3.16. О ПРОСТОМ СПОСОБЕ ВЫВОДА ФОРМУЛЫ БЛЭКА-ШОУЛЗА-МЕРТОНА

Царев И.Г., к.х.н., заместитель начальника отдела

Федеральное агентство по строительству и жилищно-коммунальному хозяйству (Росстрой)

В настоящей работе предложен простой вывод формулы Блэка-Шоулза-Мертона при помощи уравнения:

$$\frac{dp}{p} = rdt - \frac{dn}{n},$$

где

p – цена актива;

r – безрисковая процентная ставка;

n – функции распределения вероятности цены актива; полученного двумя способами:

- во-первых, из изоморфизма гамильтоновой и экономической систем, обоснованного в более ранних работах автора;
- во-вторых, из общих соображений, аналогичных обычным рассуждениям в термодинамике.

Предложенный способ позволяет отказаться от использования трех самых спорных классических предположений при выводе формулы, а именно: что безрисковая процентная ставка и волатильность актива постоянны во времени, и что цена актива имеет логнормальное распределение.

В октябре 1997 г. профессорам Р. Мертону (Гарвардский университет) и М. Шоулзу (Стенфордский университет) была присуждена Нобелевская премия по экономике за их труд в области оценки опционов, впервые опубликованный в 1973 г. Шоулз работал совместно с Ф. Блэком, умершим в 1995 г., и их совместный результат известен под названием модели Блэка-Шоулза [1, 2, 6]. Мертон сделал значительный вклад в модель и ее расширения и был награжден Нобелевской премией наравне с Шоулзом. Модель очень полезна при принятии инвестиционных решений, но не гарантирует прибыль на опционных торгах.

Формула Блэка-Шоулза-Мертона оценивает справедливую стоимость европейского опциона «колл». Под справедливой ценой понимается такая цена опциона, которая исключает возможность арбитража, т.е. исключает проведение сделок на рынке, позволяющих получить прибыль лишь за счет неправильной оценки опциона.

$$C_0 = n_0 p_0 - n_T K e^{-rT}, \quad (1)$$

где

T – время до эспирации (конца действия) опциона в годах;

r – постоянный дрифт (непрерывно начисляемая безрисковая процентная ставка) $год^{-1}$;

p_0 – цена актива в начальный момент времени;

K – цена исполнения опциона (страйк опциона);

n_0, n_T – функции распределения вероятности цены актива в начальный момент времени и в момент времени T (доли сделок на рынке, совершенные по соответствующим ценам в указанные периоды времени);

C_0 – теоретическая цена опциона в начальный период времени (которую также называют премией).

Модель предполагает, что статистическое равновесие в системе еще не наступило и идет некий кинетический процесс, при котором изменяется функция распределения доходности актива.

Вывод формулы Блэка-Шоулза, как и сама модель, овеяны ореолом таинственности и недоступности из-за сложности применяемого математического аппарата, понятного лишь физикам-теоретикам. При классическом выводе используется весьма сложная формула Ито, которая носит также название формулы замены переменных в стохастическом интеграле. Кроме того, приходится интегрировать уравнение в частных производных второго порядка. Если изложить модель в общих чертах, то считается, что доходность актива x подчиняется модели стандартного броуновского движения, т.е. происходит по диффузионному закону. Диффузионный закон гласит, что квадрат смещения броуновской частицы от начального положения, усредненный по многим броуновским частицам, пропорционален времени наблюдения. Функция распределения доходности может быть описана при помощи уравнения Фоккера-Планка, которое в одномерном случае сводится к уравнению диффузии:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где

t – время;

D – коэффициент диффузии;

x – пространственная координата.

Решение уравнения диффузии записывается в виде

$$W(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} exp\left(-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4Dt}\right), \quad (3)$$

где

$\langle x\rangle$ – совокупность координат броуновской частицы.

Вид решения совпадает с плотностью вероятности нормального закона распределения, если дисперсию приравнять следующей величине (по соотношению Смолуховского-Энштейна):

$$\left\langle (x-\langle x\rangle)^2 \right\rangle = 2Dt. \quad (4)$$

Таким образом, изменение доходности x по закону броуновского движения предполагает, что доходность распределена нормально, но дисперсия увеличивается пропорционально времени наблюдения, т.е. функция распределения «расплывается» со временем.

Модель геометрического броуновского движения величины доходности актива была предложена в 1965 г. П. Самуэльсоном и именно она легла в основу модели Блэка-Шоулза-Мертона.

При выводе формулы Блэка-Шоулза существенными являются следующие предположения.

1. Отсутствуют транзакционные издержки при совершении купли-продажи активов.
2. Не существует ограничений на короткие продажи.
3. Торговля происходит в непрерывном времени.
4. Базовый актив не приносит дивидендов.
5. На рынке существует постоянная непрерывная безрисковая процентная ставка r.
6. Волатильность базового актива постоянна во времени.
7. Доходность актива распределена нормально. Распределение цены базового актива при этом является логнормальным.
8. Доходности актива в различные моменты времени являются независимыми.

Очевидно, что эти предположения не отражают реального положения на рынке. Во-первых, безрисковая процентная ставка и волатильность непостоянны во времени. Кроме того, известно, что цены активов не имеют логнормального распределения. Их распределения более островершинные и имеют более протяженные хвосты, чем логнормальное.

В то же время формулу (1) можно легко получить, если вполне обоснованно предположить, что изменение доходности за период времени ***dt***, равное относительному изменению цены актива равно безрисковой процентной ставке ***r*** за вычетом изменения доли сделок на рынке ***dn***, совершенных по текущей цене ***p*** в рассматриваемый период времени. Однако эти формулы для полного дифференциала, вообще говоря, не имеют отношения к броуновскому движению и являются более общими:

$$\frac{dp}{p} = r dt - \frac{dn}{n}. \qquad (5)$$

Будем считать, что цена актива в момент эспирации (конца действия) ***T*** должна складываться из страйка (цены исполнения опциона) ***K*** и премии C_T в этот же момент:

$$p_T = K + C_T. \qquad (6)$$

В связи с тем, что опцион приобретается в начальный период его действия, весьма разумно, что теоретическая цена опциона C_0, которую мы хотим найти, должна быть дисконтирована на безрисковую процентную ставку относительно премии C_T с учетом доли сделок на рынке, совершаемых на рынке в указанный период времени:

$$C_0 = C_T e^{-rT} n_T. \qquad (7)$$

Интегрируя уравнение (5), являющееся полным дифференциалом, получаем

$$\int_{p_0}^{p_T} \frac{dp}{p} = \int_0^T r dt - \int_{n_0}^{n_T} \frac{dn}{n} = \ln \frac{K + C_T}{p_0} = rT - \ln \frac{n_T}{n_0}. \qquad (8)$$

После преобразования и потенцирования мы получим формулу (1).

Заметим, что вместо постоянной безрисковой процентной ставки можно считать, что ***r*** зависит от ***t***. В этом случае в формуле (1) вместо степени экспоненты ***rT*** будет стоять интеграл:

$$\int_0^T r dt. \qquad (9)$$

Мы пока никак не использовали предположение, что изменение функции распределения происходит по закону броуновского движения, т.е. является нормальным. Мы можем применять альтернативные распределения, которые представляются нам более правильными.

При допущении нормального распределения имеет место соотношение Эйнштейна (4), которое в данном случае можно записать следующим образом:

$$\langle \Delta x \rangle^2 = \sigma^2 T, \qquad (10)$$

где σ – постоянная волатильность цены актива (мера неопределенности относительно доходности ***x*** данного актива).

В результате мы получаем соотношения для ***x***, которые обычно приводятся для формулы Блэка-Шоулза-Мертона, хотя подчеркнем еще раз, при нашем способе вывода, в отличие от классического, мы не обязаны это делать:

$$x_0 - x_T \approx \sigma\sqrt{T}. \qquad (11)$$

При этом

$$\langle x \rangle^2 = \ln \frac{p}{K} + rT, \quad \langle x \rangle = \frac{\ln(p/K) + rT}{\sigma\sqrt{T}}. \qquad (12)$$

В результате мы можем записать:

$$x_0 = \frac{\ln(p/K) + \left(r + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}};$$

$$x_T = x_0 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln(p/K) + \left(r - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}. \qquad (13)$$

Вместо постоянной волатильности можно также рассматривать переменную волатильность от времени. В этом случае будет иметь место интеграл:

$$\langle \Delta x \rangle^2 = \int_0^T \sigma^2 dt. \qquad (14)$$

Мы записали формулу (5) из общих соображений, аналогичных обычным рассуждениям в термодинамике, но ее можно получить и иным способом. Можно предположить, что богатство Φ, образованное рассматриваемым активом, и общая выручка ***TR*** от реализации актива за единицу времени связаны соотношением, аналогичным уравнению состояния экономической системы:

$$TR = r\Phi. \qquad (15)$$

Указанные функции ***TR*** и Φ вычисляются при помощи следующих соотношений (более подробно см. [3, 4, 5]):

$$TR = p\dot{q}, \qquad (16)$$

где

$\dot{q}$ – количество актива, которое производится и потребляется в системе в единицу времени (т.е. скорость изменения актива на рынке);

p – как и ранее, текущая цена актива:

$$\Phi = \int p dq, \qquad (17)$$

где ***q*** – текущее количество актива на рынке.

Если мы запишем дифференциал нашего соотношения:

$$p\dot{q} = r\int p dq;$$

то получаем

$$\dot{q} dp + p d\dot{q} = rp dq. \qquad (18)$$

Умножим и разделим правую часть уравнения (18) на ***dt***, тогда:

$$\dot{q} dp + p d\dot{q} = rp\dot{q} dt. \qquad (19)$$

Интеграл по замкнутому контуру (17) не был равен нулю, т.е. дифференциал ***pdq*** не являлся полным дифференциалом. Разделим левую и правую части полученного уравнения на $TR = p\dot{q}$. В данном случае величина $1/TR$ играет роль интегрирующего множителя, который превращает пфаффову форму (18) в полный дифференциал.

В результате получаем выражение:

$$\frac{dp}{p} = r dt - \frac{d\dot{q}}{\dot{q}}, \qquad (20)$$

которое является полным аналогом уравнения (5).

Очевидно, что имеет место равенство:

$$\frac{d\dot{q}}{\dot{q}} = \frac{dn}{n},$$

так как относительное изменение доли сделок на рынке равно изменению относительной скорости производства актива. Тем самым мы выводим записанную ранее из общих соображений формулу (5), которую мы использовали для вывода уравнения Блэка-Шоулза-Мертона как исходную.

Еще раз повторим, что, используя полученные уравнения, мы:

- во-первых, достаточно просто вывели формулу Блэка-Шоулза-Мертона,
- во-вторых, показали, что при нашем выводе формулы Блэка-Шоулза-Мертона нет необходимости использовать три самых спорных классических предположения, а именно, что безрисковая процентная ставка и волатильность блага постоянны во времени, и что цена блага имеет логнормальное распределение.

Литература

1. Первозванский А.А. Финансовый рынок: расчет и риск [Текст] / А.А. Первозванский, Т.Н. Первозванская. – М. : ИНФРА-М, 1994. – 192 с.
2. Судакова А. Модель Бруно Дюпире (local volatility model) [Электронный ресурс] . – М. : МГУ, ФВМиК, 2006. – 192 с. URL: http://lms.cs.su/files/dupire_model.pdf.
3. Царев И.Г. Принципы движения экономической системы [Текст] / И.Г. Царев // Аудит и финансовый анализ. – 2007. – №1. – С. 105-142.
4. Царев И.Г. Физико-математические аналогии в экономике [Текст] / И.Г. Царев. – М. : ФГУП ЦПП, 2005. – 215 с.
5. Царев И.Г. Функции экономической системы [Текст] / И.Г. Царев // Аудит и финансовый анализ. – 2006. – №4. – С. 90-106.
6. Black F., Scholes M. The pricing of optionsand corporate liabilities // Journal of political economy. – 1973. – №81. – P. 637-659.

Ключевые слова

Блэк-Шоулз-Мертон; интеграл по замкнутому контуру; цены исполнения опциона.

Царев Игорь Геннадьевич

РЕЦЕНЗИЯ

В представленной работе автор предлагает простой способ вывода известной формулы Блэка-Шоулза-Мертона. Ключевым уравнением, которое использовал автор является выражение:

$$\frac{dp}{p} = rdt - \frac{dn}{n},$$

где

p – цена актива;

r – безрисковая процентная ставка;

n – функции распределения вероятности цены актива.

При выводе этого уравнения автор использовал результаты своих предыдущих работ, в которых он исходил из гипотезы, что экономическая система может быть описана как математическая модель, заданная на четномерном симплектическом многообразии, где в качестве координат взяты активы и их цены. Это предположение достаточно спорно и отражает, в первую очередь, личные взгляды автора. Однако следует признать, что выводы, которые автор делает из своей гипотезы, соответствуют некоторым известным экономическим законам. В качестве второго способа получения указанного уравнения автор предлагает его запись из общих соображений, аналогичных обычным рассуждениям в термодинамике. Эти соображения также выглядят достаточно обоснованными. Предложенный автором способ вывода уравнения Блэка-Шоулза-Мертона действительно позволяет отказаться от использования трех самых спорных классических предположений при выводе формулы, а именно: что безрисковая процентная ставка и волатильность актива постоянны во времени, и что цена актива имеет логнормальное распределение.

Работа весьма интересна, хотя и не бесспорна, и может быть рекомендована для публикации в журнале «Аудит и Финансовый Анализ».

Погонин В.В., к.э.н., доцент, заместитель начальника Административного управления, Контрольно-счетная палата Москвы

3.16. ON SIMPLE WAY OF DERIVING THE BLACK-SCHOLES-MERTON

I.G. Tsarev, Candidate of Science (Chemical), the Deputy Chief of a Department

In this paper we propose a simple derivation of the Black-Scholes-Merton with the help of the equation,

$$\frac{dp}{p} = rdt - \frac{dn}{n},$$

where

p – the price of the asset;

r – risk-free interest rate;

n – probability distribution function of asset prices, resulting in two ways:

- first, the isomorphism of Hamiltonian and economic systems , justified in the earlier works of the author;
- secondly, from general considerations, similar to the usual reasoning in thermodynamics.

The proposed method eliminates the use of the three most dispute-governmental classical assumptions in deriving the formula, namely: that the risk-free interest rate and asset volatility are constant over time, and that the price of the asset has a lognormal distribution.

Literature

1. A.A. Pervozvanskii. Financial Markets: accounting and risk [Text] / A.A. Pervozvanskii, T.N. Pervozvanskaya. – M.: INFRA-M, 1994. – 192 p.
2. A. Sudakova. Model Bruno Dyupire (local volatility model) [electronic resource]. – Moscow: MSU, F.V. MandK, 2006. – 192 p. URL: http://lms.cs.su/files/dupire_model.pdf.
3. I.G. Tsarev. Principles of motion of the economic system [Text] / I.G. Tsarev / Audit and financial analysis. – 2007. – №1. – P. 105-142.
4. I.G. Tsarev. Physical and mathematical analogy in economics [Text] / I.G. Tsarev. – Moscow: FSUE LAC, 2005. – 215 p.
5. Tsarev I.G. Functions of economic systems [Text] / I.G. Tsarev / Audit and financial analysis. – 2006. – № 4. – P. 90-106.
6. F. Black, M. Scholes. The pricing of optionsand corporate liabilities // Journal of political economy. – 1973. – №81. – P. 637-659.

Keywords

Volatility; risk-free interest rate; Black-Scholes-Merton; profitability asset.