

3.9. ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ХЕДЖИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ КОИНТЕГРАЦИИ

Соколов П.И., аспирант кафедры «Математические методы анализа экономики»

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В статье развивается методика хеджирования с использованием коинтеграции. Предлагается способ снижения отклонения реплицирующего портфеля от хеджируемого актива, применимый в случае наличия коинтеграционных соотношений хеджируемого актива с несколькими различными наборами других активов. Приводится математическая постановка задач минимизации отклонения реплицирующего портфеля от хеджируемого актива для случаев двух и более коинтеграционных соотношений. Эффективность предлагаемого метода демонстрируется на реальных данных по валютному рынку FOREX.

ХЕДЖИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОИНТЕГРАЦИИ НА ВАЛЮТНОМ РЫНКЕ

Наличие на валютном рынке коинтеграции дает возможность использовать соответствующие методы при управлении капиталом [2, с. 4; 5, стр. 2]. Приведем пример хеджирования на валютном рынке при помощи коинтеграции. Пусть имеется коинтеграционное соотношение между валютными курсами:

$$EUR / JPY_t + \alpha GBP / JPY_t + \beta USD / JPY_t = z_t. \quad (1)$$

Данное коинтеграционное соотношение можно использовать для хеджирования обязательства поставить к моменту T некоторое количество евро, если у инвестора, взявшего на себя это обязательство, в начальный момент имеются средства в иенах. Вместо того чтобы приобрести необходимое, согласно обязательству, количество евро (за иены), данный инвестор может приобрести за иены портфель, состоящий из $-\alpha$ фунтов и $-\beta$ долларов. Согласно коинтеграционному соотношению (1), отклонение стоимости этого портфеля (в иенах) от стоимости необходимого количества евро (в иенах), представляет собой стационарный ряд z_t . Таким образом, стоимость хеджирующего портфеля в терминальный момент будет приближенно равна стоимости обязательства.

СЛУЧАЙ ДВУХ КОИНТЕГРАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрим ситуацию, при которой коинтеграционное соотношение имеет вид:

$$x_{0t} + c_1 x_{1t} + \dots + c_n x_{nt} + c_{n+1} y_{1t} + \dots + c_{n+m} y_{mt} = z_t. \quad (2)$$

Точность, с которой реплицирующий портфель копирует динамику $-c_1 x_{1t} - \dots - c_n x_{nt} - c_{n+1} y_{1t} - \dots - c_{n+m} y_{mt}$ актива x_{0t} зависит от дисперсии стационарного ряда z_t . Пусть в дополнение к (2) имеются также еще два коинтеграционных отношения, каждое из которых связывает актив x_{0t} с частью активов, участвующих в (2):

$$x_{0t} + a_1 x_{1t} + \dots + a_n x_{nt} = v_t; \quad (3)$$

$$x_{0t} + b_1 y_{1t} + \dots + b_m y_{mt} = w_t. \quad (4)$$

Это означает, что существует еще два реплицирующих портфеля. Более того, еще один портфель можно получить как линейную комбинацию (3) и (4). Подобная комбинация может обладать более низкой дисперсией (по сравнению с (3) и (4)), если между v_t и w_t имеется существенная корреляция. Комбинированный портфель с долей (3) равной α и долей (4) равной β имеет вид:

$$\begin{aligned} & (a_1 x_{1t} + \dots + a_n x_{nt}) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} (b_1 y_{1t} + \dots + b_m y_{mt}) = \\ & = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} v_t + \frac{\beta}{\alpha + \beta} w_t. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, выбор хеджирующего портфеля осуществляется между (2), (3), (4) и (5). Кроме того, для портфеля (5) можно найти оптимальные, в смысле наименьшей дисперсии отклонения реплицирующего портфеля от хеджируемого актива, значения коэффициентов α и β . Дисперсия отклонений портфеля (5) от хеджируемого актива составляет:

$$\begin{aligned} & \sigma^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} v + \frac{\beta}{\alpha + \beta} w \right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^2 \sigma^2(v) + \\ & + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \sigma^2(w) + 2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} Cov(v, w). \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом (6), а также того, что $Cov(v, w) = \rho\sigma(v)\sigma(w)$ (ρ – коэффициент корреляции между v и w), задача выбора коэффициентов α и β принимает вид:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^2 \sigma^2(v) + \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \sigma^2(w) + \\ & + 2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \rho\sigma(v)\sigma(w) \rightarrow \min_{\alpha, \beta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение оптимизационной задачи (7) можно найти в явном виде из условий первого порядка, и оно имеет вид:

$$\beta = \left\{ \frac{-\sigma_v(\rho\sigma_w^2 - \sigma_v\sigma_w + \rho\sigma_v^2)}{\sigma_w(\sigma_w^2 - \sigma_v^2)}, \frac{-\sigma_v(\rho\sigma_w - \sigma_v)}{(\sigma_w^2 - 2\rho\sigma_v\sigma_w + \sigma_v^2)} \right\}; \quad (8)$$

$$\alpha = \left\{ \frac{\sigma_w(\sigma_w - \rho\sigma_v)}{(\sigma_w^2 - 2\rho\sigma_v\sigma_w + \sigma_v^2)}, \frac{-\sigma_w(\rho\sigma_w^2 - \sigma_v\sigma_w + \rho\sigma_v^2)}{\sigma_v(\sigma_w^2 - \sigma_v^2)} \right\}. \quad (9)$$

СЛУЧАЙ БОЛЕЕ ДВУХ КОИНТЕГРАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

В случае, если имеется возможность скомбинировать более двух коинтеграционных соотношений:

$$x_{0t} + a_{11} x_{11t} + \dots + a_{1m_1} x_{1m_1 t} = v_{1t}; \quad (10.1)$$

$$x_{0t} + a_{n1} x_{n1t} + \dots + a_{nm_n} x_{nm_n t} = v_{nt}. \quad (10.n)$$

Их линейная комбинация принимает вид:

$$\begin{aligned} & x_{0t} + \frac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} (a_{11} x_{11t} + \dots + a_{1m_1} x_{1m_1 t}) + \dots \\ & \dots + \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} (a_{n1} x_{n1t} + \dots + a_{nm_n} x_{nm_n t}) = \\ & = \frac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} v_{1t} + \dots + \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} v_{nt}. \end{aligned} \quad (11)$$

Правая часть этого выражения представляет собой величину отклонения реплицирующего портфеля (составленного линейной комбинацией портфелей, задаваемых соотношениями (10.1–10.n) от хеджируемого актива x_{0t} . Это отклонение, в свою очередь, является линейной комбинацией стационарных рядов $v_{1t} \dots v_{nt}$. Дисперсия отклонения имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \dots + \sum_{i=1}^n \alpha_n v_n \right) &= \sum_{i=1}^n \sigma^2 \left(\frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} v_i \right) + \\ &+ 2 \sum_{i \neq j} \text{Cov} \left(\frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} v_i, \frac{\alpha_j}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} v_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \right)^2 \sigma^2(v_i) + 2 \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i \alpha_j}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^2} \text{Cov}(v_i, v_j). \quad (12) \end{aligned}$$

Введя обозначения $\text{Cov}(v_i, v_j) = \text{Cov}_{ij}$ и $\sigma(v_i) = \sigma_i$, задачу выбора таких коэффициентов $\alpha_1 \dots \alpha_n$, которым соответствует минимальная дисперсия отклонения реплицирующего портфеля от хеджируемого актива можно записать в виде:

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \right)^2 \sigma_i^2 + \\ &+ 2 \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i \alpha_j}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^2} \text{Cov}_{ij} \rightarrow \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}. \quad (13) \end{aligned}$$

Условия первого порядка для этой задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} &= 2 \frac{\alpha_1 \left(\sum_{k \neq 1} \alpha_k - \alpha_1 \right)}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^3} \sigma_1^2 - 2 \sum_{i \neq 1} \frac{\alpha_i^2}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^3} \sigma_i^2 + \\ &+ \sum_{i \neq 1} \frac{\alpha_i \left(\sum_{k \neq 1} \alpha_k - 2\alpha_1 \right)}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^3} \text{Cov}_{1i} - 2 \sum_{i \neq j \neq 1} \frac{\alpha_i \alpha_j}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^3} \text{Cov}_{ij} = 0; \quad (14.1) \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_n} &= 2 \frac{\alpha_n \left(\sum_{k \neq n} \alpha_k - \alpha_n \right)}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^3} \sigma_n^2 - 2 \sum_{i \neq n} \frac{\alpha_i^2}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^3} \sigma_i^2 + \\ &+ \sum_{i \neq n} \frac{\alpha_i \left(\sum_{k \neq n} \alpha_k - 2\alpha_n \right)}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^3} \text{Cov}_{ni} - 2 \sum_{i \neq j \neq n} \frac{\alpha_i \alpha_j}{\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^3} \text{Cov}_{ij} = 0. \quad (14.n) \end{aligned}$$

Решение этой системы в явном виде представляется затруднительным, в связи с чем для практических расчетов целесообразно использовать численные методы решения.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА НА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Для хеджирования обязательств по поставке валюты могут использоваться только наборы, составленные из

таких валютных пар, каждая из которых представляет собой курс какой-либо валюты к некоторой базовой валюте (в качестве которой можно взять любую валюту). К таким наборам относятся, например, **USD/JPY**, **GBP/JPY** и **EUR/JPY** или **AUD/USD**, **NZD/USD**, **CAD/USD**. Это требование обусловлено тем, что только в случае таких наборов валютных пар стоимость правой и левой частей коинтеграционного соотношения можно сравнивать, так как эта стоимость выражена в одной валюте.

Изучим, насколько распространена коинтеграция в таких наборах. Из соображений, связанных с имеющимися данными, были в качестве «базовых» валют были выбрана японская иена, американский доллар. Рассматривались следующие наборы валютных пар:

Валютные пары с японской иеной:
AUD/JPY; CAD/JPY; CHF/JPY; EUR/JPY; GBP/JPY; NZD/JPY; USD/JPY. (15)

Валютные пары с американским долларом:
AUD/USD; EUR/USD; GBP/USD; NZD/USD; USD/CAD; USD/CHF; USD/JPY. (16)

Из каждого такого набора выбирались всевозможные тройки валютных пар и для каждой такой тройки рассматривались значения статистик, получаемых по методу Йохансена для гипотезы об отсутствии коинтеграционных соотношений с учетом константы или тренда. Высокое значение этих статистик говорило о невозможности принять гипотезу об отсутствии в данной тройке коинтеграционных соотношений и (поскольку ни для одной тройки гипотезу о наличии двух коинтеграционных соотношений принять было нельзя) о наличии ровно одного коинтеграционного соотношения.

Каждая тройка валютных пар исследовалась таким образом за 2008 год для трех разных частот: дневные данные, почасовые и десятиминутные.

На нижеприведенных рис. 1-6.

- Кружочки обозначают значения тестовых статистик (расчетная статистика для гипотезы о наличии в коинтеграционном соотношении константы – координата кружочка по оси абсцисс).
- Расчетная статистика для гипотезы о наличии в коинтеграционном соотношении тренда – координата кружочка по оси ординат).
- Линии – теоретические значения данных статистик для различных уровней значимости:
 - мелкий пунктир – для 10%;
 - крупный пунктир – для 5%;
 - пунктир с точкой – для 1%.
- Вертикальные линии – теоретические статистики для гипотезы о наличии в коинтеграционном соотношении константы.
- Горизонтальные линии – теоретические статистики для гипотезы о наличии в коинтеграционном соотношении тренда.

Случай отсутствия константы и тренда не рассматривался так как:

- с одной стороны – это частный случай константы (равной нулю);
- с другой – теоретические статистики для этого случая не слишком отличаются от теоретических статистик для случая константы.

Отсутствие на графике вертикальных линий говорит об отсутствии значимых коинтеграционных соотношений в предположении о наличии в них константы; отсутствие на горизонтальных линий – об отсутствии значимых коинтеграционных соотношений в предположении о наличии в них тренда.

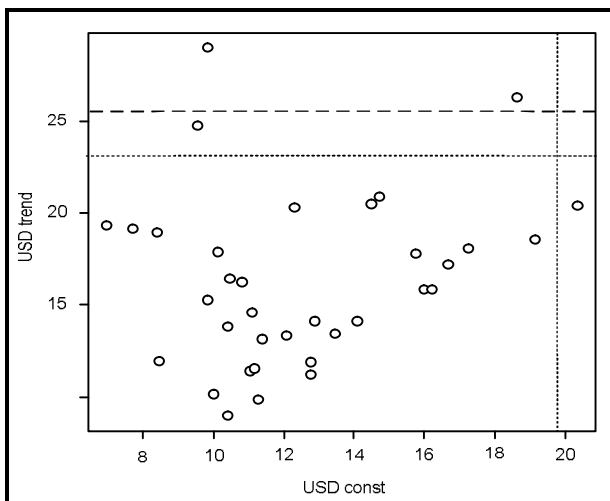


Рис. 1. Статистическая значимость коинтеграционных соотношений с американским долларом для дневных данных за 2008 г.

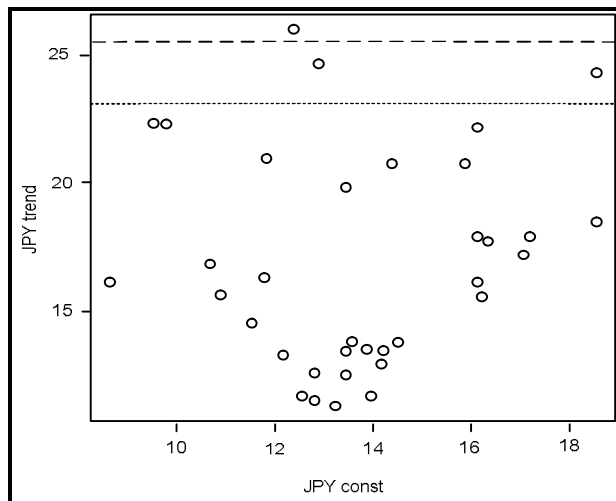


Рис. 4. Статистическая значимость коинтеграционных соотношений с японской иеной для дневных данных за 2008 г.

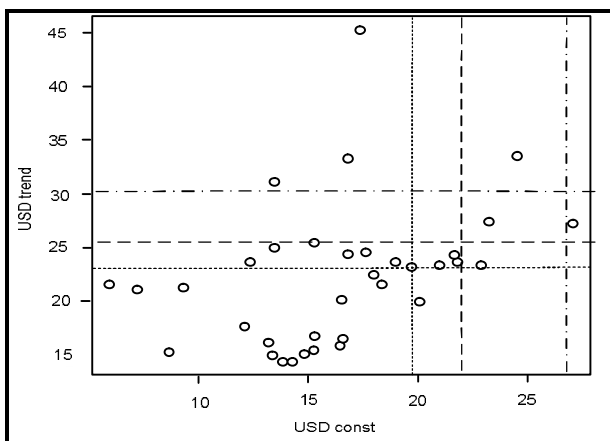


Рис. 2. Статистическая значимость коинтеграционных соотношений с американским долларом для часовых данных за 2008 г.

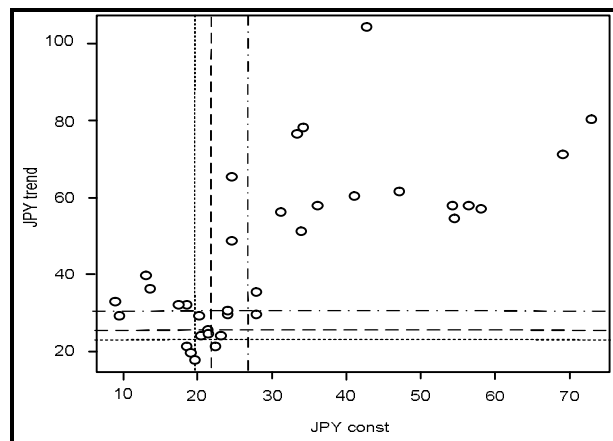


Рис. 5. Статистическая значимость коинтеграционных соотношений с японской иеной для часовых данных за 2008 г.

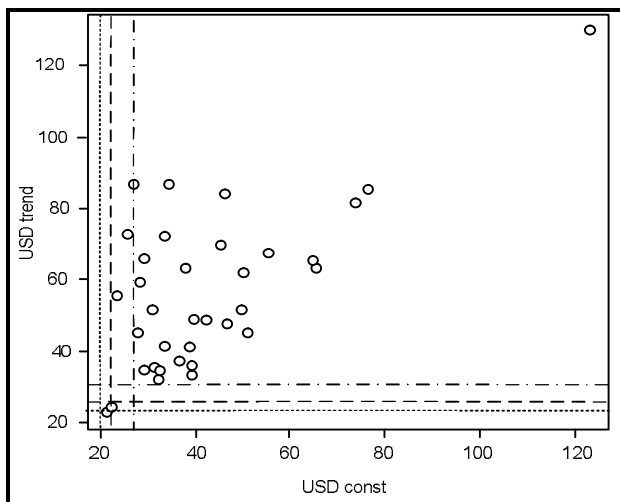


Рис. 3. Статистическая значимость коинтеграционных соотношений с американским долларом для десятиминутных данных за 2008 г.

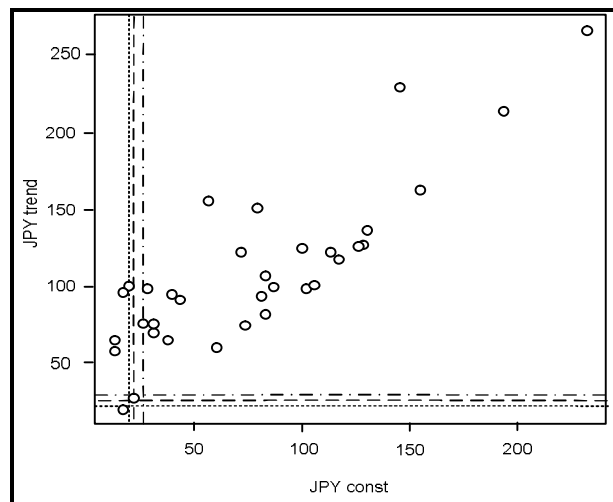


Рис. 6. Статистическая значимость коинтеграционных соотношений с японской иеной для десятиминутных данных за 2008 г.

Из графиков видно, что коинтеграционные соотношения (значимые на уровне 1%) связывали достаточное количество валютных пар в 2008 г., но эти соотношения делаются «видными» лишь на данных, не менее частотных, чем почасовые.

Изучим вопрос о том, насколько широко можно использовать возможность снижения дисперсии реплицирующего портфеля методом, предложенным в начале статьи. Для этого рассмотрим результаты применения данного метода на всех возможных (среди наборов (15), (16)) подходящих наборах валютных пар.

Алгоритм действий с каждым из этих наборов таков.

1. Выбрать из набора одну (базовую) валютную пару a_t .
2. В выбрать среди оставшихся в наборе валютных пар четыре других: (b_{1t}, b_{2t}) и (c_{1t}, c_{2t}) .
3. Оценить значимости коинтеграционных соотношений для следующих наборов валютных пар: (a_t, b_{1t}, b_{2t}) , (a_t, c_{1t}, c_{2t}) и $(a_t, b_{1t}, b_{2t}, c_{1t}, c_{2t})$. Тут следует сделать замечание: ни один из рассмотренных наборов из трех пар не содержал более одного коинтеграционного соотношения и ни один из наборов из пяти пар не содержал более двух коинтеграционных соотношений. Таким образом (в случае их значимости на уровне 1%) рассматривалось четыре коинтеграционных соотношения. Дальнейшие шаги алгоритма осуществлялись только в том случае, если каждый из наборов (a_t, b_{1t}, b_{2t}) , (a_t, c_{1t}, c_{2t}) и $(a_t, b_{1t}, b_{2t}, c_{1t}, c_{2t})$ содержал хотя бы одно значимое коинтеграционное соотношение. (В этом случае набор признавался «годным для применения оптимизации»).
4. По методу, предложенному в главе 2, рассчитывались две оптимальные комбинации коинтеграционных соотношений из наборов (a_t, b_{1t}, b_{2t}) и (a_t, c_{1t}, c_{2t}) . В случае, если наименьшая из дисперсий отклонений этих двух комбинаций оказывалась меньше наименьшей из дисперсий отклонений коинтеграционных соотношений, построенных на основе наборов (a_t, b_{1t}, b_{2t}) , (a_t, c_{1t}, c_{2t}) и $(a_t, b_{1t}, b_{2t}, c_{1t}, c_{2t})$, эти наборы признавались такими, на которых метод повышения эффективности реплицирования работает.
5. Для таких наборов рассчитывалась доля наименьшей дисперсии отклонения комбинации от наименьшей дисперсии отклонения коинтеграционного соотношения.

Таблица 1

ДАННЫЕ, ПОЛУЧЕННЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАБОРОВ (15-16) ВЫШЕПРИВЕДЕННЫМ АЛГОРИТМОМ

Базовая валюта	Период	Частота	Всего наборов	Годных наборов	Всего наборов, для которых работает метод	Средняя улучшенная дисперсия как доля от старой дисперсии
JPY	2008	Час	630	116	89	0,68
JPY	2008	10 минут	630	394	337	0,62
USD	2008	Час	630	0	-	-
USD	2008	10 минут	630	492	408	0,61

Из табл. 1 видно, что среди значимых коинтеграционных соотношений больше половины позволяло улучшить точность реплицирования предлагаемым методом. Улучшение дисперсии составляет около 30%-40%. Наиболее «благодарной» в смысле количества значимых коинтеграционных соотношений (особенно для почасовых данных) базовой валютой является японская иена.

Вышеизложенное позволяет вывод о том, что комбинация «небольших» коинтеграционных соотношений может дать более точное реплицирование хеджируемого актива по сравнению с любым доступным коинтеграционным соотношением. Оптимальную же комбинацию коинтеграционных соотношений имеет смысл строить из возможно большего числа последних.

Литература

1. Carol Alexander, Ian Giblin, Wayne Weddington 3 Cointegration and asset allocation: a new active hedge fund strategy / Carol Alexander, Ian Giblin, Wayne Weddington 3 – ICMA centre discussion papers in finance, 2001 – icma-dp2001-03 – URL : <http://www.icmacentre.ac.uk/pdf/discussion/DP2001-03.pdf>.
2. Carol Alexander, Andreza Barbosa The impact of electronic trading and exchange traded funds on the effectiveness of minimum variance hedging / Carol Alexander, Andreza Barbosa – ICMA Centre Discussion Papers in Finance, 2006 – DP2006-04 – URL : <http://www.icmacentre.ac.uk/pdf/discussion/DP2006-04.pdf>.
3. David R. Shaffer Andrea Demaskey Currency hedging using the mini-gini framework / David R. Shaffer Andrea Demaskey – Review of quantitative finance and accounting, 2005.
4. Asim Ghosh Cross-hedging foreign currency risk: empirical evidence from an error correction model / Asim Ghosh – Review of quantitative finance and accounting, 1996.
5. Stephen E. Wilcox, John M. Geppert An error-correction model for forecasting changes in foreign currency futures spreads / Stephen E. Wilcox, John M. Geppert – Journal of economics and finance, 2007 – volume 31, number 1.
6. Anthony Neuberger Hedging long-term exposures with multiple short-term futures contracts / Anthony Neuberger – The review of financial studies, 1999.

Ключевые слова

Хеджирование; коинтеграция; валютный рынок; реплицирующий портфель; минимизация отклонения от хеджируемого актива; комбинирование коинтеграционных соотношений.

Соколов Павел Иванович

РЕЦЕНЗИЯ

В современных условиях нестабильности на мировых финансовых рынках построение инвестиционных стратегий, позволяющих участникам рынка с высокой степенью надежности выполнять свои обязательства является актуальной задачей. В связи с этим развитие новых методов хеджирования финансовых обязательств а также модификация существующих методов такого рода с целью повышения их эффективности, представляет безусловный интерес.

В статье описывается метод повышения эффективности хеджирования при помощи коинтеграции за счет использования двух или более коинтеграционных соотношений. Математической основой метода являются поставленные в статье оптимизационные задачи. Для случая двух коинтеграционных соотношений найдено явное решение соответствующей оптимизационной задачи.

На примере данных по рынку FOREX за 2008 г. показано, что коинтеграцию валютных курсов можно считать распространенным явлением для данных, не менее частотных, чем почасовые. На почасовых данных по валютным парам с американским долларом и японской иеной в завершающей части статьи демонстрируется эффективность предлагаемого метода хеджирования.

Замечания. К недостаткам работы можно отнести отсутствие сравнения предлагаемого метода хеджирования с методами, не использующими коинтеграцию, а также то, что применимость предлагаемого метода хеджирования не исследовалась для данных, более частотных чем почасовые.

Несмотря на указанные недостатки, считаю, что статья может быть рекомендована к опубликованию.

Черемных Ю.Н., д.э.н., профессор, кафедра «Математические методы анализа экономики», экономический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

3.9. INCREASING OF HEDGING EFFECTIVENESS IN CASE OF COINTEGRATION

P.I. Sokolov, the Post-graduate Student, Chairs
«Mathematical Methods of the Analysis of Economy»

Moscow State University of M.V. Lomonosov

The article is devoted to developing of hedging methods, based on cointegration. The suggested method decrease deviation between specially chosen portfolio and hedging active. The method could be applied in case of two or more cointegration relations and is based on suggested optimization problem. Numerical example of effectiveness of suggested method also takes place.

Literature

1. Carol Alexander, Ian Giblin, Wayne Weddington 3 Cointegration and asset allocation: a new active hedge fund strategy / Carol Alexander, Ian Giblin, Wayne Weddington 3 – ICMA centre discussion papers in finance, 2001 – icma-dp2001-03 – URL : <http://www.icmacentre.ac.uk/pdf/discussion/DP2001-03.pdf>.
2. Carol Alexander, Andreza Barbosa The impact of electronic trading and exchange traded funds on the effectiveness of minimum variance hedging / Carol Alexander, Andreza Barbosa – ICMA Centre Discussion Papers in Finance, 2006 – DP2006-04 – URL : <http://www.icmacentre.ac.uk/pdf/discussion/DP2006-04.pdf>.
3. David R. Shaffer Andrea Demaskey Currency hedging using the mini-gini framework / David R. Shaffer Andrea Demaskey – Review of quantitative finance and accounting, 2005.
4. Asim Ghosh Cross-hedging foreign currency risk: empirical evidence from an error correction model / Asim Ghosh – Review of quantitative finance and accounting, 1996.
5. Stephen E. Wilcox, John M. Geppert An error-correction model for forecasting changes in foreign currency futures spreads / Stephen E. Wilcox, John M. Geppert – Journal of economics and finance, 2007 – volume 31, number 1.
6. Anthony Neuberger Hedging long-term exposures with multiple short-term futures contracts / Anthony Neuberger – The review of financial studies, 1999.

Keywords

Hedging; cointegration; currency market; replicating portfolio; minimization of deviation from hedging active; combination of cointegration relations.