

3.8. О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕНЫ БИЗНЕСА В РАМКАХ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ СКАЧКОВ НА БАЗЕ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

Лесик А.И., к.ф.-м.н., доцент кафедры математической статистики и системного анализа;

Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор, академик РАЕН, профессор кафедры финансов и менеджмента

Тверской институт экологии и права

Рассматривается задача определения прогнозирования продажной стоимости бизнеса в рамках доходного подхода. Известно, что, экстраполяция статистических данных по тренду на пять-семь лет вперед имеет низкую точность. Поэтому, в предыдущей работе нами изучался другой метод прогнозирования продажной цены бизнеса основанный на нестационарной модели броуновского процесса изменения цены акции. Броуновский процесс является примером непрерывного виннеровского процесса с независимыми приращениями, в определенном смысле единственного. Поэтому интересно обратиться к дискретным процессам, которые удовлетворяют условию независимости приращений, но являются лишь кусочно-непрерывными. Пример такого процесса как раз и дает пуассоновский процесс, рассмотренный в настоящей работе.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача определения прогнозирования продажной стоимости X_n бизнеса на конец последнего n -го прогнозного периода в методе дисконтирования доходов (DDM) в рамках доходного подхода для определения рыночной стоимости бизнеса. Один из способов определения величины X_n состоит в том, что за эту величину принимается прогноз цены продажи на конец последнего n -го периода [4, 5]. Однако этот способ определения продажной стоимости сталкивается с отсутствием соответствующих статистических данных для прогнозирования. Из обзоров рынка можно узнать, в лучшем случае, рост капитализации в отрасли за предыдущие годы, однако, экстраполяция этих данных по тренду на пять-семь лет вперед имеет низкую точность. В работе [2] был предложен мультипликативный способ прогнозирования на базе стационарной лог - нормальной модели изменения стоимости. Он оказался применимым только в том случае, когда за основу берется изменение какого-нибудь экономического индекса, например, индекса РТС и к тому же предполагает стационарность прогнозного периода, которая как раз и отсутствует в общем случае по определению прогнозного периода. Получается, что лог - нормальная стационарная модель хорошо подходит для прогнозирования экономических индексов, но фактически не применима для прогноза изменения рыночной стоимости бизнеса в будущем на основе ретроспективы изменения стоимости его акций. Поэтому, в работе [7] был предложен другой метод прогнозирования продажной цены бизнеса, основанный на нестационарной модели броуновского движения, рассмотренной в [3]. Поскольку модель броуновского процесса является аддитивной [7], то и предложенный способ прогнозирования является аддитивным, т.е. постулирует независимость приращений. Аддитивный способ моделирования изменения стоимости бизнеса, как таковой, был нами рассмотрен в отдельной работе [6]. Не стационарности прогнозного периода, таким образом, предлагалось сопоставить нестационарную модель роста стоимости бизнеса, понимаемого как стоимость всей совокупности его голосующих акций. Броуновский процесс является примером непрерывного, аддитивного виннеровского процесса с независимыми приращениями. В определенном смысле единственного, как показано в [3]. Поэтому интересно обратиться к дискретным процессам, которые удовлетворяют усло-

вию независимости приращений, но являются лишь кусочно-непрерывными. Пример такого процесса как раз и дает пуассоновский процесс. Причем даже кусочно-постоянного. В пуассоновском процессе среднее значение приращения за время t линейно зависит от t с коэффициентом c , который может быть оценен статистически подобно тому, как это было сделано для единственного параметра виннеровского процесса в [7]. Кроме того, в отличие от стационарного процесса с независимыми реализациями с.в., пуассоновский процесс является нестационарным и построенная на его основе модель прогноза является дискретной нестационарной моделью постоянного роста.

1. Формализация задачи

Будем отождествлять стоимость бизнеса со стоимостью всех его голосующих акций. Предположим, что эти акции котируются на бирже. Обозначим через $X(t)$ цену акции в момент времени $t \in [0, +\infty)$ и предположим, что в момент $t = 0$ она приняла значение $u \in [0, +\infty)$ почти наверное (п.н.):

$$X(0) = u. \tag{1}$$

Предположим, что случайный процесс $X = X(t)$ адекватно описывается дискретным нестационарным пуассоновским процессом, задаваемым переходной функцией [1]:

$$p_i(u, \{u + ma\}) = \frac{e^{-ct} (ct)^m}{m!}, c > 0, m = 0, 1, \dots, \tag{2}$$

где

$a \neq 0$ – пространственный дискрет, например, заданная точность вычислений,

c – константа, которая определяет масштаб времени и оценивается статистически.

В теоретических исследованиях можно считать, что $c = 1$, изменив соответственно масштаб времени, что мы и будем делать дальше. Величина (1) представляет собой вероятность того, что случайная величина (с.в.) $X(t)$ примет значение $u + ma$.

2. Выражение для условного матожидания цены

Условное матожидание $m_u = m_u(t) = M(x(t)|x(0) = u, \text{п.н.})$ цены акции $X(t)$, при условии, что в начальный момент ее цена принимала значение $u \in [0, +\infty)$, составит:

$$m_u(t) = u + ct. \tag{3}$$

Таким образом, относительное среднее процесса $\bar{m}_u(t) = [m_u(t) - u] / t = c$ есть величина постоянная, что позволяет назвать этот процесс нестационарной моделью постоянного роста при $a > 0$, или уменьшения при $a < 0$.

3. Статистическое определение параметров нестационарного процесса

По определению единственного параметра c пуассоновского процесса, для любых $l, t \geq 0$ приращение $\Delta X = X(t+l) - X(t)$ распределено по пуассоновскому распределению на множестве $\{X(t) + ma\}, m = 0, 1, \dots$ со средним $M_{\Delta x}(l) = cl$ и дисперсией $D_{\Delta x}(l) = cl$. Поэтому для оценки неизвестного параметра c необхо-

димо и достаточно получить статистическую оценку среднего $M_{\Delta x}(l)$ при $l = 1, 2, \dots, L$.

Пусть x_1, \dots, x_N – полученные в ходе наблюдения значения с.в. $X(1), \dots, X(N)$. Положим

$$m_N(l, x) = \frac{1}{N-l} \sum_{k=1}^{N-l} (x_{n+k} - x_k). \quad (4)$$

Тогда она является несмещенной оценкой среднего приращения $\Delta X = X(t+l) - X(t)$, т.е.

$$\begin{aligned} M(m_N(l, x)) &= M\left(\frac{1}{N-l} \sum_{k=1}^{N-l} (x_{n+k} - x_k)\right) = \\ &= \frac{1}{N-l} \sum_{k=1}^{N-l} M(x_{n+k} - x_k) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} D_{\Delta x}(l) &= M(x(t+l) - x(t) - \\ &- M(x(t+l) - x(t)))^2 = M[x(t+l) - x(t)], \end{aligned}$$

то в качестве оценки этой величины по результатам N наблюдений $x_1, \dots, x_N (N > l \geq 0)$ естественно взять величину

$$d_N(l, x) = \frac{1}{N-l} \sum_{k=1}^{N-l} (x_{n+k} - x_k - m_N(l, x))^2. \quad (5)$$

Или даже

$$d_N(l, x) = \frac{1}{N-l} \sum_{k=1}^{N-l} (x_{n+k} - x_k - cl)^2. \quad (6)$$

Последняя является несмещенной в том смысле, что:

$$M(d_N(l, x)) = D_{\Delta x}(l), 0 \leq l < N - K = L.$$

Здесь K – минимальный объем представительной выборки, по которой практически допустимо рассчитывать среднее в (3-5). После статистической оценки среднего $y_l = m_N(l, x), 0 \leq l < N - K = L$, неизвестную величину параметра c в регрессии $M_{\Delta x}(l) = cl$ можно оценить методом наименьших квадратов по формуле:

$$c = \frac{\sum_{l=1}^L l y_l}{\sum_{l=1}^L l^2}. \quad (7)$$

После этого прогнозирование условного среднего значения с.в. $x = x(t)$ можно осуществить по формуле (3).

4. Пример прогноза стоимости по ретроспективным данным

Приведем числовой пример прогноза стоимости бизнеса на основе предложенной модели для следующих докризисных ретроспективных данных ООО «Центр-ДорМеханизация», г. Тверь, приведенных в табл. 1.

Таблица 1

РЕТРОСПЕКТИВНЫЕ ДАННЫЕ О БАЛАНСОВОЙ СТОИМОСТИ СОБСТВЕННОГО КАПИТАЛА

Пассив	31.03.2007	30.06.2007	30.09.2007	31.12.2007	Среднее
Собственные средства, тыс.руб.	-	10	1 850	10 266	-
$X_t - X_{t-1}$, доля	-	10	1 840	8 416	3 585
$X_t - X_{t-2}$, доля	-	-	1 850	10 256	5231

В следующей табл. 2 приведен расчет параметров пуассоновского процесса.

Таблица 2

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

$Y_l = Mx(l)$	l	l^2	$l \cdot Y_l$	c
3 422	1	1	3422	-
6053	2	4	12106	-
0	-	5	15528	3106

В пуассоновской модели, в отличие от броуновской, [6] величина средней доходности постоянна, и не позволяет определить момент выхода из бизнеса и соответствующую ему длительность прогнозного периода. Поэтому эта длительность должна быть определена самостоятельно. Например, составлять семь лет. В табл. 3 приведен расчет прогнозных значений условного среднего для данного срока.

Таблица 3

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СТОИМОСТИ БИЗНЕСА

t	$m_u(t)$	$m_u(t) / m_u(t-1) - 1, \%$
0	10 256	-
1	13 372	30,25
2	16 477	23,23
3	19 583	18,85
4	22 688	15,86
5	25 794	13,69
6	28 900	12,04
7	32 005	10,75

В последней колонке приведено относительное изменение прогнозных значений стоимости бизнеса, показывающее, что предлагаемая модель прогнозирования дает нестационарный темп относительного роста.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что пуассоновский процесс это второй пример кусочно-постоянного процесса с независимыми приращениями. Первый (см. [1]) состоял в выбрасывании независимых реализаций случайной величины (с.в.) в моменты, составляющие пуассоновский поток. В пуассоновском процессе моменты тоже образуют пуассоновский поток, но поскольку среднее скачка линейно зависит от t с коэффициентом c , то для любого $\varepsilon > 0$ то соответствующая переходная функция удовлетворяет условию [3, с. 150]:

$$p_t(x, E_t - [x - \varepsilon, x + \varepsilon]) = o(1), \quad (8)$$

равномерно по x . Поскольку пуассоновское распределение бесконечно-делимое, то построенная на его основе передаточная функция (2) приводит к пространственно-однородной марковской переходной функции [3], т.е. такой, что:

$$p_t(u, E) = p_t(u + v, v + E) \quad (9)$$

для всех вещественных v . А это вместе с (8) гарантирует согласно теореме Кинни (см. [3], там же), что существует кусочно-непрерывный, непрерывный справа и имеющий предел слева, процесс, который имеет независимые приращения (основное свойство аддитивных процессов, которое постулируется априорно). В частности, траектории пуассоновского процесса можно считать непрерывными справа.

Вот какая логика приводит к пуассоновскому, потоку, который взят в настоящей работе за модель нестационарного роста стоимости бизнеса, позволяющей прогнозировать его условное среднее на прогнозный период.

Лесик Александра Ильинична
E-mail: lesik56@mail.ru

Перевозчиков Александр Геннадьевич
E-mail: pere50@mail.ru

Литература

1. Басангов Ю.М. О модели СМО в поддержку принятия брокерских решений [Текст] / Ю.М. Басангов, А.Г. Перевозчиков // *Аудит и финансовый анализ*. – 2010. – №6. – С. 107-112.
2. Батурина О.Ю. и др. Прогнозирование изменения чистого операционного дохода от аренды недвижимости в зависимости от предполагаемого изменения ее стоимости [Текст] / О.Ю. Батурина, Ю.М. Басангов, А.Г. Перевозчиков // *Финансовая аналитика*. – 2007. – №5. – С. 42-46.
3. Ламперти Дж. Вероятность [Текст] / Дж. Ламперти. – М.: Наука, 1973. – 184 с.
4. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и/или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст] // *Deloitte&Touche*. – Декабрь 2003 – март 2005.
5. Оценка бизнеса [Текст]: учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М.: Финансы и статистика, 2002.
6. Перевозчиков А.Г. К аддитивной форме рекуррентного уравнения для дисконтирования денежного потока [Текст] / А.Г. Перевозчиков, А.И. Лесик // *Аудит и финансовый анализ*. – 2010. – №4. – С. 105-108.
7. Перевозчиков А.Г. О прогнозировании изменения цены бизнеса в рамках аддитивной модели скачков на базе броуновского процесса [Текст] / А.Г. Перевозчиков, А.И. Лесик // *Аудит и финансовый анализ*. – 2011. – №4.

Ключевые слова

Оценка бизнеса; доходный подход; метод дисконтирования доходов; продажная стоимость бизнеса; ставка дисконта; инвестированный капитал; собственный капитал; выручка; денежный поток (ДП); темп изменения ДП.

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается задача определения прогнозирования продажной стоимости бизнеса в рамках доходного подхода. Известно, что, экстраполяция статистических данных по тренду на пять-семь лет вперед имеет низкую точность. Поэтому, в предыдущей работе авторами изучался другой метод прогнозирования продажной цены бизнеса основанный на нестационарной модели броуновского процесса изменения цены акции. Броуновский процесс является примером непрерывного виннеровского процесса с независимыми приращениями, в определенном смысле единственного. Поэтому интересно обратиться к дискретным процессам, которые удовлетворяют условию независимости приращений, но являются лишь кусочно-непрерывными. Пример такого процесса как раз и дает пуассоновский процесс, рассмотренный в предлагаемой работе.

В пуассоновском процессе среднее значение приращения за время t линейно зависит от t некоторым коэффициентом, который может быть оценен статистически подобно тому, как это было сделано авторами для единственного параметра броуновского процесса в предыдущей работе на эту тему. Кроме того, в отличие от стационарного процесса с независимыми реализациями случайной величины предложенной ранее А.Г. Перевозчиковым с соавторами для прогнозирования изменения цены акции, пуассоновский процесс является нестационарным и построенная на его основе модель прогноза является дискретной нестационарной моделью постоянного роста. Рассматривается числовой пример прогноза продажной стоимости бизнеса в рамках предложенной пуассоновской модели.

Считаю, что статья А.Г. Перевозчикова, А.И. Лесик «О прогнозировании изменения цены бизнеса в рамках дискретной модели скачков на базе пуассоновского процесса» является новой и актуальной, и может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н., профессор, проректор по научной работе Тверского института экологии и права, декан факультета экономики и менеджмента

3.8. ABOUT THE PROGNOSTICATION OF THE BUSINESS PRICE WITHIN THE FRAMEWORKS OF THE DISCRETE MODEL OF JUMPS ON THE BASE OF POISSON PROCESS

A.I. Lesik, Doctor of Science, Assistant Professor of Mathematical Statistics and System Analysis Department; A.G. Perevozchikov, Doctor of Economics, the Professor of Finance and Management Department

Tver Institute of Ecology and Law

The task of finding the prognostication of the sales value of business within the framework of income approach is considered. The extrapolation of the statistic data by the trend for 5-7 years forecast is known to have a low exactness. Thus in this previous work we studied another method of the business's sales price prognostication, which was based on non stationary model of Brown's of a share's price change.

Brown's process is a model of non-stop Vinner process with independent increases. This process is, in a definite sense, the only one. Thus, it is interesting to refer to discrete process, which satisfy the condition of increases independent, but which are only piecewise continuous.

The model of such process just given through Poisson process, which is regarded in this work.

Literature

1. Valuation of Business: A Manual. Edited by A.G. Gryaznova, M.A. Fedotova – M.: Finance and Statistics. – 2002.
2. Methodology and Manual on Conducting Valuation of Business and Assets of Public Limited Company «United Energy Systems of Russia». – Deloitte & Touche. – Dec.2003-March 2005.
3. O.U. Baturina, U.M. Basangov, A.G. Perevozchikov. The Prognostication of Net Operational Income from Real Estate Rent Depending on Expected Cost Change. *Financial Analyses*. – 2007, №5, p. 42-46.
4. A.G. Perevozchikov, A.I. Lesic. About the Additive Form of the Recurrent Equation For Cash Flow Discounting. *Audit and Financial Analyses*. – 2010, №4, p.105-108.
5. A.G. Perevozchikov, A.I. Lesic. About the Prognostication of the Business Price Within the Framework of the Additive model of Jumps on the Base of Brown's Process. *Audit and Financial Analyses*. – 2011, №4, p.
6. J. Lamperty. *The Probability*. – M.: Nauka. 1973 / 184p.
7. U.M. Basangov, A.G. Perevozchikov. About the Model of Queue System in Support of Taking Brokers Decisions. *Audit and Financial Analyses*. – 2010, №6, p. 107-112.

Keywords

Business value; income approach; discounting method; sales price of business; discount rate; invested capital; equity capital; receipts; cash flow; change rate of cash flow change.