

### 3.4. МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Гагарин А.Г., к.э.н., доцент кафедры информационных систем в экономике

Волгоградский государственный технический университет

Статья посвящена вопросам теории полезности и принятия решений. Представлена авторская модель динамической полезности и методика расчета суммарной степени удовлетворенности потребностей – оценки качества экономического блага. Для сравнения рядов значений суммарной степени удовлетворенности при реализации различных альтернатив разработаны точечные и интервальные показатели.

Качество в современном понимании – это полнота свойств и характеристик продукта, процесса или услуги, которые способны удовлетворить заявленные или подразумеваемые нужды потребителя (ISO 9000:2000 [1]). Полезность в экономической теории в наиболее широком смысле – это способность товара удовлетворять потребности [2, 3]. Согласно этим определениям можно утверждать о значительном пересечении объемов данных понятий.

Существует два основных подхода к изучению полезности – кардиналистический и ординалистический [4]. Первый подход предполагает возможность присвоения потребителем количественных значений, выраженных в неких абстрактных величинах – ютилях, определенным потребляемым благам. Таким образом, соотнося рыночные стоимости благ с их полезностями (все величины имеют определенное числовое значение), он может выбрать товар, обладающий максимальной полезностью на единицу стоимости.

Ординалистический подход отказывается от количественного измерения полезности, оставляя за потребителем только способность ранжирования полезности благ. При этом можно сказать, что **A** полезнее **B**, **B** полезнее **C** (причем **A** полезнее **C**), но ничего нельзя сказать о величине этого предпочтения. Т.е. зная о предпочтении потребителя относительно единичного количества благ **A**, **B** и **C**, мы попадаем в затруднительное положение при их другом количественном соотношении и оценке наборов различных благ.

Перечислим основные положения теории полезности.

- Потребитель при выборе благ опирается на свое знание об их полезности – совокупности свойств, удовлетворяющих его определенные потребности.
- Оценка полезности (количественная или качественная) носит субъективный и индивидуальный характер.
- Зависимость суммарной полезности от количества потребляемого блага может иметь разный вид (принято считать, что растет с убывающей скоростью – так называемый закон убывающей предельной полезности).
- Полезность блага зависит от степени удовлетворенности соответствующих потребностей у его потребителя и скорости их насыщения.
- Полезность блага может потребляться не мгновенно в процессе акта потребления, а быть достаточно длительным процессом, что требует оценки как количества, так и вероятности и длительности ожидаемой в будущем полезности.
- Полезность некоторых благ носит отрицательный характер – по крайней мере по характеру удовлетворения некоторых потребностей из общего набора связанных с данным благом потребностей (данная проблема детальнее разработана в теории игр в контексте принятия решений

и имеет более общий характер по сравнению с потребительским выбором товаров на рынке) (рис. 1).

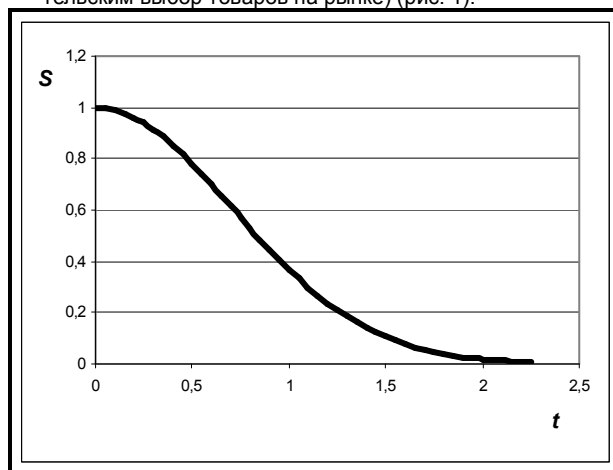


Рис. 1. График зависимости степени удовлетворенности потребности **S** от времени **t**

Проблема потребительского выбора и оценки совокупной полезности в настоящее время требует не только более глубоких и детализированных решений, но также их большей оперативности и обоснованности. Данные обстоятельства возможно учесть только при компьютерной реализации математических и экспертных методов оценки полезности.

Введем основные обозначения:

**S** – степень удовлетворения потребности;

**L** – количество потребностей;

**S<sub>ℓ</sub>** – степень удовлетворения ℓ-й потребности ( $ℓ \in [1; L]$ ,  $S_{\ell} \in [0; 1]$ ). Зависимость **S<sub>ℓ</sub>** от времени **t** выглядит следующим образом (в том случае, когда потребность не удовлетворяется):

$$S_{\ell} = e^{-\alpha_{\ell} t^2}; \tag{1}$$

где  $\alpha_{\ell}$  – коэффициент, отражающий скорость убывания ℓ-й потребности.

Во-вторых, ненормированный показатель важности потребности мы обозначим как **U**, и найдем по формуле (рис. 2):

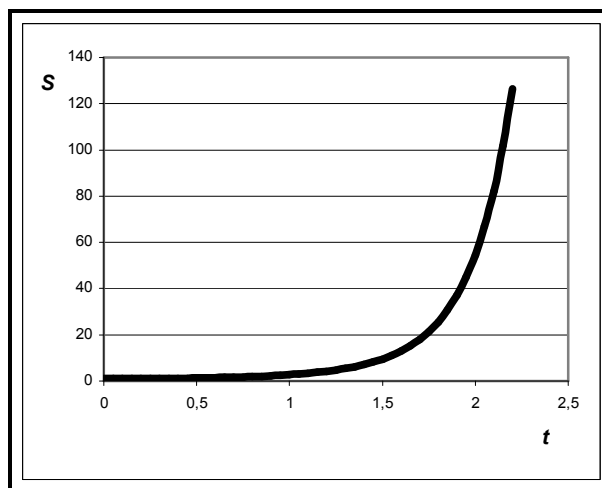


Рис. 2. График зависимости ненормированной важности потребности **U** от времени **t**

$$U_{\ell} = \frac{1}{S_{t_{\ell}}} \tag{2}$$

Поскольку  $S_{t_{\ell}} \in [0; 1]$ , то  $U_{\ell} \in [1; +\infty]$ .

Нормированный показатель важности  $\ell$ -й потребности  $w_{\ell}$  рассчитывается по формуле:

$$w_{\ell} = \frac{U_{\ell}}{\sum_{\ell=1}^L U_{\ell}} \tag{3}$$

или, подставив значение  $U_{\ell}$  из (2):

$$w_{\ell} = \frac{1}{S_{t_{\ell}} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{S_{t_{\ell}}}} \tag{4}$$

Суммарная степень удовлетворенности  $S_{\Sigma}$  находится по формуле:

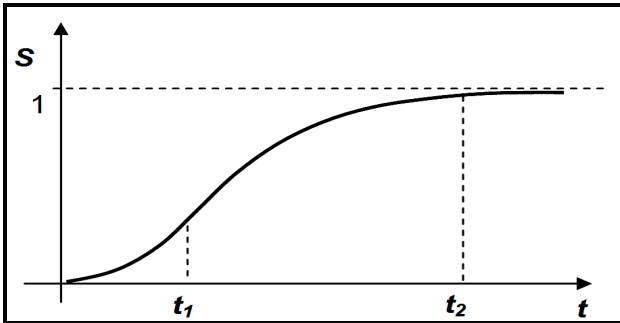
$$S_{\Sigma} = \sum_{\ell=1}^L w_{\ell} S_{t_{\ell}} \tag{5}$$

Далее, подставив  $S_{t_{\ell}}$ , преобразуем формулу:

$$\begin{aligned} S_{\Sigma} &= \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{S_{t_{\ell}} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{S_{t_{\ell}}}} S_{t_{\ell}} = \\ &= \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{\sum_{\ell=1}^L \frac{1}{S_{t_{\ell}}}} = \frac{L}{\sum_{\ell=1}^L \frac{1}{S_{t_{\ell}}}} = \frac{L}{\sum_{\ell=1}^L U_{\ell}} \end{aligned}$$

Поскольку  $U_{\ell} \in [1; +\infty]$ , то  $S_{\Sigma} \in [0; 1]$ .

Теперь нам предстоит описать процесс удовлетворения потребности – сначала в самой простой форме – одним удовлетворяющим фактором. Изначально мы исходим из предположения, что степень удовлетворения потребности  $S$  при насыщении потребности с течением времени возрастает по нелинейному закону. Графически этот закон в самом общем виде нам представляется так (рис. 3).

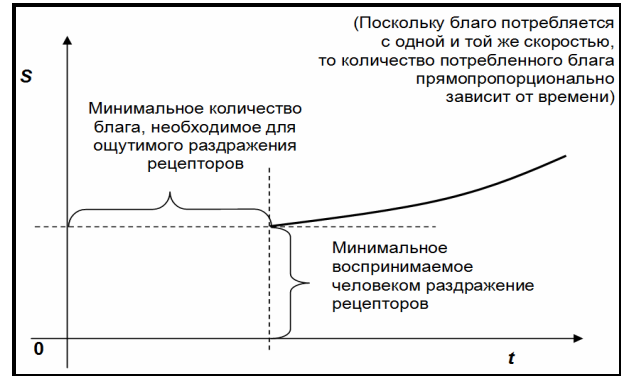


**Рис. 3. График зависимости степени удовлетворенности потребности  $S$  от времени  $t$  (при наличии одного фактора, удовлетворяющего потребность)**

В экономической теории наиболее подробно этот процесс рассматривается в промежутке от  $t_1$  до  $t_2$  и носит название закона убывающей предельной полезности: полезность каждой следующей порции непрерывно потребляемого блага ниже, чем полезность предыдущей порции (т.е. самым вкусным из пяти подряд съеденных одинаковых яблок будет первое, затем второе и так далее). Как видно из графика на рис. 3, предельные области в начале и в конце процесса не рассматриваются в данной теории. Поэтому нам необходимо выдвинуть предположение о характере зави-

симости  $S(t)$  в этих областях:  $t \in [0; t_1] \cap [t_2; \infty]$ . Необходимо сразу оговориться, что:

- во-первых, мы считаем, что благо потребляется с постоянной скоростью (и тогда между временем потребления и количеством потребленного блага существует прямая линейная связь);
- во-вторых, на данном этапе исследования мы абстрагируемся от начальной степени удовлетворенности потребности, считая ее равной нулю;
- в-третьих, мы считаем, что на степень удовлетворенности данной потребности не влияют никакие другие факторы (потребление благ, прямо удовлетворяющих данную потребность, или явление синергизма потребностей, при котором изменение степени удовлетворенности одной потребности изменяет (увеличивает или уменьшает) степень удовлетворенности одной или нескольких других потребностей), кроме как потребление единственного блага.



**Рис. 4. График зависимости степени удовлетворенности потребности  $S$  от времени  $t$  (при наличии одного фактора, удовлетворяющего потребность) в окрестности нуля**

Непрерывное равномерное потребление блага следующим образом влияет на степень удовлетворенности потребности:

- в первые моменты количество потребленного блага достаточно мало, чтобы вовсе не раздражать рецепторы, и поэтому около нуля график выглядит следующим образом (рис. 4);
- далее, начиная с момента первого раздражения до точки  $t_1$  на рис. 3 имеет место закон возрастающей предельной полезности (рис. 5);
- следующий отрезок графика (в диапазоне от  $t_1$  до  $t_2$ ) соответствует закону убывающей предельной полезности (рис. 6);
- изображенная на рис. 3 заключительная часть графика более детально показана на рис. 7. Возникающий при передозировке некоторых благ (обычно удовлетворяющих физиологические потребности – пища, вода, а также наркотические средства) эффект снижения степени удовлетворенности, отраженный на рис. 8, можно объяснить так: степень удовлетворенности изначально соответствующей благу потребности продолжает расти, бесконечно стремясь к единице, но начиная с некоторого момента времени потребляемое благо начинает уменьшать степень удовлетворенности другой (или других) потребности, которая, суммируясь с остальными, приводит к снижению суммарной степени удовлетворенности потребностей. Здесь следует еще раз повторить наш тезис о том, что одно благо может удовлетворять произвольное количество потребностей в различной степени (и, как мы видим из примера с перенасыщением, эта степень может быть как положительной, так и отрицательной). Или, другими словами, одно и то же благо может приносить как пользу, так и вред, в зависимости от индивидуальных особенностей потребителя и количества потребляемого блага.

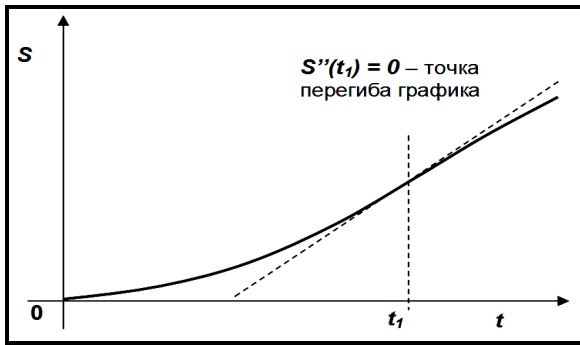


Рис. 5. График зависимости степени удовлетворенности потребности  $S$  от времени  $t$  (при наличии одного фактора, удовлетворяющего потребность) в диапазоне от нуля до точки перегиба ( $S'' > 0$ )

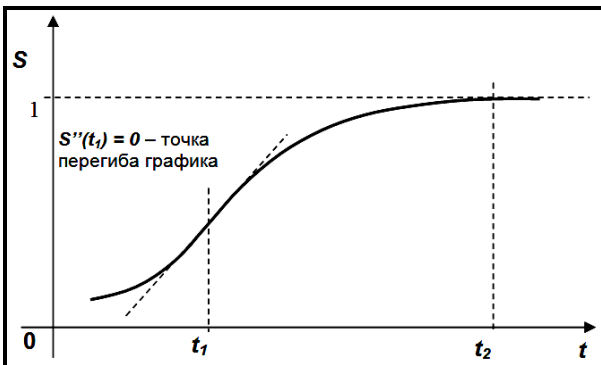


Рис. 6. График зависимости степени удовлетворенности потребности  $S$  от времени  $t$  (при наличии одного фактора, удовлетворяющего потребность) в диапазоне от точки перегиба  $t_1$  до точки  $t_2$ , в которой  $S \approx 1$  ( $S'' < 0$ )

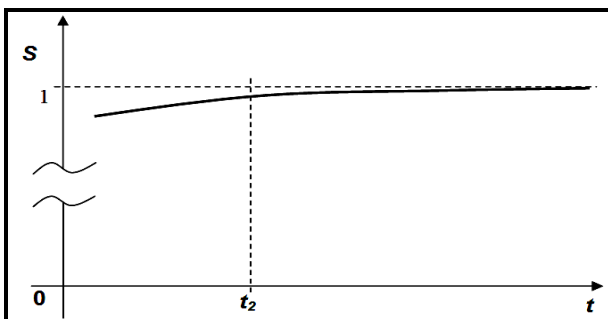


Рис. 7. График зависимости степени удовлетворенности потребности  $S$  от времени  $t$  (при наличии одного фактора, удовлетворяющего потребность), при  $t > t_2$

Описанный выше процесс происходит со степенью удовлетворения потребности  $S$  под воздействием одного удовлетворяющего фактора, но при этом мы не учитываем текущее состояние удовлетворенности потребности. Вернее, представленный на рис. 3 график отражает ситуацию при начальном значении  $S$ , равном нулю и отсутствии релаксации (голода) – что является математической абстракцией. Более реалистичным выглядит предположение о параллельной работе двух разнонаправленных факторов:

- уменьшение степени удовлетворенности потребности с течением времени (релаксация) – медленный процесс;

- увеличение степени удовлетворенности потребности под воздействием удовлетворяющего фактора (насыщение) – более быстрый процесс.

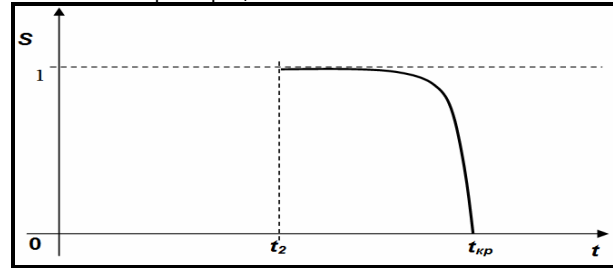


Рис. 8. График зависимости степени удовлетворенности потребности  $S$  от времени  $t$  (при наличии одного фактора, удовлетворяющего потребность) в диапазоне от точки  $t_2$ , в которой  $S \approx 1$ , до момента потребления предельного количества блага –  $t_{кр}$

Тогда результирующая степень удовлетворения потребности при воздействии одного удовлетворяющего фактора будет складываться из медленного процесса уменьшения  $S$  с течением времени (1) и более быстрого процесса возрастания-насыщения  $S$  (2). Поскольку результирующее значение  $S$  в каждый момент складывается из двух составляющих – релаксации и насыщения, то под воздействием насыщающего фактора значение  $S$  будет принимать иные (большие) значения, чем при уменьшении  $S$  под воздействием только релаксации. Тогда под воздействием релаксации будет уменьшаться уже результирующая  $S$ , зависящая в каждый момент времени как от процесса релаксации, так и от насыщения.

Введем новые обозначения:

- $S_t$  – переменная, отражающая уменьшение степени удовлетворенности потребности с течением времени;
- $S_q$  – переменная, отражающая увеличение степени удовлетворенности потребности при потреблении определенного количества блага (так как мы рассматриваем непрерывный равномерный процесс потребления, то количество потребленного блага прямо пропорционально времени потребления);
- $S_c$  – переменная, отражающая результирующую степень удовлетворенности потребности, равную сумме  $S_t$  и  $S_q$ ;
- $t_0$  – момент начала потребления (до этого момента (включительно), т.е. при  $t \leq t_0$ ,  $S_q = 0$ );

Первое, что необходимо сделать для формального описания динамики процесса потребления, – выбрать конкретное уравнение для  $S_t$  и  $S_q$ . Поскольку вид графика нам известен, и более нас ничего не связывает, то выберем уравнение вида (рис. 9):

$$y = e^{-\alpha \cdot x^2} \tag{6}$$

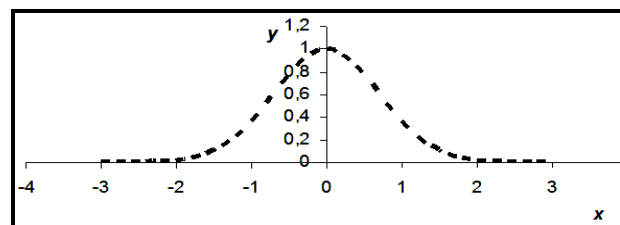


Рис. 9. График уравнения  $y = e^{-x^2}$

Положительная часть этого графика, представленная на рис. 1, обладает всеми необходимыми для нас свойствами. Перевернутое уравнение:

$$y = 1 - e^{-\alpha \cdot x^2} \quad (7)$$

отражает процесс возрастания степени удовлетворения потребности при потреблении блага (рис. 10).

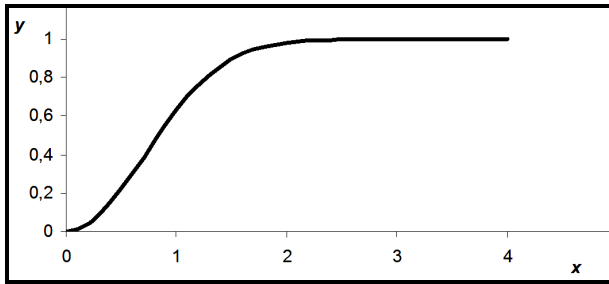


Рис. 10. График зависимости  $y = 1 - e^{-x^2}$  ( $x \in [0; \infty)$ )

Теперь мы должны отобразить две открывающиеся перед нами возможности – рассчитывать результирующую степень удовлетворения потребности  $S_c$  как сумму  $S_t$  и  $S_q$  или с помощью непрерывного дифференцируемого уравнения, или с помощью итеративного дискретного уравнения. Первая альтернатива дает нам удобную форму для применения математического анализа, но не отражает две важные особенности.

1. В реальности нет бесконечно малых приращений блага при потреблении – как по причине принципиальной неделимости блага (дом, автомобиль, установка пломбы стоматологом, просмотр фильма в кинотеатре и т.д.), так и в силу ограниченной чувствительности человеческих органов чувств (нет ощутимой разницы между потреблением 100 и 100,1 г или 199,9 и 200 мл пищевого продукта и т.д., поскольку добавочное количество блага незаметно для человека);
2. С момента начала потребления  $t_0$  текущая степень удовлетворенности данной потребности уже равна  $S_c$ , а не  $S_t$  (как до потребления). Таким образом, процесс «релаксации» (отражающий уменьшение степени удовлетворенности потребности с течением времени) воздействует уже на результирующую степень удовлетворения потребности  $S_c$  (которая является суммой  $S_t$  и  $S_q$  – что возможно учесть только при итеративном циклическом описании процесса).

Вторая возможность лишает нас эффективного инструмента исследования – математического анализа, однако более точно отражает суть явления.

В обоих случаях  $S_t$  рассчитывается по уравнению вида  $S_t = e^{-\alpha t^2}$ , но во втором случае  $t$  будет принимать не последовательные значения, зависящие от номера итерации, а значения, зависящие от результирующей степени удовлетворения  $S_c$  на предыдущем шаге.

Значение  $S_q$  должно быть скорректировано (умножено) на величину  $1 - S_t$ , отражающую максимально возможное добавочное увеличение  $S_c$ , уже имеющее сглаженное  $S_t$ . Также при расчете  $S_q$  необходимо учесть смещение начальной точки на  $t_0$  вправо ( $t - t_0$ ).

Запишем систему уравнений для непрерывного представления результирующей степени удовлетворенности:

$$\begin{cases} S_t = e^{-\alpha t^2}; \\ S_q = (1 - S_t) * (1 - e^{-\alpha_q (t-t_0)^2}); \\ S_c = S_t + S_q. \end{cases}$$

Рассчитаем и покажем графики  $S_t$ ,  $S_q$ , и  $S_c$  ( $\alpha_q = 1, \alpha_t = 1$ ).

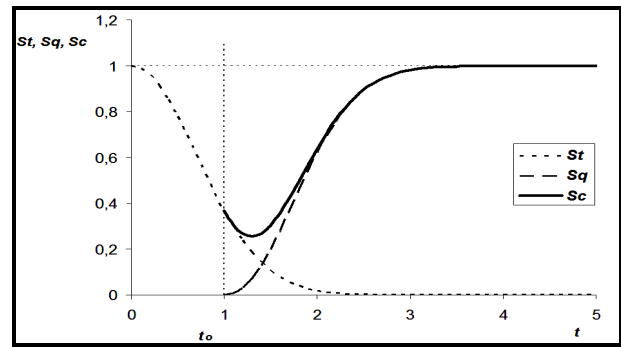


Рис. 11. Графики  $S_t, S_q, S_c$  для первого варианта (непрерывное дифференцируемое представление)

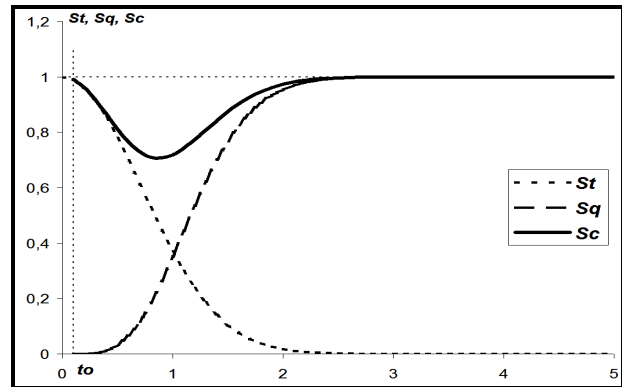


Рис. 12. Графики  $S_t, S_q, S_c$  (при  $t_0 = 0, 1$ )

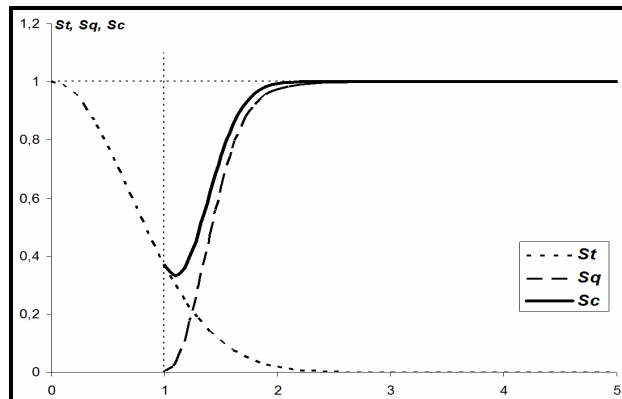


Рис. 13. Графики  $S_t, S_q, S_c$  (при  $t_0 = 1, \alpha_q = 5$ )

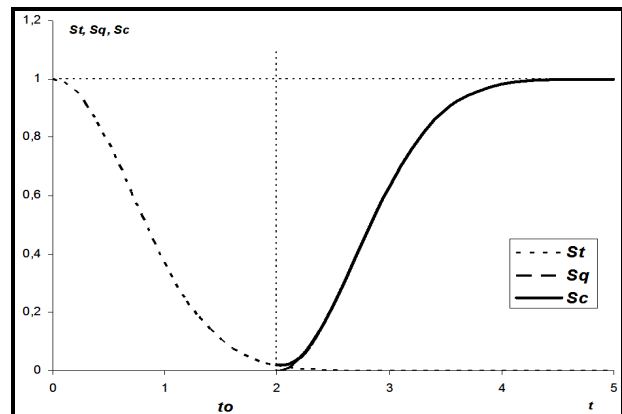


Рис. 14. Графики  $S_t, S_q, S_c$  (при  $t_0 = 2$ )

Из анализа графиков на рис. 11-14 можно сделать следующие выводы:

- в начале процесса потребления ( $t = t_0$ ) преобладает процесс уменьшения результирующей степени удовлетворенности  $S_c$ , что вызывает «провал» на графике – уменьшение  $S_c$  по сравнению со значением степени удовлетворенности потребности в начальный момент времени (причем чем выше начальная степень удовлетворенности, тем ярче выражен ниспадающий характер начального фрагмента графика  $S_c$ );
- увеличение коэффициента  $\alpha_q$  с единицы до пяти (см. рис. 11 и рис. 14), отражающего скорость увеличения степени удовлетворения потребности вследствие потребления, обеспечивает достижение высоких значений  $S_c$  (равных 0,99), в точках 3,15 и 1,98 соответственно, что говорит о нелинейной зависимости  $S_c$  от  $\alpha_q$ ;
- чем меньше начальное значение степени удовлетворенности потребности, тем более подобны графики  $S_c$  и  $S_q$  – процесс потребления здесь имеет преобладающее влияние на изменение результирующей степени удовлетворенности (по сравнению с релаксацией);
- чем больше начальное значение степени удовлетворенности потребности, тем на большем начальном отрезке подобны графики  $S_c$  и  $S_t$  – процесс потребления здесь не вносит существенного вклада в изменение результирующей степени удовлетворенности;
- значение  $S_c$  стремится к единице при  $t \rightarrow \infty$ , из чего можно сделать вывод о теоретической невозможности полной удовлетворенности потребности. Однако, принимая во внимание существование второго порога чувствительности<sup>1</sup>, можно предположить, что бесконечное потребление не даст заметных дополнительных приращений в степени удовлетворенности потребности, начиная с некоторого достаточно большого значения времени (и количества блага, конечно). Таким образом, на практике потребности, удовлетворенные со степенью 0,99 или 0,999, можно считать полностью удовлетворенными.

Теперь нам предстоит описать процесс потребления итеративно, учитывая две вышеозначенные поправки: первая – потребление ведется не бесконечно малыми, а ощутимыми порциями, и вторая – результирующая степень удовлетворения потребности складывается из двух процессов (потребления и релаксации,  $S_q$  и  $S_t$ ), и каждый из этих процессов в данный момент времени зависит от их состояния, а также от состояния  $S_c$  в прошлый момент времени.

Обозначим номер итерации  $i$ , промежуток времени между ближайшими итерациями –  $\Delta t$ . В начальный момент времени  $t_0$  ( $i = 0$ ) приращение удовлетворенности от потребления равно нулю, т.е.  $S_{q0} = 0$ , и, соответственно:

$$S_{c0} = S_{q0} + S_{t0} = S_{t0}.$$

На следующем шаге ( $i = 1$ ) значение времени рассчитывается по формуле:

$$t_1 = t_0 + \Delta t,$$

или

$$t_i = t_0 + i * \Delta t.$$

Обобщив, мы можем записать уравнения и для произвольного  $i$ -го шага ( $i \in [1, \infty]$ ,  $i \in \mathbf{N}$ ):

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t,$$

или

$$t_i = t_0 + i * \Delta t.$$

Поскольку на предыдущем (нулевом) шаге результирующая степень удовлетворения потребности  $S_c$  равна  $S_t$ , то для  $S_{t1}$  справедлива следующая формула:

$$S_{t1} = e^{-\alpha_t t_1^2}.$$

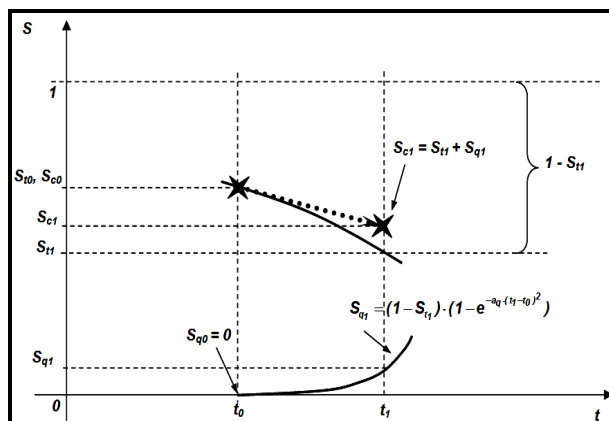


Рис. 15. Графики  $S_t$ ,  $S_q$ ,  $S_c$  для второго варианта (дискретное итеративное представление) в точках  $t_0$  и  $t_1$

Значение  $S_q$  на каждом шаге ограничивается текущим значением  $S_t$ :

$$S_{q1} = (1 - S_{t1}) * (1 - e^{-\alpha_q t_1^2}).$$

Результирующая степень удовлетворенности на каждом шаге рассчитывается как сумма:

$$S_{c1} = S_{t1} + S_{q1}. \tag{8}$$

Результаты нулевого и первого шагов представлены на рис. 15.

На втором шаге необходимо только скорректировать формулу для  $S_t$  – поскольку на предыдущем первом шаге результирующая степень удовлетворенности потребности уже приняла значение, отличное от  $S_t$ . Тогда процесс релаксации уменьшает значение степени удовлетворенности, равное  $S_{c1}$ , и для нахождения  $S_{t2}$  мы должны решить уравнение ( $t_{x1}$  показывает точку на оси  $t$ , в которой  $S_t = S_{c1} * (S_t = e^{-\alpha_t t^2})$ ):

$$S_{c1} = e^{-\alpha_t t_{x1}^2}.$$

Прологарифмировав, находим  $t_{x1}$ :

$$\ln S_{c1} = -\alpha_t * t_{x1}^2;$$

$$t_{x1}^2 = -\frac{\ln S_{c1}}{\alpha_t};$$

$$t_{x1} = \sqrt{-\frac{\ln S_{c1}}{\alpha_t}}.$$

На втором шаге  $t_{x2}$  находится по формуле:

$$t_{x2} = \sqrt{-\frac{\ln S_{c1}}{\alpha_t}} + \Delta t,$$

и тогда  $S_{t2}$ :

$$S_{t2} = e^{-\alpha_t t_{x2}^2}.$$

Для произвольного  $i$ -го шага  $t_{xi}$  и  $S_{ti}$  находятся аналогично (рис. 16 и 17):

<sup>1</sup> Здесь имеется в виду неразличимость ощущений от потребления близких по объему порций благ (100 и 100,1 мл молока, например).

$$t_{x_i} = \sqrt{-\frac{\ln S_{c_{i-1}}}{\alpha_t}} + \Delta t;$$

$$S_{t_i} = e^{-\alpha_t t_{x_i}^2}.$$

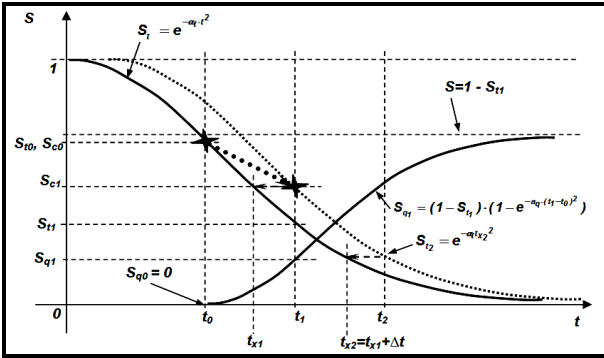


Рис. 16. Графическое отображение процесса корректировки значения  $S_t$  в точке  $t_2$  с учетом возросшей степени удовлетворенности:  $S_{t2} = S_t(t_{x2})$

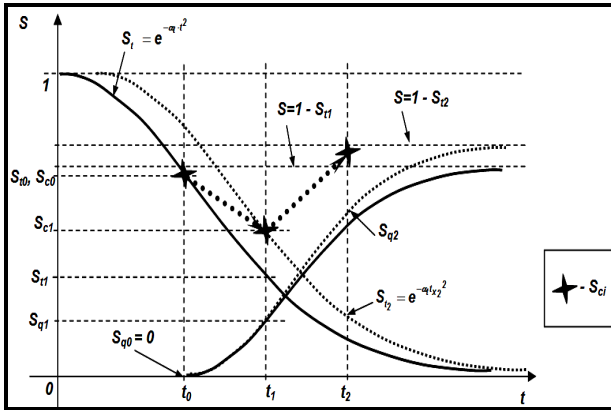


Рис. 17. Графики  $S_t$ ,  $S_q$ ,  $S_c$  для второго варианта (дискретное итеративное представление) в точках  $t_0$ ,  $t_1$  и  $t_2$

Формулы для итеративного расчета степени удовлетворенности потребности при воздействии одного удовлетворяющего фактора:

$$t_i = t_0 + i * \Delta t;$$

$$t_{x_i} = \sqrt{-\frac{\ln S_{c_{i-1}}}{\alpha_t}} + \Delta t;$$

$$S_{t_i} = e^{-\alpha_t t_{x_i}^2};$$

$$S_{q_i} = (1 - S_{t_i}) * (1 - e^{-\alpha_q (t_i - t_0)^2});$$

$$S_{c_i} = S_{t_i} + S_{q_i}.$$

В качестве начальных условий необходимо задать значения  $\alpha_t$ ,  $\alpha_q$ ,  $t_0$ ,  $\Delta t$ . Также необходимо присвоить  $t_{x0}$  значение  $t_0$ , и тогда начальные значения  $S_t$ ,  $S_q$  и  $S_c$  будут равны:

$$S_{t_0} = e^{-\alpha_t t_{x_0}^2};$$

$$S_{q_0} = (1 - S_{t_0}) * (1 - e^{-\alpha_q (t_0 - t_0)^2}) = (1 - S_{t_0}) * (1 - e^0) = (1 - S_{t_0}) * (1 - 1) = 0;$$

$$S_{c_0} = S_{t_0} + S_{q_0} = S_{t_0} + 0 = S_{t_0}.$$

Для начальных условий  $\alpha_t = 1$ ,  $\alpha_q = 1$ ,  $t_0 = 1$ ,  $t_{x_0} = 1$ ,  $\Delta t = 0,01$  график  $S_c$  примет вид, отраженный на рис. 18.

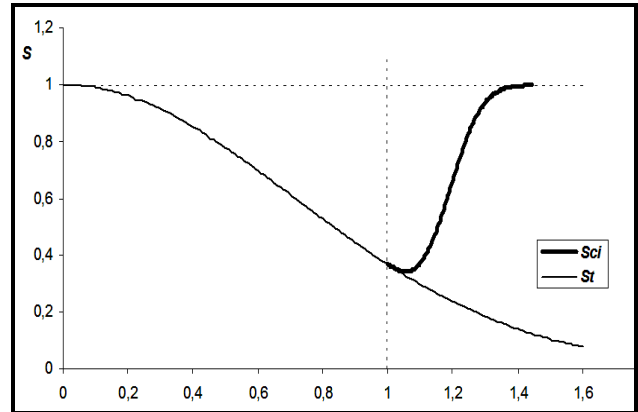


Рис. 18. Графики зависимости степени удовлетворенности потребности  $S_t$  (при отсутствии удовлетворяющих факторов) и степени удовлетворенности потребности  $S_c$  (при воздействии одного удовлетворяющего фактора) от времени  $t$ , при дискретном итеративном вычислении результирующей степени удовлетворенности потребности

Сравнивая данные графики с соответствующими графиками на рис. 11 (графики  $S_t$ ,  $S_q$ ,  $S_c$  в непрерывном дифференцируемом представлении), можно сделать следующие нижеперечисленные выводы.

- Вид графика результирующей степени удовлетворенности не изменился – как и прежде, можно выделить три участка:
  1. Отрезок, на котором результирующая степень удовлетворенности  $S_c$  убывает;
  2. Отрезок с возрастающей частью графика  $S_c$ ;
  3. Отрезок со значениями  $S_c$ , приблизительно равными единице (здесь дополнительные порции блага не дают ощутимого прироста в удовлетворенности потребности).
- Во втором случае (дискретное итеративное представление) график  $S_c$  быстрее достигает значений, близких к 1 (т.е. рассматриваемая потребность быстрее достигает насыщения). Так, при равных начальных условиях ( $\alpha_t = 1$ ,  $\alpha_q = 1$ ,  $t_0 = 1$ ) в первом случае  $S_c$  принимает значение, равное 0,99, в точке  $t \approx 3,146$ , а во втором – в точке  $t \approx 1,372$ . Отняв  $t_0$ , получим абсолютные значения, отражающие скорость роста  $S_c$ : 2,146 и 0,372 (отношение величин равно 5,769 – мы видим, что учет факта возрастания результирующей степени удовлетворенности при вычислении значений  $S_q$  и  $S_t$  в очередной момент времени оказывает существенное влияние на скорость роста результирующей степени удовлетворенности  $S_c$ ).

В методе анализа иерархий альтернативы сравниваются по различным критериям качества (в общем виде различным для каждого актора). Под критериями качества акторов выступают важные для них свойства (параметры) альтернатив – и тогда возможна ситуация, когда одна из альтернатив не обладает данным свойством, что приводит к неточностям в расчетах итоговых оценок альтернатив. Нам представляется более рациональным подход с выделением как потребностей акторов, так и составляющих полезности (критериев качества) альтернатив, а также установлением зависимости между критериями качества и потребностями.

В статическом виде зависимости между критериями качества и потребностями можно представить в матричном виде (табл. 1).

Таблица 1

**МАТРИЦА ВЛИЯНИЯ СВОЙСТВ АЛЬТЕРНАТИВЫ НА ПОТРЕБНОСТИ АКТОРА**

	<i>P1</i>	...	<i>Pk</i>	...	<i>PK</i>
<i>N1</i>	<i>v11</i>	...	<i>v1k</i>	...	<i>v1K</i>
...	...	...	...	...	...
<i>Nl</i>	<i>vl1</i>	...	<i>vlk</i>	...	<i>vlK</i>
...	...	...	...	...	...
<i>NL</i>	<i>vL1</i>	...	<i>vLk</i>	...	<i>vLK</i>

где  
*N<sub>l</sub>* – потребность,  
*P<sub>k</sub>* – свойство альтернативы,  
*v<sub>lk</sub>* – степень влияния *k*-го свойства альтернативы на степень удовлетворенности *l*-й потребности (причем  $\sum_{k=1}^K v_{lk} \leq 1$  – суммарный вклад всех полезных свойств альтернативы на удовлетворение *l*-й потребности не превышает единицу, и  $\sum_{l=1}^L v_{lk} \leq 1$  – суммарная степень удовлетворенности, полученная от *k*-го свойства, может быть больше, меньше или равна единице).

Для отдельно взятой потребности *N<sub>l</sub>* степень удовлетворенности *S<sub>l</sub>* при отсутствии удовлетворяющих факторов рассчитывается по формуле:

$$S_{t_i} = e^{-\alpha_{t_i} t_i^2} \tag{9}$$

При этом значение  $\alpha_{t_i}$  характеризует психологические и физиологические особенности данного актора и может считаться константой на том основании, что актор объединяет в себе особенности группы людей (и таким образом меньше подвержен случайным изменениям, чем отдельно взятый индивид). В том случае, когда актор представляет небольшую динамичную группу, или оцениваемый период достаточно велик, значение  $\alpha_{t_i}$  может иметь векторный или функциональный характер.

Каждое *k*-е свойство альтернативы оказывает на результирующую степень удовлетворенности *l*-й потребности следующее влияние:

$$S_{q_{lk}} = v_{lk} (1 - S_{t_i}) (1 - e^{-\alpha_{q_{lk}} (t - t_0)^2}) \tag{10}$$

Также необходимо учитывать количество и скорость отдачи полезности того или иного свойства альтернативы. В общем виде данную информацию можно зафиксировать в табл. 2.

Таблица 2

**ДИНАМИКА ОТДАЧИ ПОЛЕЗНОСТИ СВОЙСТВА АЛЬТЕРНАТИВЫ**

№ временного отрезка	Временной отрезок	Коэффициент скорости отдачи полезности <i>k</i> -м свойством на удовлетворение <i>l</i> -й потребности
1	<i>t<sub>0</sub> - t<sub>1</sub></i>	$\alpha_{q_{lk1}}$
...	...	...
<i>j</i>	<i>t<sub>j-1</sub> - t<sub>j</sub></i>	$\alpha_{q_{lkj}}$
...	...	...
<i>J</i>	<i>t<sub>J-1</sub> - t<sub>J</sub></i>	$\alpha_{q_{lkJ}}$

Коэффициент скорости отдачи полезности  $\alpha_q$  на различных временных отрезках может принимать или фиксированные значения, или иметь функциональную зависимость (например, от времени).

Заполнив табл. 2, мы сможем найти результирующую степень удовлетворенности потребности *S<sub>c<sub>l</sub></sub>*, используя для этого дискретный итеративный способ расчета:

$$\begin{cases} t_i = t_0 + i \cdot \Delta t; \\ t_{x_{li}} = \sqrt{-\frac{\ln S_{c_{li-1}}}{\alpha_{t_i}}} + \Delta t; \\ S_{t_{li}} = e^{-\alpha_{t_i} t_{x_{li}}^2}; \\ S_{q_{li}} = \sum_{k=1}^K v_{lk} (1 - S_{t_{li}}) \cdot (1 - e^{-\alpha_{q_{lk}} (t_i - t_0)^2}); \\ S_{c_{li}} = S_{t_{li}} + S_{q_{li}} \dots \end{cases}$$

Суммарную степень удовлетворенности всех потребностей от реализации альтернативы *A<sub>r</sub>* (*r* ∈ [1..R]) на *i*-м шаге рассчитаем по формуле:

$$S_{\Sigma_i}^r = \frac{L}{\sum_{l=1}^L \frac{1}{S_{c_{li}}}} \tag{11}$$

Далее необходимо сравнить значение суммарной степени удовлетворенности от реализации каждой альтернативы с базисным значением суммарной степени удовлетворенности, в качестве которого могут выступать следующие нижеперечисленные.

1. Пессимистический вариант – при реализации данной альтернативы все учитываемые потребности не получают удовлетворения, и при  $i \rightarrow \infty$  получаем:

$$S_{\Sigma_i}^{pessimistic} = \frac{L}{\sum_{l=1}^L \frac{1}{S_{t_{li}}}} \rightarrow 0;$$

2. Реалистичный вариант – в любой будущий момент времени базисное значение суммарной степени удовлетворенности приравнивается базисному значению в исходный момент времени:

$$S_{\Sigma_i}^{realistic} = S_{\Sigma_0};$$

3. Прогностический вариант – дается вероятностный прогноз развития ситуации «как есть» по всем степеням удовлетворенности потребностей, составляющим суммарную степень удовлетворенности, и базисное значение является вектором степеней удовлетворенности потребностей в *i*-й момент времени  $S_{\Sigma_i}^{prognosis}$  (в качестве прогнозируемых степеней удовлетворенности потребностей могут братья или наиболее вероятные значения, или рассчитанные умножением вероятности каждого исхода на соответствующее значение степени удовлетворенности потребности);

4. Стандарт – в соответствии с действующими государственными стандартами или иными нормативными документами, отражающим состав и уровень качества объекта-альтернативы, заполняется вектор значений составляющих суммарной степени удовлетворенности  $S_{\Sigma}^{standard}$  в любой момент времени, принимаемый за

базисный (в простейшем случае все элементы вектора принимают одно и то же значение);

5. Идеальный вариант – в любой будущий момент времени базисное значение суммарной степени удовлетворенности приравнивается единице:  $S_{z_i}^{ideal} = 1$ .

Выбранный вариант оценки базисного значения суммарной степени удовлетворенности обозначим  $S_z^o$ , и найдем коэффициент роста степени удовлетворенности:

$$D_z^r = \frac{S_z^r}{S_z^o} \tag{12}$$

В практических целях возможно сравнение суммарных степеней удовлетворенности не по всему множеству значений ( $i = [1; I]$ ), а в определенные моменты времени, выбираемые в результате исследования динамики насыщения наиболее важных потребностей. Также для удобства и простоты расчетов предлагается ввести стандартные лингвистические оценки уровней степени удовлетворенности и скоростей изменения величин  $S_t$  и  $S_q$ .

При ранжировании критериев и альтернатив в методе анализа иерархий получила распространение 9-ти бальная шкала оценивания, причем реально используется 5-ти бальная шкала с оценками {1; 3; 5; 7; 9}, а промежуточные значения {2; 4; 6; 8} служат для более тонкой градации и практически не применяются [9,10]. Воспользуемся данным подходом для шкалирования степени удовлетворенности потребности.

Разбив область значений  $S$  на 9 областей, получим следующие значения (табл. 3). На графике  $S_t$  (рис. 19) изображено деление области значений на 9 равных диапазонов.

Таблица 3

**ЗНАЧЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ УДОВЛЕТВОРЕННОСТИ ПОТРЕБНОСТИ И ИХ ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПРИ 9-БАЛЛЬНОМ ШКАЛИРОВАНИИ**

Номер диапазона	Границы диапазонов	Срединные диапазонов	Лингвистическая оценка степени удовлетворенности потребности
1	1-0,888889	0,944444	Отлично
2	0,888889-0,777778	0,833333	Промежуточное значение
3	0,777778-0,666667	0,722222	Хорошо
4	0,666667-0,555556	0,611111	Промежуточное значение
5	0,555556-0,444444	0,5	Нормально
6	0,444444-0,333333	0,388889	Промежуточное значение
7	0,333333-0,222222	0,277778	Плохо
8	0,222222-0,111111	0,166667	Промежуточное значение
9	0,111111-0	0,055556	Очень плохо

Покажем, что размерность шкалы (количество оценок) должно соотноситься с числом учитываемых при анализе потребностей. Пусть:

$L$  – число потребностей;

$S_\ell$  – степень удовлетворения  $\ell$ -ой потребности ( $\ell \in [1; L]$ ,  $S_\ell \in [0; 1]$ ).

Пусть все потребности, кроме одной, удовлетворены в равной степени:

$$S_\ell = \omega \ (\ell \in [1; L - 1]).$$

Потребность за номером  $L$  удовлетворена в значительно меньшей степени:

$$S_L = \psi \ (\omega \gg \psi).$$

Рассчитаем суммарную степень удовлетворенности потребности по формуле:

$$S_z = \frac{L}{\sum_{\ell=1}^L \frac{1}{S_\ell}} = \frac{L}{\frac{L-1}{\omega} + \frac{1}{\psi}} \tag{13}$$

Графики  $S_z$  при различных значениях  $L$  ( $L = \{2; 10; 100\}$ ) приведены на рисунках 20-22, из которых видно, что при большем количестве потребностей  $L$  влияние все более меньших значений  $\psi$  нивелируется суммой степеней удовлетворенности остальных потребностей (рис. 19 и 20).

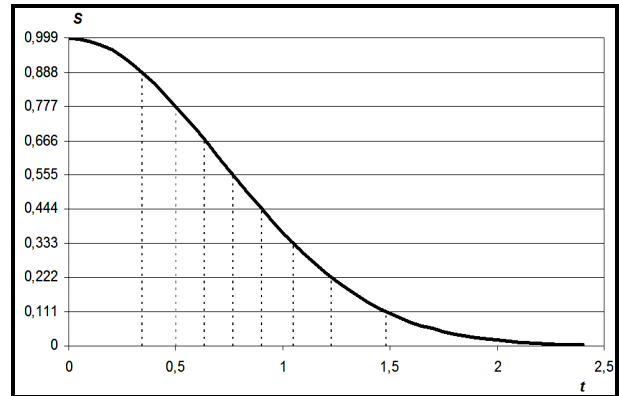


Рис. 19. График  $S_t$  с выделением 9 равных диапазонов по области значений с их отображением на ось  $t$

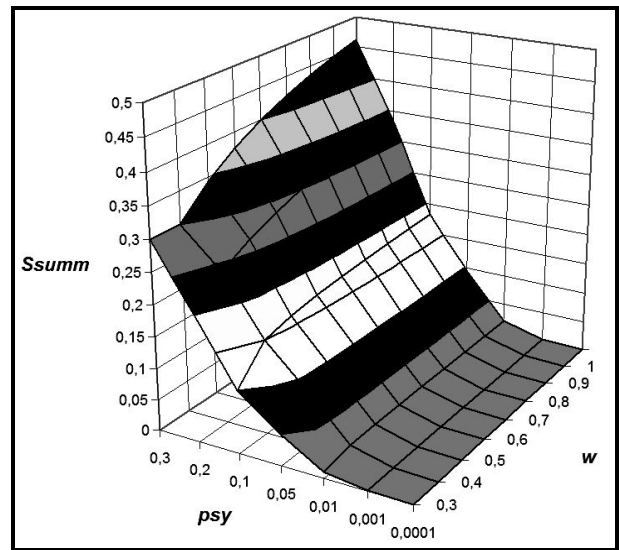


Рис. 20. График зависимости  $S_z$  от степени удовлетворенности  $L$  потребностей ( $L = 2$ ) при одной слабоудовлетворенной потребности ( $S_L = \psi$ ) и удовлетворении остальных потребностей в равной степени  $S_\ell = \omega$  ( $\ell \in [1; L - 1]$ )

Оценим степень влияния слабоудовлетворенной потребности на суммарную степень удовлетворенности. Пусть  $\omega = 1/n$  ( $n \in [1; 5]$ ),  $\psi = 1/mL$  ( $m \in [1; +\infty)$ ). Преобразуем формулу для расчета суммарной степени удовлетворенности (рис. 21 и 22):



$$S_z = \frac{L}{\frac{L-1}{\omega} + \frac{1}{\psi}} = \frac{L}{(L-1)n + mL} = \frac{1}{n+m-\frac{n}{L}} \quad (14)$$

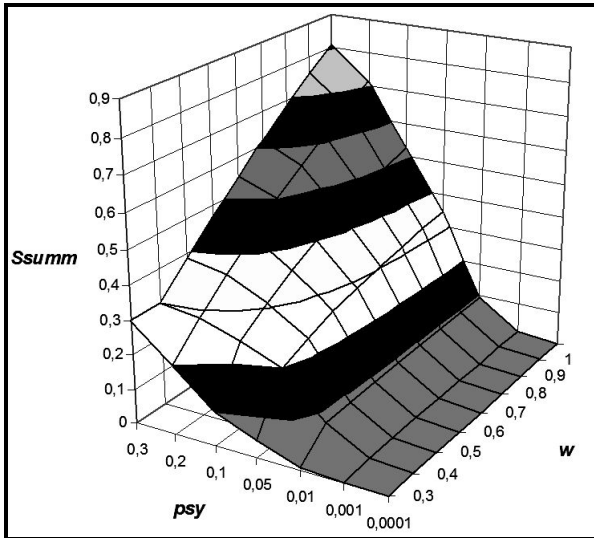


Рис. 21. График зависимости  $S_z$  от степени удовлетворенности ( $L = 10$ )

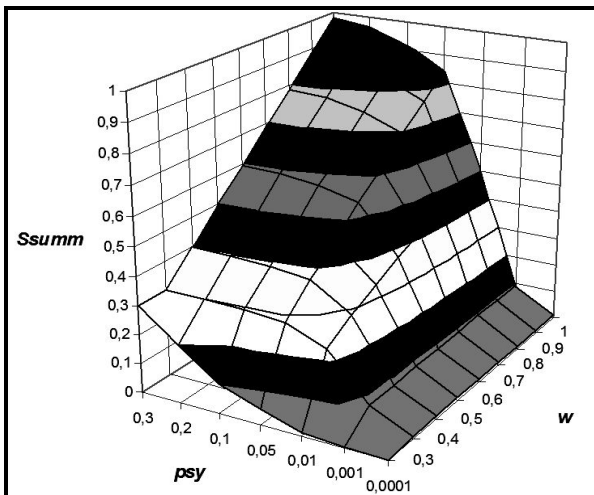


Рис. 22. График зависимости  $S_z$  от степени удовлетворенности ( $L = 100$ )

При  $L > n$  для существенного влияния единственной слабоудовлетворенной потребности необходимо, чтобы  $m \geq n$ . Таким образом,  $\psi$  принимает значения порядка  $1/5L, \dots, 1/L$  или меньше, и представленная в табл. 3 шкала применима для анализа не более четырех потребностей ( $L = 1/5\psi = 1/(5 * 0,055) \approx 3,64$ ).

В случае, когда одна потребность удовлетворяется несколькими полезными свойствами альтернативы с различными степенями влияния  $v$  (см. табл. 1), необходимо учитывать существенность влияния отдельно взятой связи  $N_e - P_k$  (потребность – свойство альтернативы). Максимальное количество связей равно:

$$L \cdot K,$$

где

$L$  – количество потребностей;

$K$  – количество полезных свойств альтернативы, при сплошном заполнении матрицы влияния свойств аль-

тернативы на потребности актора  $v_{ek}$  принимают значения порядка  $1/K$ . Тогда для адекватного описания предельной ситуации  $\psi$  должно принимать значение:

$$\psi \in \left\{ \frac{1}{5 * \text{количество\_оценок} \cdot \text{вес\_оценки}}; \frac{1}{\text{количество\_оценок} \cdot \text{вес\_оценки}} \right\} = \left\{ \frac{1}{5 * LK} * \frac{1}{K}; \frac{1}{LK} * \frac{1}{K} \right\} = \left\{ \frac{1}{5LK^2}; \frac{1}{LK^2} \right\}.$$

График  $\psi$  представлен на рис. 23 ( $\psi = 1/LK^2$ ). Для различных значений выражения  $LK^2$  необходимо выбирать различные значения  $\psi$ , рассчитываемые по формуле:

$$\psi = \frac{1}{LK^2} * \omega; \quad (15)$$

где  $\omega$  – средняя степень удовлетворенности потребностей (считаем, что находится в диапазоне  $[0,2; 1]$ ).

Поскольку ситуация, в которой каждое полезное свойство альтернативы оказывает влияние на все потребности актора, маловероятно, и может рассматриваться только как теоретически возможная. Тогда в качестве оценки значения  $\omega$  мы можем взять среднее из области допустимых значений – 0,5. Рассчитаем значения  $\psi$  при различных значениях  $LK^2$  (табл. 4).

Таблица 4

**ЗАВИСИМОСТЬ МИНИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ШКАЛЫ  $\psi$  ОТ КОЛИЧЕСТВА ПОТРЕБНОСТЕЙ  $L$  И КОЛИЧЕСТВА ПОЛЕЗНЫХ СВОЙСТВ АЛЬТЕРНАТИВЫ  $K$**

$\psi$	$LK^2$	Значение $L, K$ при $L = K$ (в скобках – не округленное)
$10^{-1}$	5	2 (1,71)
$10^{-2}$	50	4 (3,68)
$10^{-3}$	500	8 (7,94)
$10^{-4}$	5 000	18 (17,10)
$10^{-5}$	50 000	37 (36,84)
$10^{-6}$	500 000	80 (79,37)
$10^{-x}$	$5 \cdot 10^{-(x-1)}$	$\sqrt[3]{5 \cdot 10^{-(x-1)}}$

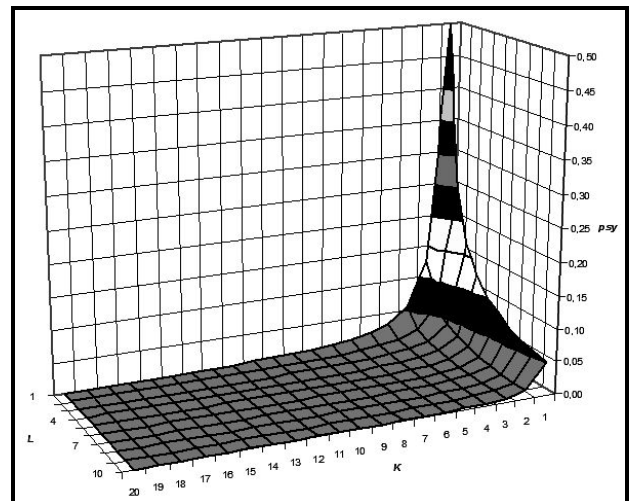


Рис. 23. График зависимости минимального значения шкалы  $\psi$  от количества потребностей  $L$  и количества полезных свойств альтернативы  $K$

Для ранжирования значений, принимаемых  $S_c$ , можно предложить следующий подход:

- Размерность  $n$  шкалы зависит от степени детализированности представлений об оцениваемом процессе (минимум – два значения: плохо и хорошо – для быстрой и поверхностной оценки; максимум – множество действительных чисел в диапазоне  $[0; 1]$  – для процессов, в которых можно дать точное количественное определение текущей степени удовлетворенности и где существует определенная функциональная зависимость между количеством потребленного блага и степенью удовлетворенности).
- Минимальное значение шкалы рассчитывается по формуле  $\varphi_1 = \psi = \frac{1}{LK^2} * \omega$ . При малых значениях  $L \in [1; 2]$  и  $K = 1$  необходимо использовать значение, зависящее от размерности шкалы (порядка  $1/2n$ ).

Максимальное значение шкалы  $\varphi_n$  рассчитывается как:  
 $\varphi_n = 1 - \psi$ .

- Промежуточные значения  $\varphi_i$  ( $i \in [2; n - 1]$ ) рассчитываются по формуле:

$$\varphi_i = \varphi_1 + \frac{i-1}{n-1}(\varphi_n - \varphi_1). \quad (16)$$

Приведем пример расчета шкалы на основе стандартной пятибалльной оценки. Допустим, число количеств потребностей  $L = 15$ , полезных свойств альтернативы  $K = 50$ . Тогда  $\varphi_1 = \psi = 0,00004$ . Максимальное значение шкалы  $\varphi_n = 1 - 0,00004 = 0,99996$  (табл. 5).

$$\varphi_2 = 0,00004 + \frac{2-1}{5-1}(0,99996 - 0,00004) = 0,25002;$$

$$\varphi_3 = 0,00004 + \frac{3-1}{5-1}(0,99996 - 0,00004) = 0,5;$$

$$\varphi_4 = 0,00004 + \frac{4-1}{5-1}(0,99996 - 0,00004) = 0,74998.$$

Таблица 5

#### ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ 5-БАЛЛЬНОЙ ШКАЛЫ

Лингвистическое значение	Количественное значение
Отлично	0,99996
Хорошо	0,74998
Удовлетворительно или нормально	0,5
Плохо	0,25002
Очень плохо	0,00004

Представим весь процесс оценки качества с помощью модели динамической полезности в компактном структурированном виде:

1. Заполняется матрица влияния свойств альтернативы на потребности актора (см. табл. 1)<sup>2</sup>.
  - Если ячейки матрицы заполняются константами, то мы получаем статическую картину соотношения свойств альтернативы и потребностей актора. При статическом оценивании коэффициенты степеней влияния могут быть найдены с помощью парного сравнения влияния свойств альтернативы на степень удовлетворенности потребности актора, показавшего свою адекватность в решении широкого круга задач [9, 10].
  - Для представления динамического процесса матрицу необходимо заполнить или векторами значений, или формулами, отражающими зависимость степени

<sup>2</sup> От адекватности и обоснованности реализации данного этапа зависят все дальнейшие исследования и результаты. Неточности при оценке степеней влияния трудно исправить на дальнейших этапах, а ошибки в описании структуры свойств альтернатив и потребностей акторов заведомо дадут неправильный результат.

2. Для каждой пары свойство альтернативы  $\leftrightarrow$  потребность актора оцениваются коэффициенты скорости отдачи полезности  $\alpha_q$ , и для каждого свойство альтернативы – коэффициенты скорости убывания полезности  $\alpha_t$ .
    - Данные коэффициенты также могут принимать постоянное, векторное или функциональное значение. Причем коэффициент скорости убывания полезности  $\alpha_t$  являет собой отражение внутренних особенностей актора, т.е. некоего идеального индивида – среднестатистического представителя выделенной нами группы, и в оперативном и тактическом диапазоне прогнозирования может с достаточной достоверностью принимать постоянное значение.
    - Коэффициент скорости отдачи полезности  $\alpha_q$  отражает собственно сам процесс потребления (или его отсутствие при  $\alpha_q = 0$ ), и тем более вероятно имеет динамический и прерывистый характер, что также необходимо отразить.
    - Для более быстрого и удобного экспертного оценивания коэффициентов  $\alpha_q$  и  $\alpha_t$  представляется целесообразным использование заранее рассчитанных шкал скорости, соотносящих лингвистические и числовые значения (так, за нормальную скорость можно взять  $\alpha_t = 1$  и, учитывая, что четырехкратное увеличение коэффициента дает двукратное увеличение скорости, построить всю шкалы с требуемым уровнем детализации);
  3. Итеративным дискретным способом рассчитывается значение суммарной степени удовлетворенности потребностей в настоящее время – status quo (или иное сравнительное значение из предложенных – пессимистический, реалистический, прогностический, стандартный или идеальный вариант), принимаемое за базисное. При расчете используется данные первого и второго шагов.
  4. Аналогичным способом рассчитываются значения суммарных степеней удовлетворенности по всем альтернативам в необходимые моменты времени, сравниваемые с базисным для нахождения коэффициентов роста степеней удовлетворенности.
  5. Далее, исходя из специфики решаемой задачи и значений (векторов значений) коэффициентов роста степеней удовлетворенности  $D'_0$  при реализации тех или иных альтернатив лицо, принимающее решение, делает выбор одной из альтернатив.
- Оценка полезности на основе коэффициентов роста степеней удовлетворенности  $D'_0$  осуществляется по их значению в некоторых точках временной оси, выбранных лицом, принимающим решение. Наличие нескольких точек позволяет отразить динамику процесса изменения полезности от реализации альтернатив, однако достоверность этого отображения зависит от числа и расположения выбранных точек. Такой подход оправдан при небольшом количестве точек (вероятно, не более психологического порога, воспринимаемого человеком –  $7 \pm 2$ ) и небольшом числе альтернатив. На подготовительных этапах расчета  $D'_0$  мы сделали все необходимое для оценки суммарной степени удовлетворенности на всем множестве точек определенного интервала временной оси. Таким образом, перейдем от точечных оценок степени удовлетворенности к интервальным, или интегральным.
- Выделим следующие показатели динамики изменений степени удовлетворенности на определенном интервале:
1. Среднее значение суммарной степени удовлетворенности  $S'_z$  от реализации  $r$ -й альтернативы на определенном диапазоне:

$$\bar{S}_z^r = \frac{\sum_{i=1}^n S_{z_i}^r}{n}, \quad (17)$$

где  $n$  – количество диапазонов, на которых рассчитано значение  $S_z^r$ .

$S_{z_i}^r$  – значение  $S_z^r$  на  $i$ -м интервале.

2. Минимальное и максимальной значение суммарной степени удовлетворенности  $S_z^r$  от реализации  $r$ -й альтернативы на определенном диапазоне:

$$S_z^{r,max} = \max\{S_z^r\}, \quad (18)$$

$$S_z^{r,min} = \min\{S_z^r\}. \quad (19)$$

3. Среднее положительное ( $\Delta S_z^{r,pos}$ ) и отрицательное ( $\Delta S_z^{r,neg}$ ) отклонения суммарной степени удовлетворенности  $S_z^r$  от реализации  $r$ -й альтернативы на определенном диапазоне. Расчет данных отклонений представлен на рис. 24.

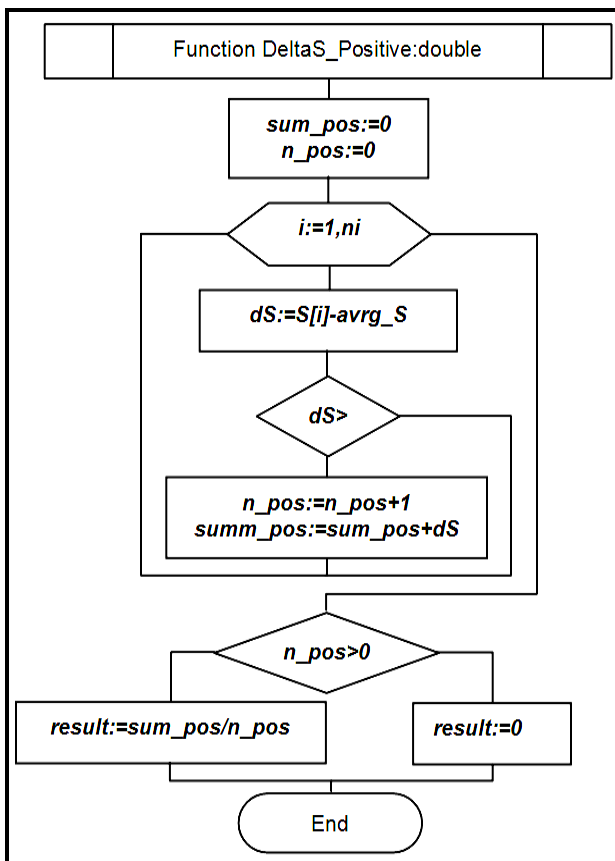


Рис. 24. Алгоритм расчета  $\Delta S_z^{r,pos}$

4. Дисперсия  $\sigma_r^2$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma_r$  суммарной степени удовлетворенности  $S_z^r$  от реализации  $r$ -й альтернативы на определенном диапазоне:

$$\sigma_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (S_{z_i}^r - \bar{S}_z^r)^2}{n-1}. \quad (20)$$

Приведенные показатели являются общепринятыми и в общем характеризуют две величины: среднее ожидаемое значение степени удовлетворенности и отклонение от среднего (которое можно сопоставить с вероятностью или риском получения высоких / низких значений степени удовлетворенности). Поскольку такой подход возможен при изучении любых явлений, для которых можно получить значения их параметров на определенном временном интервале, то он может использоваться только как базовый инструмент, пока неизвестны (пусть даже на концептуальном уровне) законы изменения измеренных параметров. Формулировка законов человеческой психологии выходит за рамки тематики настоящего исследования, однако на непрофессиональном уровне дадим пример более углубленного в предметную область показателя, отражающего динамику изменений степени удовлетворенности.

Допустим, нам известно, что степень удовлетворенности с течением времени изменялась следующим образом (рис. 25).

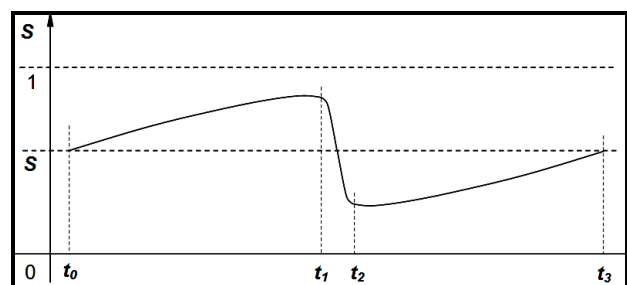


Рис. 25. Динамика степени удовлетворенности  $S$  с течением времени  $t$

Мы видим, что на интервалах  $[t_0; t_1]$  и  $[t_2; t_3]$  отмечается медленный рост степени удовлетворенности, а на интервале  $[t_1; t_2]$  – быстрое снижение степени удовлетворенности.

Можно предположить, что у исследуемого индивида к моменту времени  $t_3$  будут следующие впечатления об интервале  $[t_0; t_3]$ :

- доминирующими будут воспоминания о резком снижении степени удовлетворенности в течении  $[t_1; t_2]$ ;
- текущая степень удовлетворенности  $S_3$  значительно ниже максимальной степени удовлетворенности на интервале ( $S_1$ ), что также усиливает негативное впечатление от данного этапа;
- текущая степень удовлетворенности  $S_3$  значительно выше минимальной степени удовлетворенности на интервале ( $S_2$ ), что внушает определенный оптимизм;
- в последнее время  $[t_2; t_3]$  степень удовлетворенности возрастает, что также сказывается на увеличении положительной оценки интервала  $[t_0; t_3]$ .

На основе приведенного примера можно выделить ряд показателей, более точно характеризующих степень удовлетворенности потребностей на определенном интервале для индивида (точнее говоря, об его впечатлениях обо всем интервале в конце данного интервала):

1. Показатели, характеризующие скорость положительных и отрицательных изменений степени удовлетворенности. Чем больше скорость, тем большее значение имеет данное изменение.
2. Показатели, характеризующие меньшее влияние более старых событий по сравнению с произошедшими в последние периоды времени.

Рассмотрим первый показатель подробнее. При его расчете суммируются квадраты положительных и от-

рицательных изменений степени удовлетворенности на каждом шаге. Алгоритм расчета  $dS_x^{pos^2}$  приведен на рис. 26.

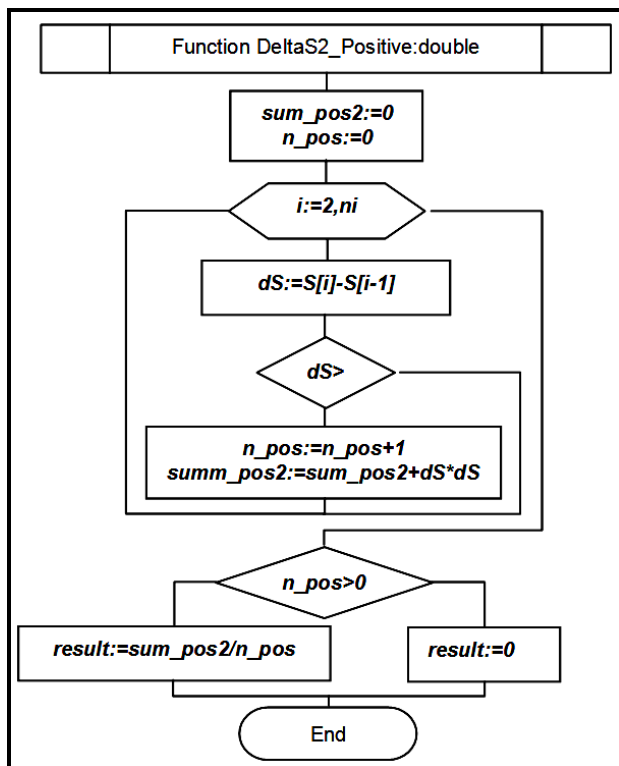


Рис. 26. Алгоритм расчета суммы квадратов положительных отклонений

Для приведенного на рис. 25 графика соотношение  $dS_x^{pos^2} : dS_x^{neg^2}$  составит 1:43 (хотя  $\Delta S_x^{pos}$  и  $\Delta S_x^{neg}$  равны по модулю). Уменьшение или увеличение степени, в которую возводятся относительные изменения степени удовлетворенности, позволит соответственно изменять степень влияния ее резких изменений. Так, при показателе степени, равном единице, скорость изменения степени удовлетворенности не учитывается.

Представленная методология может быть использована при моделировании и анализе качества экономических благ различной природы. Учитывая трудоемкость метода, целесообразным будет его применение для объектов сложной структуры, требующих больших затрат на проектирование и разработку и обладающих широким спектром потребительских характеристик.

## Литература

1. Система менеджмента качества. Основные положения и словарь [Электронный ресурс] : ГОСТ Р ИСО 9000:2000 // Федеральное агентство по техническому регулированию : официальный сайт. – Режим доступа: <http://www.gks.ru>.
2. Базылев Н.И. и др. Экономическая теория [Текст] : учеб. для вузов / Н.И. Базылев, С.П. Гурко, М.Н. Базылева. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 670 с.
3. Бартеков С. А. Экономические теории и школы: история и современность [Текст] : курс лекций / С.А. Бартеков. – М. : БЕК, 1996. – 338 с.
4. Вехи экономической мысли. Теория потребительского поведения и спроса [Текст] / под ред. В.М. Гальперина. – СПб. : Экономическая школа, 1999. – 380 с.

5. Гагарин А.Г. Анализ качества ИС методом анализа иерархий – актуальные аспекты теории полезности [Текст] / А.Г. Гагарин // Актуальные проблемы развития АПК : мат. междунар. науч.-практ. конф., посвященной 60-летию Победы в Великой Отечественной войне / Волгогр. гос. с.-х. акад. – Волгоград, 2005. – С. 29-32.
6. Гагарин А.Г. Анализ качества программного обеспечения методом анализа иерархий: проблема учета влияния находящихся на границах области допустимых значений оценок при большом количестве критериев и альтернатив [Текст] / А.Г. Гагарин // Аудит и финансовый анализ. – 2010. – №2. – С. 446-454.
7. Гагарин А.Г. Решение задач управления сельскохозяйственным производством методом анализа иерархий [Текст] / А.Г. Гагарин // Научный вестник. Экономические и социальные науки / Волгогр. гос. с.-х. акад. – Вып. 3. – Волгоград, 2004. – С. 53-54.
8. Гагарин А.Г. Экспертное оценивание экстремальных значений параметров экономических систем [Текст] / А.Г. Гагарин, А.Ф. Рогачев // Известия Волгоградского гос. технического ун-та: межвуз. сб. науч. ст. – 2006. – №3 (Актуальные проблемы реформирования российской экономики).
9. Ротбард М. О реконструкции экономической теории полезности и благосостояния [Электронный ресурс] / М. Ротбард. URL: [http://www.sapov.ru/bureau/capitalism/rothbard\\_reconstruction.htm](http://www.sapov.ru/bureau/capitalism/rothbard_reconstruction.htm).
10. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий [Текст] : пер. с англ. / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1989. – 316 с.
11. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем [Текст] : пер. с англ. / Т. Саати, К. Кернс. – М. : Радио и связь, 1991. – 224 с.
12. Фишберн П.С. Теория полезности для принятия решений / П.С. Фишберн ; пер. с англ. – М. : Наука, 1977. – 352 с.

## Ключевые слова

Математическое моделирование; теория полезности; теория принятия решений; оценка качества.

Гагарин Алексей Геннадиевич

## РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность темы. Развитие теоретических основ оценки полезности или синонимичного ей, с точки зрения автора, понятия качества с учетом их динамики во времени является значимым дополнением теории полезности и принятия решений.

Научная новизна и практическая значимость. Предложенная автором математическая модель динамической полезности является развитием классической экономической теории полезности с учетом изменения полезности благ во времени. Автором введен показатель «суммарная степень удовлетворенности потребностей» как мера полезности блага в определенный момент времени. Для сравнения рядов значений суммарной степени удовлетворенности при использовании взаимозаменяемых благ разработаны точечные и интервальные показатели

Замечания. Было бы целесообразным продемонстрировать в статье практическую реализацию представленной модели динамической полезности на примере определенных экономических благ.

Заключение. Статья отвечает требованиям, предъявляемым к научным публикациям, тема является достаточно актуальной, работа может быть рекомендована к публикации.

Рогачев А.Ф., д.т.н., профессор, зав. кафедрой информатики и основ научных исследований ФГОУ ВПО «Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия»

## 3.4. MODEL OF DYNAMIC UTILITY

A.G. Gagarin, Candidate of Science (Economic),  
Department of «Intelligence Systems in Economy»

Volograd state technical university

The article deals with the utility theory and decision theory. Considers the model of dynamic utility and method of calculating the total degree of satisfaction of needs – quality estimation of economic good. For comparison of series

of values of total degree of satisfaction with the implementation of various alternatives developed point and interval indicies.

### Literature

1. N.I. Bazylev. Economic theory: The textbook for high schools / N.I. Bazylev, S.P. Gurko, M.N. Bazyleva. – M.: Infra-M, 2003. – 670 p.
2. S.A. Bartenev. Economic theories and schools: History and Modernity: Lectures / S.A. Bartenev – M.: BEK, 1996. – 338 p.
3. Landmarks of economic thought. The theory of consumer behavior and demand. V. 1., ed. V.M. Galperin. – SPb.: The school of economics, 1999. – 380 p.
4. A.G. Gagarin. Analysis of the quality of information systems using the analytic hierarchy process – important aspects of utility theory / A.G. Gagarin // Actual problems of agricultural development: proceedings of an international scientific-practical conference on the 60 th anniversary of Victory in Great Patriotic War / Volgogr. gos. Agricultural Acad. – Volgograd, 2005. – pp. 29-32.
5. A.G. Gagarin. Analysis of the quality of software by analytic hierarchy process: the challenge for the effect of being on the boundaries of permissible values count for a large number of criteria and alternatives / A.G. Gagarin // Audit and Financial Analysis, 2010. – №2. – pp. 446-454.
6. A.G. Gagarin. Solution of control problems in agricultural production by the analytic hierarchy / A.G. Gagarin // Scientific Bulletin. Economic and social sciences. Vol. 3 / Volgogr. gos. agricultural acad. – Volgograd, 2004. – pp. 53-54
7. A.G. Gagarin. Expert Estimation of extreme values of the parameters of economic systems / A.G. Gagarin, A.F. Rogachev // Proceedings of the Volgograd State Technical University: Intercollegiate collection of scientific articles №3 (15). – Volgograd: Publishing house VolgGTU, 2006. – pp. 31-36. – (Series Actual problems of reforming Russia's economy (Issue 3).
8. M.N. Rothbard. Toward a Reconstruction of Utility and Welfare Economics / M.N. Rothbard; URL: [http://www.sapov.ru/bureau/capitalism/rothbard\\_reconstruction.htm](http://www.sapov.ru/bureau/capitalism/rothbard_reconstruction.htm).
9. T. Saaty. Decision-making. The analytic hierarchy process: [Trans. from English.] / T. Saaty. – M.: Radio i Svyaz, 1989. – 316 p.
10. T. Saaty. The analytic planning. The organization of the systems: [Trans. from English.] / T. Saaty, C. Cairns. – M.: Radio i Svyaz, 1991. – 224 p.

### Keywords

Mathematical modeling; utility theory; decision theory; quality estimation.