационной задачи минимизации отклонения реплицирующего портфеля от хеджируемого актива в указанном случае. Рассматривается численный пример, демонстрирующий эффективность предлагаемого метода на реальных данных.

Проиллюстрируем общую идею использования коинтеграции в целях хеджирования (например, [2, с. 4]) на простом примере. Пусть имеется следующее коинтеграционное соотношение, связывающее активы x и y :

$$x_t + \alpha y_t = z_t, \tag{1}$$

где z_t – стационарный ряд.

Предположим далее, что имеется обязательство поставить в некоторый будущий момент T некоторое количество актива x .

Способ использования коинтеграционного соотношения (1) в целях хеджирования заключается в том, что обязательство x_T можно захеджировать покупкой «портфеля» $-\alpha y_t$. Соотношение (1) говорит о том, что в момент исполнения обязательства T стоимость «портфеля» $-\alpha y_T$ будет отличаться от стоимости обязательства x_T на величину z_T , представляющую собой реализацию стационарного ряда.

Факт, что ряд z_t является стационарным, говорит о том, что статистические характеристики терминального отклонения z_T можно оценить, используя историю этого ряда. Следовательно, риск неисполнения обязательства и величину возможной «нехватки» средств можно оценить уже в момент принятия решения о способе хеджирования (нулевой момент), используя для этого, например, дисперсию z_t .

Возникает естественный вопрос: чем же хеджирование при помощи коинтеграции предпочтительнее обычной покупки актива x заранее, если первое (в отличие от второго) с необходимостью сопровождается отклонением z_T , порождающим риск? Можно назвать два довода в пользу хеджирования при помощи коинтеграции. Первый состоит в том, что математическое ожидание (терминального) отклонения z_T равно нулю, поэтому при частом использовании хеджирования при помощи коинтеграции убытки (случаи $x_T - (-\alpha y_T) = z_T > 0$) и прибыли (случаи $x_T - (-\alpha y_T) = z_T < 0$) будут компенсировать друг друга.

Второй довод основывается на том обстоятельстве, что коинтеграционное соотношение описывает долгосрочную связь, и не исключает краткосрочных отклонений от нее. Это означает, что в момент принятия решения о способе хеджирования, «портфель» $-\alpha y_0$

может в силу краткосрочных колебаний быть дешевле актива x_0 . От терминального же отклонения z_T можно избавиться, если обменивать «портфель» $-\alpha y_t$ на обязательство x_t не в последний момент T , а раньше и тогда, когда разница $x_t - (-\alpha y_t)$ будет приемлемой.

ХЕДЖИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОИНТЕГРАЦИИ НА ВАЛЮТНОМ РЫНКЕ

Наличие на валютном рынке коинтеграции дает возможность использовать на этом рынке соответствующий метод хеджирования [2, с. 4; 5, с. 2]. Приведем пример хеджирования на валютном рынке при помощи коинтеграции. Пусть имеется коинтеграционное соотношение между валютными курсами:

$$EUR / JPY_t + \alpha GBP / JPY_t + \beta USD / JPY_t = z_t. \tag{2}$$

Данное коинтеграционное соотношение можно использовать для хеджирования обязательства поставить к моменту T некоторое количество евро, если у инвестора, взявшего на себя это обязательство, в начальный момент имеются средства в иенах. Вместо того, чтобы приобрести необходимое согласно обязательству количество евро (за иены), данный инвестор может приобрести за иены портфель, состоящий из $-\alpha$ фунтов и $-\beta$ долларов. Согласно коинтеграционному соотношению (2), отклонение стоимости этого портфеля (в иенах) от стоимости необходимого количества евро (в иенах) представляет собой стационарный ряд z_t . Таким образом стоимость хеджирующего портфеля в терминальный момент будет приближенно равна стоимости обязательства.

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ХЕДЖИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ КОИНТЕГРАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Методику хеджирования при помощи коинтеграции можно развить следующим образом. Рассмотрим ситуацию, при которой коинтеграционное соотношение имеет вид:

$$x_{0t} + c_1 x_{1t} + \dots + c_n x_{nt} + c_{n+1} y_{1t} + \dots + c_{n+m} y_{mt} = z_t. \tag{3}$$

Точность, с которой реплицирующий портфель копирует динамику $-c_1 x_{1t} - \dots - c_n x_{nt} - c_{n+1} y_{1t} - \dots - c_{n+m} y_{mt}$ актива x_{0t} зависит от дисперсии стационарного ряда z_t . Пусть в дополнение к (3) имеются также еще два коинтеграционных отношения, каждое из которых связывает актив x_{0t} с частью активов, участвующих в (3):

$$x_{0t} + a_1 x_{1t} + \dots + a_n x_{nt} = v_t; \tag{4}$$

$$x_{0t} + b_1 y_{1t} + \dots + b_m y_{mt} = w_t. \tag{5}$$

Это означает, что существует еще два реплицирующих портфеля. Более того, еще один портфель можно получить как линейную комбинацию (4) и (5). Подобная комбинация может обладать более низкой дисперсией (по сравнению с (4) и (5)), если между v_t и w_t имеется существенная корреляция. Комбинированный портфель с долей (4) равной α и долей (5) равной β имеет вид:

$$(\alpha + \beta)x_{ot} + \alpha(a_1x_{1t} + \dots + a_nx_{nt}) + \beta(b_1y_{1t} + \dots + b_my_{mt}) = \alpha v_t + \beta w_t; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & x_{ot} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(a_1x_{1t} + \dots + a_nx_{nt}) + \\ & + \frac{\beta}{\alpha + \beta}(b_1y_{1t} + \dots + b_my_{mt}) = \\ & = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}v_t + \frac{\beta}{\alpha + \beta}w_t \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, выбор хеджирующего портфеля осуществляется между (3), (4), (5) и (7). Кроме того, для портфеля (7) следует найти оптимальные, в смысле наименьшей дисперсии отклонения реплицирующего портфеля от хеджируемого актива, значения коэффициентов α и β . Дисперсия отклонений портфеля (7) от хеджируемого актива составляет:

$$\begin{aligned} & \sigma^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}v + \frac{\beta}{\alpha + \beta}w \right) = \sigma^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}v \right) + \\ & + \sigma^2 \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}w \right) + 2Cov \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}v, \frac{\beta}{\alpha + \beta}w \right) = \\ & = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^2 \sigma_v^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \sigma_w^2 + 2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} Cov(v, w). \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом (8), а также того, что:

$$Cov(v, w) = \rho\sigma_v\sigma_w,$$

где

ρ – коэффициент корреляции между v и w , задача выбора коэффициентов α и β принимает вид:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^2 \sigma_v^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \sigma_w^2 + \\ & + 2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \rho\sigma_v\sigma_w \rightarrow \min_{\alpha, \beta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Условия первого порядка имеют вид:

$$\frac{2\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^3} \sigma_v^2 - \frac{2\beta^2}{(\alpha + \beta)^2} \sigma_w^2 + \frac{2\beta(\beta - \alpha)}{(\alpha + \beta)^3} \rho\sigma_v\sigma_w = 0; \quad (10)$$

$$\frac{2\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^3} \sigma_w^2 - \frac{2\alpha^2}{(\alpha + \beta)^2} \sigma_v^2 + \frac{2\alpha(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)^3} \rho\sigma_v\sigma_w = 0. \quad (11)$$

Решение этой системы можно записать в явном виде:

$$\beta = \left\{ \frac{-\sigma_v(\rho\sigma_w^2 - \sigma_v\sigma_w + \rho\sigma_v^2)}{\sigma_w(\sigma_w^2 - \sigma_v^2)}, \frac{-\sigma_v(\rho\sigma_w - \sigma_v)}{(\sigma_w^2 - 2\rho\sigma_v\sigma_w + \sigma_v^2)} \right\}; \quad (12)$$

$$\alpha = \left\{ \frac{\sigma_w(\sigma_w - \rho\sigma_v)}{(\sigma_w^2 - 2\rho\sigma_v\sigma_w + \sigma_v^2)}, \frac{-\sigma_w(\rho\sigma_w^2 - \sigma_v\sigma_w + \rho\sigma_v^2)}{\sigma_v(\sigma_w^2 - \sigma_v^2)} \right\}. \quad (13)$$

Сравнивая значения целевой функции (9) в двух точках, определяемых выражениями (12) и (13), можно найти точку минимума при конкретных значениях параметров.

При этом веса портфелей будут иметь вид:

$$\begin{aligned} & \left\{ \alpha_1 = \frac{\sigma_w(\sigma_w - \rho\sigma_v)}{(\sigma_w^2 - 2\rho\sigma_v\sigma_w + \sigma_v^2)}, \right. \\ & \left. \beta_1 = \frac{\sigma_v(\rho\sigma_w - \sigma_v)}{(\sigma_w^2 - 2\rho\sigma_v\sigma_w + \sigma_v^2)} \right\}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\left\{ \alpha_2 = \frac{\sigma_w^2}{(\sigma_w^2 - \sigma_v^2)}, \beta_2 = \frac{\sigma_v^2}{(\sigma_w^2 - \sigma_v^2)} \right\}. \quad (15)$$

Численный пример

Эффективность предложенного метода хеджирования можно продемонстрировать на примере почасовых цен закрытия для валютных пар **AUD / JPY**, **CHF / JPY**, **EUR / JPY**, **USD / JPY**, **CAD / JPY** за 2008 год на международном валютном рынке FOREX. Рассмотрим сначала пары **AUD / JPY**, **CHF / JPY** и **EUR / JPY**. На нижеприведенных рис. 1-3 представлена динамика этих валютных пар:

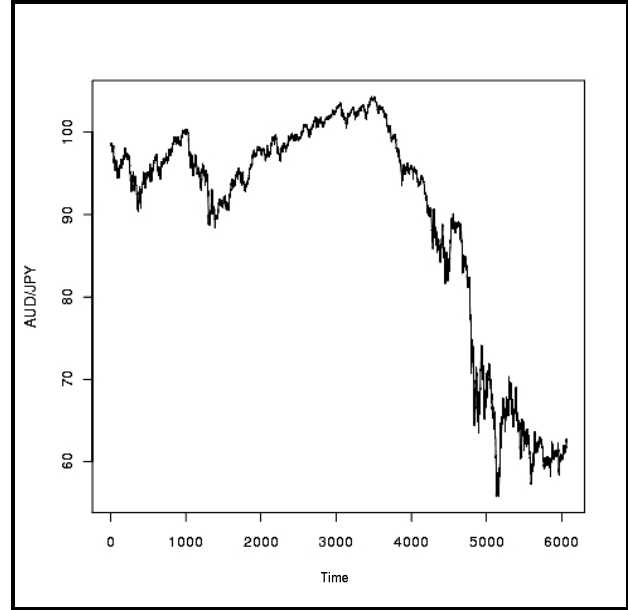


Рис. 1. Динамика курса австралийского доллара к японской иене за 2008 г.

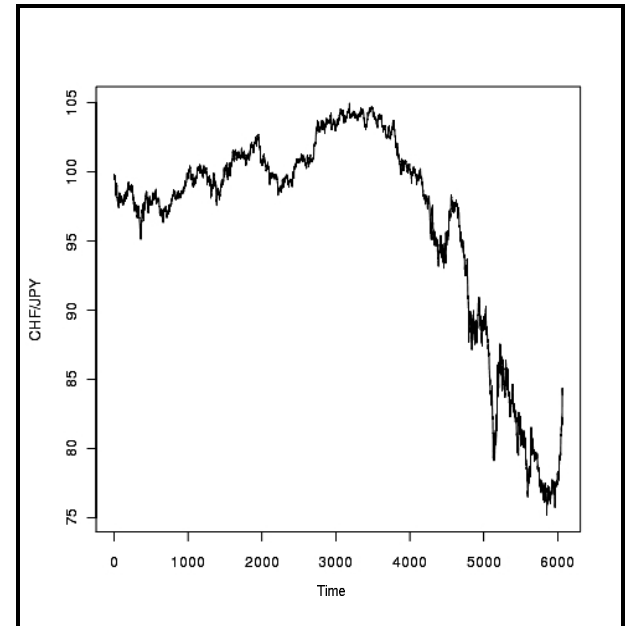


Рис. 2. Динамика курса швейцарского франка к японской иене за 2008 г.

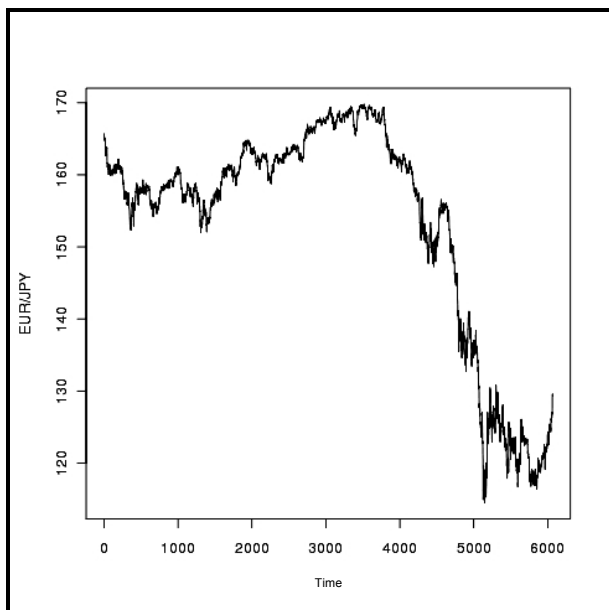


Рис. 3. Динамика курса евро к японской иене за 2008 г.

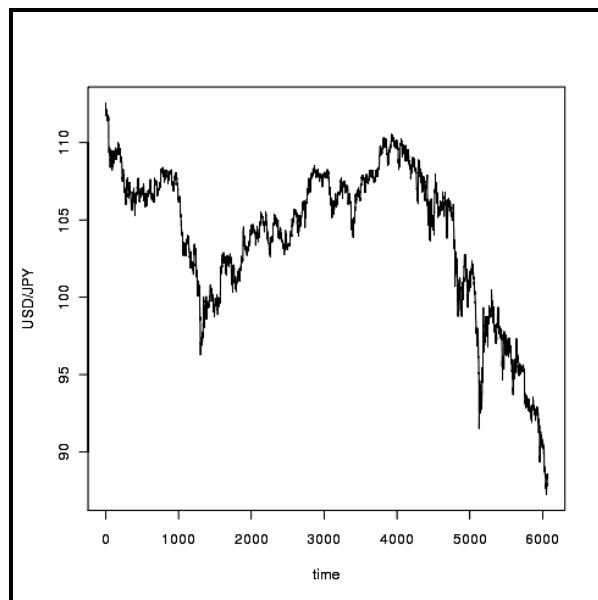


Рис. 4. Динамика курса американского доллара к японской иене за 2008 г.

Из рисунков видно, что динамики курсов австралийского доллара, швейцарского франка и евро к японской иене чрезвычайно похожи.

Значения статистик, позволяющих оценить количество коинтеграционных соотношений, связывающих эти пары, приведены в табл. 1.

Таблица 1

ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА КОИНТЕГРАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ВАЛЮТНЫМИ ПАРАМИ AUD/JPY, CHF/JPY И EUR/JPY

| Показатель | Оценка | 10% | 5% | 1% |
|------------------|--------|-------|-------|-------|
| $r \leftarrow 2$ | 1,87 | 7,52 | 9,24 | 12,97 |
| $r \leftarrow 1$ | 7,57 | 13,75 | 15,67 | 20,2 |
| $r = 0$ | 25,92 | 19,77 | 22 | 26,81 |

Приведенные в таблице данные позволяют на уровне значимости 1% сделать вывод о наличии одного коинтеграционного соотношения. Это соотношение имеет вид:

$$(AUD / JPY)_t + 2.61(CHF / JPY)_t - 2.24(EUR / JPY)_t + 2.8 = z_{1t} . \tag{16}$$

Рассмотрим теперь пары AUD / JPY, USD / JPY и CAD / JPY.

Рис. 4 и 5 говорят о схожести динамик курсов американского и канадского долларов к японской иене.

Значения статистик, позволяющих оценить количество коинтеграционных соотношений, связывающих эти пары, приведены в табл. 2.

Таблица 2

ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА КОИНТЕГРАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ВАЛЮТНЫМИ ПАРАМИ AUD/JPY, USD/JPY И CAD/JPY

| Показатель | Оценка | 10% | 5% | 1% |
|------------------|--------|-------|-------|-------|
| $r \leftarrow 2$ | 1,1 | 7,52 | 9,24 | 12,97 |
| $r \leftarrow 1$ | 7,43 | 13,75 | 15,67 | 20,2 |
| $r = 0$ | 23,47 | 19,77 | 22 | 26,81 |

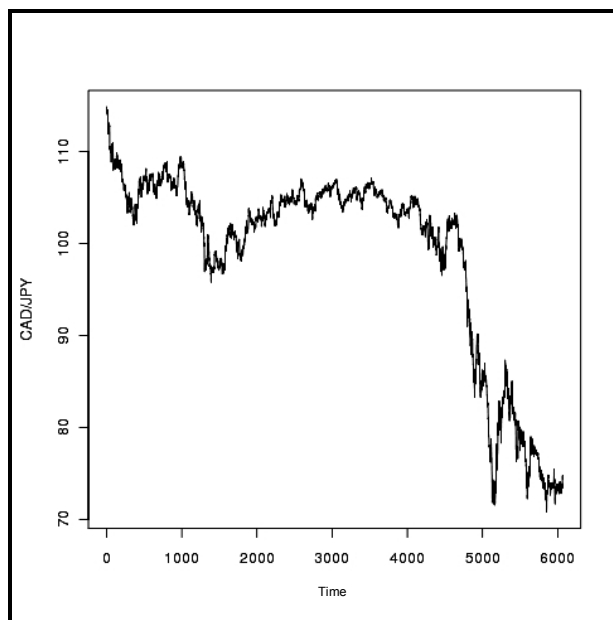


Рис. 5. Динамика курса канадского доллара к японской иене за 2008 г.

Приведенные в таблице данные позволяют на уровне значимости 5% сделать вывод о наличии одного коинтеграционного соотношения. Это соотношение имеет вид:

$$(AUD / JPY)_t + 0.97(USD / JPY)_t - 1.68(CAD / JPY)_t - 25.23 = z_{2t} . \tag{17}$$

Корреляция между стационарными «остатками» z_{1t} и z_{2t} составляет $\rho = -0.09$. Дисперсии «остатков» составляют: $\sigma^2(z_1) = 13.44$, $\sigma^2(z_2) = 12.98$.

Наименьшая из дисперсий комбинаций портфелей (построенных в соответствии с формулами (12), (13))

равна $\sigma^2 = 5.99$. Она соответствует второму набору параметров α_2, β_2 .

Видно, что эта дисперсия меньше любой из дисперсий $\sigma^2(z_1) = 13.44$ и $\sigma^2(z_2) = 12.98$ отклонений коинтеграционных соотношений (16) и (17).

Интересно также сравнить эти результаты с портфелем, образованным всеми рассматриваемыми валютными парами AUD / JPY, CHF / JPY, EUR / JPY, USD / JPY, CAD / JPY.

Значения статистик, позволяющих оценить количество коинтеграционных соотношений, связывающих эти пары, приведены в табл. 3.

Таблица 3

ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА КОИНТЕГРАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ВАЛЮТНЫМИ ПАРАМИ AUD/JPY, CHF/JPY, EUR/JPY, USD/JPY, CAD/JPY

| Показатель | Оценка | 10% | 5% | 1% |
|------------------|--------|-------|-------|-------|
| $r \leftarrow 4$ | 0,93 | 7,52 | 9,24 | 12,97 |
| $r \leftarrow 3$ | 12,9 | 13,75 | 15,67 | 20,2 |
| $r \leftarrow 2$ | 17,07 | 19,77 | 22 | 26,81 |
| $r \leftarrow 1$ | 22,07 | 25,56 | 28,14 | 33,24 |
| $r = 0$ | 41,25 | 31,66 | 34,4 | 39,79 |

Приведенные в таблице данные позволяют сделать вывод о наличии одного коинтеграционного соотношения (на уровне значимости 1%). Это соотношение имеет вид:

$$\begin{aligned} & (AUD / JPY)_t + 1.92(CHF / JPY)_t - \\ & - 1.49(EUR / JPY)_t + 1.14(USD / JPY)_t - \\ & - (CAD / JPY)_t - 66.01 = z_{3t}. \end{aligned} \quad (18)$$

Дисперсия отклонения коинтеграционного соотношения (18) составляют: $\sigma^2(z_3) = 9.1$. Это означает, что соотношение (18) обеспечивает более точное реплицирование валютной пары AUD/JPY по сравнению с любым из двух реплицирований ((16) и (17)), построенном на меньшем количестве валютных пар. Оптимальная же комбинация портфелей, построенных на меньшем количестве валютных пар, дает еще более точное реплицирование: $\sigma^2 = 5.99$.

Таким образом, комбинация «небольших» коинтеграционных соотношений может дать более точное реплицирование хеджируемого актива по сравнению с любым доступным коинтеграционным соотношением. В данном случае снижение дисперсии отклонения весьма велико и составляет 34%.

Литература

1. Carol Alexander, Ian Giblin, Wayne Weddington 3 Cointegration and asset allocation: a new active hedge fund strategy / Carol Alexander, Ian Giblin, Wayne Weddington 3 – ICMA centre discussion papers in finance, 2001 – icma-dp2001-03 – URL : <http://www.icmacentre.ac.uk/pdf/discussion/DP2001-03.pdf>.
2. Carol Alexander, Andreza Barbosa The impact of electronic trading and exchange traded funds on the effectiveness of minimum variance hedging / Carol Alexander, Andreza Barbosa – ICMA Centre Discussion Papers in Finance, 2006 – DP2006-04 – URL : <http://www.icmacentre.ac.uk/pdf/discussion/DP2006-04.pdf>.
3. David R. Shaffer Andrea Demaskey Currency hedging using the mini-gini framework / David R. Shaffer Andrea Demaskey – Review of quantitative finance and accounting, 2005.
4. Asim Ghosh Cross-hedging foreign currency risk: empirical evidence from an error correction model / Asim Ghosh – Review of quantitative finance and accounting, 1996.

5. Stephen E. Wilcox, John M. Geppert An error-correction model for forecasting changes in foreign currency futures spreads / Stephen E. Wilcox, John M. Geppert – Journal of economics and finance, 2007 – volume 31, number 1.
6. Anthony Neuberger Hedging long-term exposures with multiple short-term futures contracts / Anthony Neuberger – The review of financial studies, 1999.

Ключевые слова

Хеджирование; коинтеграция; валютный рынок; реплицирующий портфель; минимизация отклонения от хеджируемого актива; комбинирование коинтеграционных соотношений.

Соколов Павел Иванович

РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность проблемы. В современных условиях нестабильности на мировых финансовых рынках построение инвестиционных стратегий, позволяющих участникам рынка с высокой степенью надежности выполнять свои обязательства является актуальной задачей. В связи с этим развитие новых методов хеджирования финансовых обязательств а также модификация существующих методов такого рода с целью повышения их эффективности, представляет безусловный интерес.

Научная новизна и практическая значимость. В статье предлагается метод повышения эффективности хеджирования при помощи коинтеграции за счет использования двух коинтеграционных соотношений. Математической основой метода является оптимизационная задача, постановка и решение которой также представлены в данной статье. Эффективность метода демонстрируется в завершающей части статьи на численном примере, базирующемся на почасовых данных закрытия за 2008 г. для курсов валют, торгуемых на международном валютном рынке FOREX.

Замечания. К недостаткам работы можно отнести отсутствие сравнения предлагаемого метода хеджирования с методами, не использующими коинтеграцию, а также относительно небольшой объем данных, на которых демонстрируется эффективность предлагаемого метода.

Заключение. Несмотря на указанные недостатки, считаю, что статья может быть рекомендована к опубликованию.

Черемных Ю.Н., д.э.н., профессор, кафедры «Математические методы анализа экономики», экономического факультета, Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова.

3.10. HEDGING IN CASE OF COINTEGRATION

P.I. Sokolov, the Post-graduate Student. Chairs «Mathematical Methods of the Analysis of Economy»

Moscow State University of M.V. Lomonosov

The article is devoted to developing of hedging methods, based on cointegration. The suggested method decrease deviation between specially chosen portfolio and hedging active. The method could be applied in case of two cointegration relations and is based on suggested optimization problem, which solution is presented. Numerical example of effectiveness of suggested method also takes place.

Keywords

Hedging; cointegration; currency market; replicating portfolio; minimization of deviation from hedging active; combination of cointegration relations.

Literature

7. Carol Alexander, Ian Giblin, Wayne Weddington 3 Cointegration and asset allocation: a new active hedge fund strategy / Carol Alexander, Ian Giblin, Wayne Weddington 3 – ICMA centre discussion papers in finance, 2001 – icma-dp2001-03 – URL : <http://www.icmacentre.ac.uk/pdf/discussion/DP2001-03.pdf>.
8. Carol Alexander, Andreza Barbosa The impact of electronic trading and exchange traded funds on the effectiveness of minimum variance hedging / Carol Alexander, Andreza Barbosa – ICMA

Centre Discussion Papers in Finance, 2006 – DP2006-04 – URL : <http://www.icmacentre.ac.uk/pdf/discussion/DP2006-04.pdf>.

9. David R. Shaffer Andrea Demaskey Currency hedging using the mini-gini framework / David R. Shaffer Andrea Demaskey – Review of quantitative finance and accounting, 2005.
10. Asim Ghosh Cross-hedging foreign currency risk: empirical evidence from an error correction model / Asim Ghosh – Review of quantitative finance and accounting, 1996.
11. Stephen E. Wilcox, John M. Geppert An error-correction model for forecasting changes in foreign currency futures spreads / Stephen E. Wilcox, John M. Geppert – Journal of economics and finance, 2007 – volume 31, number 1.
12. Anthony Neuberger Hedging long-term exposures with multiple short-term futures contracts / Anthony Neuberger – The review of financial studies, 1999.