3.23. О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ БИЗНЕСА В РАМКАХ АДДИТИВНОЙ МОДЕЛИ СКАЧКОВ НА БАЗЕ БРОУНОВСКОГО ПРОЦЕССА

Лесик А.И., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математической статистики и системного анализа;
Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор кафедры финансов и менеджмента, академик РАЕН

Тверской институт экологии и права

Рассматривается задача определения прогнозирования продажной стоимости бизнеса в рамках доходного подхода. Известно, что, экстраполяция статистических данных по тренду на 5-7 лет вперед имеет низкую точность. Поэтому, в настоящей работе предлагается другой метод прогнозирования продажной цены бизнеса основанный на нестационарной модели броуновского движения цены акции. Поскольку модель броуновского процесса является аддитивной, то и предлагаемый способ прогнозирования является аддитивным. Нестационарности прогнозного периода, таким образом, предлагается сопоставить нестационарную модель роста стоимости бизнеса, понимаемого как стоимость всей совокупности его голосующих акций.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача определения прогнозирования продажной стоимости X_n бизнеса на конец последнего n-ого прогнозного периода в методе дисконтирования доходов (***DDM***) в рамках доходного подхода для определения рыночной стоимости бизнеса. Один из способов определения величины X_n состоит в том, что за эту величину принимается прогноз цены продажи на конец последнего n-ого периода [1, 2]. Однако этот способ определения продажной стоимости сталкивается с отсутствием соответствующих статистических данных для прогнозирования. Из обзоров рынка можно узнать в лучшем случае рост капитализации в отрасли за предыдущие годы, однако, экстраполяция этих данных по тренду на 5-7 лет вперед имеет низкую точность. В работе [3] был предложен мультипликативный способ прогнозирования на базе стационарной лог-нормальной модели изменения стоимости. Он оказался применим только в том случае, когда за основу берется изменение какого-нибудь экономического индекса, например, индекса РТС и к тому же предполагает стационарность прогнозного периода, которая как раз и отсутствует в общем случае по определению прогнозного периода. Не удивительно, что на ретроспективных данных по оцениваемому бизнесу, например, на ретроспективных данных по изменению его балансовой стоимости он не работает, поскольку реально они бывают очень разбросанными. Получается, что лог-нормальная стационарная модель хорошо подходит для прогнозирования экономических индексов, но фактически не применима для прогноза изменения рыночной стоимости бизнеса в будущем на основе ретроспективы изменения стоимости его акций. Поэтому, в настоящей работе предлагается другой метод прогнозирования продажной цены бизнеса основанный на нестационарной модели броуновского движения цены акции. Поскольку модель броуновского процесса является аддитивной [5], то и предлагаемый способ прогнозирования является аддитивным. Аддитивный способ моделирования изменения стоимости бизнеса, как таковой, был нами рассмотрен в отдельной работе [4]. Не стационарности прогнозного периода, таким образом, предлагается сопоставить нестационарную модель роста стоимости бизнеса, понимаемого как стоимость всей совокупности его голосующих акций.

1. Формализация задачи

Будем отождествлять стоимость бизнеса со стоимостью всех его голосующих акций. Предположим, что эти акции котируются на бирже. Обозначим через $X(t)$ цену акции в момент времени $t \in [0,+\infty)$ и предположим, что в момент $t = 0$ она приняла значение $u \in [0,+\infty)$ почти наверное (п.н.):

$$X(0) = u. \qquad (1)$$

Предположим, что случайный процесс $X = X(t)$ адекватно описывается нестационарой моделью броуновского движения, задаваемого переходной функцией [8]:

$$p_t(u,E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ct}} \int_E \left(e^{-(v-u)^2/2ct} + e^{-(v+u)^2/2ct}\right) dv, \qquad (2)$$

где $u \geq 0, E \subset [0,+\infty)$, а c - константа, которая определяет масштаб времени и оценивается статистически. В теоретических исследованиях можно считать, что $c = 1$, изменив соответственно масштаб времени, что мы и будем делать дальше. Величина (1) представляет собой вероятность того, что случайная величина (с.в.) $X(t) \in E$. Поэтому подынтегральная функция в (2) представляет собой плотность $f_t(u,v)$ условного распределения с.в. $X(t)$ в момент времени t, при условии, что при $t = 0$ она принимает значение (1) п.н.:

$$f_t(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ct}} \left(e^{-(v-u)^2/2t} + e^{-(v+u)^2/2t}\right). \qquad (3)$$

2. Выражение для условного матожидания цены

Условное матожидание $m_u = m_u(t) = M(x(t)|x(0) = u, п.н.)$ цены акции $X(t)$, при условии, что в начальный момент ее цена принимала значение $u \in [0,+\infty)$ почти наверное (п.н.) составит:

$$m_u = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty v\left(e^{-(v-u)^2/2t} + e^{-(v+u)^2/2t}\right) dv = I_1 + I_2. \qquad (4)$$

Разобьем его на два интеграла I_1, I_2:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty (v-u+u)\left(e^{-(v-u)^2/2ct}\right) d(v-u) =$$

$$= \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(v-u)^2/2t} d(v-u)^2 /$$

$$/2t + \frac{u}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(v-u)^2/2t} d(v-u)/\sqrt{t} =$$

$$= -\sqrt{\frac{t}{2\pi}} e^{-(v-u)^2/2t} \Big|_{v=0}^{\infty} + u(1-\Phi(-\frac{u}{\sqrt{t}})) =$$

$$= \sqrt{\frac{t}{2\pi}} e^{-u^2/2t} + u(1-\Phi(-\frac{u}{\sqrt{t}})).$$

$$I_2 = I_1(-u) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} e^{-u^2/2t} - u(1-\Phi(\frac{u}{\sqrt{t}})) =$$

$$= \sqrt{\frac{t}{2\pi}} e^{-u^2/2t} - u\Phi(-\frac{u}{\sqrt{t}}).$$

Функция Ф здесь представляет функцию распределения стандартного нормального закона с $m_x = m = 0$, $\sigma_x = \sigma = 1$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

которая табулирована в специальных таблицах (см., например, [7]).

Возвращаясь к (4), получим

$$m_u = I_1 + I_2 = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} e^{-u^2/2t} + u[1 - 2\Phi(-\frac{u}{\sqrt{t}})]. \quad (5)$$

Заметим, что

$$2\Phi(-\frac{u}{\sqrt{t}}) = P(|x(t)| \geq x = \frac{u}{\sqrt{t}}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-y^2/2} dy. \quad (6)$$

Интегрируя по частям, получим отсюда представление [8]:

$$2\Phi(-\frac{u}{\sqrt{t}}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_{x}^{\infty} e^{-y^2/2} / y^2 dy) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\frac{\sqrt{t} e^{-u^2/2t}}{u} - \int_{u/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{y^2} dy). \quad (7)$$

Подставляя это выражение в (5) приходим к формуле:

$$m_u(t) = u(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{u/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{y^2} dy). \quad (8)$$

Заметим, что первый интеграл в (7) является несобственным при $x = 0$. При $x > 0$ он оценивается сверху через выражение

$$0 < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-y^2/2} / y^2 dy < \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} \int_{x}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} (-1/y)\Big|_{y=x}^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} / x. \quad (9)$$

Покажем, что порядок первого интеграла в (7) при $x \to +0$ совпадает с полученной оценкой (9). Действительно, пусть $x_0 > x > 0$ при каком-то фиксированном достаточно малом $x_0 > 0$, при котором $e^{-x^2/2} \approx e^{-x_0^2/2} \approx 1$, тогда:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-y^2/2} / y^2 dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\int_{x}^{x_0} + \int_{x_0}^{\infty}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} (e^{-x^2/2} (-1/y)\Big|_{y=x}^{x_0} + \int_{x_0}^{\infty} e^{-y^2/2} / y^2 dy) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (e^{-x^2/2} / x - e^{-x_0^2/2} / x_0 + \int_{x_0}^{\infty} e^{-y^2/2} / y^2 dy) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (e^{-x^2/2} / x + C), \quad (10)$$

где $C = C(x_0)$ некоторая константа, откуда и следует что порядок первого интеграла в (7) при $x \to +0$ совпадает с полученной оценкой (9). Из не собственности первого интеграла в (7) следует не собственность интеграла в (8) при $t = \infty$. В частности при $x = u / \sqrt{t}$ получим из (9) оценку:

$$0 \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{u/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2} / y^2 dy < \sqrt{\frac{2t}{\pi}} e^{-u^2/2t} / u. \quad (11)$$

Подставляя в (8) получим отсюда неравенство:

$$u \leq m_u(t) = u + \sqrt{\frac{2t}{\pi}} e^{-u^2/2t}, \quad (12)$$

причем порядок интеграла в (8) при $t \to \infty$ совпадает с полученной оценкой (11).

Теперь, непосредственно из выражения для условного среднего (8) получим, что $m_u(0) = u$, п.н., а из оценки его порядка при $t \to +\infty$ имеем асимптоту $\sqrt{2t/\pi}$, не зависящую от начального состояния u.

3. Статистическое определение параметров нестационарного процесса

По определению единственного параметра c броуновского процесса, для любых $l, t \geq 0$ приращение $\Delta x = x(t + l) - x(t)$ распределено нормально со средним $M_{\Delta x}(l) = 0$ и дисперсией $D_{\Delta x}(l) = cl$. Поэтому для оценки неизвестного параметра c необходимо получить статистическую оценку дисперсии $D_{\Delta x}(l)$ при $l = 1, 2, ..., L$.

Пусть $x_1, ..., x_N$ – полученные в ходе наблюдения значения с.в. $x(1), ..., x(N)$. Положим

$$m_N(l, x) = \frac{1}{N - l} \sum_{k=1}^{N-l} (x_{l+k} - x_k). \quad (13)$$

Тогда она является несмещенной оценкой среднего приращения $\Delta x = x(t + l) - x(t)$, т.е.

$$M(m_N(l, x)) = M\left(\frac{1}{N - l} \sum_{k=1}^{N-l} (x_{l+k} - x_k)\right) = \frac{1}{N - l} \sum_{k=1}^{N-l} M(x_{l+k} - x_k) = 0.$$

Поскольку

$$D_{\Delta x}(l) = M(x(t + l) - x(t) - M(x(t + l) - x(t))^2 = M[x(t + l) - x(t)]^2,$$

то в качестве оценки этой величины по результатам N наблюдений $x_1, ..., x_N (N > l \geq 0)$ естественно взять величину:

$$d_N(l, x) = \frac{1}{N - l} \sum_{k=1}^{N-l} (x_{l+k} - x_k - m_N(l, x))^2. \quad (14)$$

Или даже

$$d_N(l, x) = \frac{1}{N - l} \sum_{k=1}^{N-l} (x_{l+k} - x_k)^2. \quad (15)$$

Последняя является несмещенной в том смысле, что $M(d_N(l, x)) = D_{\Delta x}(l), 0 \leq l < N - K = L.$

Здесь K – минимальный объем представительной выборки по которой практически допустимо рассчитывать среднее в (13)-(15). После статистической оценки дисперсии $y_l = d_N(l, x), 0 \leq l < N - K = L,$ неизвестную величину параметра c в регрессии $D_{\Delta x}(l) = cl$ можно оценить методом наименьших квадратов по формуле:

$$c = \frac{\sum_{l=1}^{L} l y_l}{\sum_{l=1}^{L} l^2}. \quad (16)$$

После этого прогнозирование условного среднего значения с.в. $x = x(t)$ можно осуществить по формуле (5).

4. Пример прогноза стоимости по ретроспективным данным

Приведем числовой пример прогноза стоимости бизнеса на основе предложенной модели для следующих докризисных ретроспективных данных ОАО «РЭБ-1 района «Покровское-Стрешнево», г.Москва, приведенных в табл. 1.

В следующей табл. 2 приведен расчет параметров броуновского процесса.

Величина $\lambda = 0{,}236$ в сравнении с константой $\lambda^* = 2{,}64$, соответствующей оптимальному времени продажи с $t^* = \lambda * u^2$, доставляющему максимум средней доходности от продажи бизнеса (см. далее п. 5) показывает, что 3 года далеко от оптимального момента продажи. Если разделить 2,64 на 0,236, то получится 11,18 лет. Поэтому прогнозный нестационарный период должен превышать это срок, например, составлять округленно 11 лет. Таким образом, предлагаемая методика не только позволяет прогнозировать изменение стоимости бизнеса, но и определять саму длину нестационарного прогнозного периода, который приводит к максимальной норме дохода от его продажи в конце срока владения. В таблице 3 приведен расчет прогнозных значений условного среднего до 11-го года.

В последней колонке приведено относительное изменении прогнозных значений стоимости бизнеса, показывающее, что предлагаемая модель прогнозирования дает нестационарный темп относительного роста.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении отметим, что настоящая работа возникла из книги [7], в которой был предложен способ прогнозирования изменения условной средней одномерного случайного блуждания, основанный на нестационарной модели броуновского движения с отражающим экраном. Оказалось, однако, что эта модель является адекватной только при $t^* \approx \lambda * u^2 = 2{,}64u^2$. Именно при этих значениях времени достигается максимум средней доходности от продажи бизнеса в нашей аддитивной модели. Поэтому прогнозный нестационарный период должен примерно соответствовать этому сроку, например, целую часть от этого времени. Таким образом, предлагаемая методика не только позволяет прогнозировать изменение стоимости бизнеса, но и определять саму длину нестационарного прогнозного периода, который приводит к максимальной норме дохода от его продажи в конце срока владения.

Таблица 1

РЕТРОСПЕКТИВНЫЕ ДАННЫЕ О БАЛАНСОВОЙ СТОИМОСТИ СОБСТВЕННОГО КАПИТАЛА

Пассив	01.01.2003	01.01.2004	01.01.2005	01.01.2006	01.01.2007	Среднее
Собственные средства, тыс. руб.	0	11	700	1 363	14 340	-
Xt - Xt - 1, доля	-	11	689	663	12 977	3 585
Центрированная ***Xt - Xt - 1***, доля	-	-3 574	-2 896	-2 922	9 392	0
Квадрат центрированной ***Xt – Xt - 1***, доля	-	12 773 476	8 386 816	8 538 084	88 209 664	29 477 010
Xt - Xt - 2, доля	-	-	700	1 352	13 640	5231
Центрированная ***xt - Xt - 2***, доля	-	-	- 4 531	- 3 879	8 409	0
Квадрат центрированной ***Xt - Xt - 2***, доля	-	-	20 526 940	15 044 055	70 716 887	35 429 294
Xt - Xt - 3, доля	-	-	-	1 363	14 329	7 846
Центрированная ***Xt - Xt - 3***, доля	-	-	-	-6 483	6 483	0
Квадрат центрированной *Xt - Xt - 3*, доля	-	-	-	42 029 289	42 029 289	42 029 289

Таблица 2

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ БРОУНОВСКОГО ПРОЦЕССА МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

$Yt = Dx(t)$	t	t^2	$t * Yl$	c	ct	u^2	$\lambda = ct / u^2$
29 477 010	1	1	29 477 010	-	-	-	-
35 429 294	2	4	70 858 588	-	-	-	-
42 029 289	3	9	126 087 867	-	-	-	-
Сумма	-	14	226 423 465	16 173 105	48519314	205 635 600	0,235 948

Таблица 3

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СТОИМОСТИ БИЗНЕСА

t	$(2ct / п)^{1/2}$	$U = u / (ct)^{1/2}$	$exp(-U^2/2)$	$Ф(-U)$	$m_u(t)$	$m_u(t) / m_u(t - 1) - 1,\%$
1	3 210	3,57	0,0017	0,0002	14 340	-
2	4 539	2,52	0,04	0,0059	14 360	0,14
3	5 559	2,06	0,12	0,0187	14 472	0,78
4	6 419	1,78	0,20	0,0375	14 574	0,71
5	7 177	1,59	0,28	0,0559	14 749	1,20
6	7 862	1,46	0,35	0,0721	14 997	1,68
7	8 492	1,35	0,40	0,0885	15 226	1,53
8	9 078	1,26	0,45	0,1038	15 464	1,56
9	9 629	1,19	0,49	0,1170	15 736	1,76
10	10 150	1,13	0,53	0,1292	16 009	1,74
11	10 645	1,08	0,56	0,1401	16 294	1,78

Литература

1. Оценка бизнеса: Учебник/ Под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М.: Финансы и статистика. – 2002.
2. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и/или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России». – Deloitte&Touche. – декабрь 2003-март 2005.
3. Батурина О.Ю., Басангов Ю.М., Перевозчиков А.Г. Прогнозирование изменения чистого операционного дохода от аренды недвижимости в зависимости от предполагаемого изменения ее стоимости. Финансовая аналитика,— 2007, №5, с.42-46.
4. Перевозчиков А.Г. Лесик А.И. К аддитивной форме рекуррентного уравнения для дисконтирования денежного потока. Аудит и финансовый анализ. – 2010, №4, с. 105-108.
5. Дж. Ламперти. Вероятность. - М.: Наука, 1973. – 184 с.

Ключевые слова

Оценка бизнеса; доходный подход; метод дисконтирования доходов; продажная стоимость бизнеса; ставка дисконта; инвестированный капитал; собственный капитал; выручка; денежный поток (ДП); темп изменения изменения ДП.

Лесик Александра Ильинична

Перевозчиков Александр Геннадьевич

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается задача определения прогнозирования продажной стоимости бизнеса в рамках доходного подхода. Известно, что, экстраполяция статистических данных по тренду на 5-7 лет вперед имеет низкую точность. Поэтому, в настоящей работе предлагается другой метод прогнозирования продажной цены бизнеса основанный на нестационарной модели броуновского движения цены акции. Поскольку модель броуновского процесса является аддитивной, то и предлагаемый способ прогнозирования является аддитивным. Нестационарности прогнозного периода, таким образом, предлагается сопоставить нестационарную модель роста стоимости бизнеса, понимаемого как стоимость всей совокупности его голосующих акций.

Ранее А.Г.Перевозчиковым была предложена мультипликативная форма прогнозной модели роста стоимости бизнеса, а в настоящей статье развивается ее аддитивный аналог. Показано, что аддитивная форма уравнения дисконтирования лучше соответствует природе нестационарного Виннеровского процесса и предложены мультипликативные аналоги всех основных мультипликативных формул, которые могут быть полезны практикующим оценщикам, а также использоваться в исследовательских целях. Рассматривается числовой пример прогноза продажной стоимости бизнеса в рамках предложенной аддитивной модели.

Считаю, что статья А.Г.Перевозчикова, А.И.Лесик «О прогнозировании изменения цены бизнеса в рамках аддитивной модели скачков на базе броуновского процесса» является новой и актуальной, и может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н.., профессор, декан факультета экономики и менеджмента, проректор по научной работе Тверского института экологии и права

3.23. ABOUT THE PROGNOSTICATION OF THE BUSINESS PRICE WITHIN THE FRAMEWORK OF THE ADDITIVE MODEL OF JUMPS ON THE BASE OF BROWN'S PROCESS

A.I. Lesik, Candidate of Science, Assistant Professor of Mathematical Statistics and System Analisis Department;
A.G. Perevozchikov, Doctor of Economics, the Professor of Finance and Management Department

Tver Institute of Ecology and Law

The task of finding the prognostication of the sales value of business within the framework of income approach. The extrapolation of the statistic

data by the trend for 5-7 years forecast is known to have a low exactness. Thus in this article we suggest another method of the business'ssales price prognostication, which is based on non stationary model of Brown's change of share's price. As the model of brown's process is additive, the suggested method of prognostication is also additive. The non stationarity of prognoses period is suggested to compare with non stationary which is regarded as the cost of the sum of its voting shares.

Literature

1. Valuation of Business: A Manual. Edited by A.G.Gryaznova, M.A. Fedotova – M.: Finance and Statistics. - 2002.
2. Methodology and Manual on Conducting Valuation of Business and Assets of Public Limited Company «United Energy Systems of Russia». – Deloitte & Touche. – Dec. 2003-March 2005.
3. O.U.Baturina, U.M.Basangov, A.G. Perevozchikov. The Prognostication of Net Operational Income from Real Estate Rent Depending on Expected Cost Change. Financial Analyses. - 2007, №5, p.42-46.
4. A.G. Perevozchikov, A.I. Lesic . About the Additive Form of the Recurrent Equation For Cash Flow Discounting. Audit and Financial Analyses. – 2010, №4, p.105-108.
5. J. Lamperty. The Probability. – M.: Nauka. 1973 / 184p.

Keywords

Business evaluation; income approach; income discounting method; business's sale rule; discount rate; invested capital; private capital; receipts; cash flow; temp change of receipts; cash flow change rate.