

3.21. ВЕРОЯТНОСТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕАЛЬНО-ВИРТУАЛЬНЫХ РЫНКОВ¹

Грачев И.Д., д.э.н., депутат Государственной Думы России, член Национального Совета РФ по оценочной деятельности

В предкризисной и кризисной ситуации ошибки оценивания рыночных стоимостей резко возрастают как на реальных, так и на виртуальных рынках. Имеет место явная корреляция ошибок оценивания разных агентов, которая может быть интерпретирована как массовое (всеобщее) смещение оценок на величину порядка коэффициента вариации.

Представленные аналитические результаты и численные расчеты позволяют при развитии вероятностной комбинированной модели реально-виртуальных рынков и наполнении ее экспериментальной информацией дать обоснованные управленческие решения по ограничению и регулированию виртуальных рынков.

ВВЕДЕНИЕ

Предсказание и управление современными финансово-экономическими кризисами требует разработки нелинейных, недерминированных динамических моделей смешанных экономик, базирующихся на реальных экспериментальных данных по ошибкам и динамике агентов разного типа.

В работах [4, 6] развита и доведена до рабочих формул комбинированная теория реально-виртуальных рынков.

Общая модель смешанных экономических систем базируется на представлении рынка в виде статистического ансамбля ограниченно нерациональных агентов с фиксированным кооперативным способом измерения рыночных стоимостей, адаптированным и специально развитым инструментарием теории оценивания, измерения, в частности, теории статистической регуляризации.

В работе [6] используется сходство проблем современной экономики, в которой агенты оказались значимо нерациональными, с проблемами классической физики, когда частицы экспериментально проявили себя как заведомо недерминированные. Для построения модели рынка, учитывающей частичную нерациональность агентов, используется логика Л. Больцмана, Д.У. Гиббса и некоторых других основателей статистической физики, которая начинается с вероятностного описания отдельной частицы (агента), введения понятия статистического ансамбля частиц и некоторых гипотез (например, эргодической) о свойствах этого ансамбля. Для успеха статистической физики важно было, что она строилась с использованием привычных понятий (энергия, скорость и т.д.) и методов математической статистики, хорошо известных классическим физикам. Для того чтобы построить универсальную и понятную практикам «статистическую экономику», надо описать агента некоторым минимумом детерминированных и случайных параметров, своего рода – привычных экономистам – аналогов «массы» и «скорости» из статистической физики.

1. МОДЕЛЬ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ А. ДРАГУЛЕСКУ И В. ЯКОВЕНКО

Для иллюстрации этого подхода рассмотрим простейшую статистическую модель рыночной экономики, состоящей из N агентов, разработанную физиками А. Dragulescu и V.M. Yakovenko [25, с. 723-729]. Каждый агент имеет деньги в количестве m . Общее количество денег в экономике, являющееся попросту суммой всех денег конкретных индивидов, – фиксированная константа M . В рыночной экономике люди обменивают товары и услуги на какую-то сумму денег. Целесообразно пол-

ностью абстрагироваться от природы этих товаров и услуг, времени, в которое они производятся или продаются, от того, кто это делает и когда. Не рассматриваются также и институты, так что фирмы, банки и экономические операции государства пока выпадают из общей картины. Выделяются главные характеристики динамической монетарной экономики – тот факт, что деньги постоянно обмениваются между агентами в различном количестве. Не моделируются все отдельные причины, по которым конкретные агенты обмениваются определенными суммами денег в определенные моменты времени, а вместо этого предполагается, что эту непредсказуемость можно смоделировать случайным шумом. Динамику данной простой модели можно выразить правилами обмена.

1. Случайно выбрать агента i ($1 \leq i \leq N$) при равномерном распределении. Агент i – покупатель.
2. Случайно выбрать агента j при равномерном распределении. Агент j – продавец.
3. Случайно выбрать цену p из интервала $[0, m_i]$ при равномерном распределении, где m_i – количество денег у покупателя i .
4. Уменьшить количество денег у агента i на p . Увеличить количество денег у j на p .

Рыночный обмен имитируется постоянным применением этого правила к экономике из N агентов. Правило перемещает случайные количества денег между случайно выбранными индивидами. Это очень простая модель. Но она воспроизводит одну из постоянных и характерных эмпирических закономерностей рыночной экономики.

Можно посчитать количество агентов с $0, 1, 2, \dots, M$ долларами в кармане. Каждую сумму можно считать группой, и любой конкретный агент в любой конкретный момент времени находится в одной из этих групп в зависимости от количества имеющихся у него денег. Например, если создать такую модель, что у каждого агента будет M/N долларов в кармане, а затем измерить размер каждой из групп, то обнаружится, что распределение денег вырождено. Все группы пусты, кроме M/N , которая имеет размер N . Распределение называется вырожденным, потому что имеется только одна возможность.

Если применять правило обмена примерно N^2 раз, распределение начнет отходить от вырожденного состояния, по мере того как деньги будут обмениваться в неравных количествах между агентами. Некоторым агентам повезет, они будут участвовать в удачных сделках и получат большое богатство, а другие будут все время терять деньги и мало что получать взамен. Если продолжать этот процесс, то экономика придет к распределению конкретного вида, которое называется экспоненциальным. Распределение денег крайне неравномерно. У большинства агентов денег очень мало, а экспоненциально малое количество располагает большими суммами. Собственно, у очень малого количества людей имеется относительно огромное количество денег. Эта простейшая модель дает наилучшее соответствие эксперименту в части распределения богатства по гражданам.

Экспериментальную проверку этой закономерности выполнил, в частности, М. Лощинин [14, 15].

2. РАЗВИТИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБ ОГРАНИЧЕННО НЕРАЦИОНАЛЬНЫХ АГЕНТАХ

Рассматривая модель как прототип вероятностно-статистической модели рынка, мы, безусловно, не мо-

¹ Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №11-06-00390).

жем согласиться с заложенной в ней абсолютной нерациональностью агентов и их абсолютной вероятностной идентичностью. Как экспериментальные факты, так и общие соображения о присущем природе разнообразии субъектов, предъявляемых случайному миру, заставляют нас сделать следующий шаг, следующее «приближение к реальности», а именно: представить агентов как, в общем, различных и ограниченно нерациональных.

Минимально необходимое вероятностное описание j -го агента рынка – это капитал (деньги) a_j , которым он располагает, и ошибка ξ_j^2 , с которой он этот капитал использует в обменных операциях. При этом любые действия (или бездействия) агента с капиталом могут быть описаны в терминах предполагаемой рыночной стоимости этих действий, оценки которых агент выполняет явным или неявным способом. Для того чтобы этот переход от неизбежных ошибок в оценках и действиях к рыночным стоимостям не требовал длинных обоснований, мы ограничимся одноварными моделями.

Близкое по смыслу понимание агентов содержится в статье И.Г. Поспелова [18]: «Мы выделим агента – собственника фирм и банков (курсив автора), который, не вдаваясь в подробности процессов производства и обращения, распределяет свои средства..., исходя только из прогнозов доходности этих вложений». По существу, к данному определению можно добавить только – «неизбежно ошибочных прогнозов».

В детерминистском варианте широко известны динамические модели экономических систем Дж.М. Кейнса [10], П. Самуэльсона [29], В. Леонтьева [11], Дж. Неймана [17], модели общего вычислимого равновесия (В.Л. Макаров и др. [16]). Исследования в этом направлении продолжают И.Г. Поспелов [18], З.Г. Псиола [19], С.А. Смоляк [20], Д.С. Чернавский [23] и др.

Вероятностные представления, а также методы хаотической динамики при построении динамических моделей экономических систем активно используют А. Лоскутов, Д.С. Чернавский. В работах А. Лоскутова (см., например, [12, 13]) содержится предельно общая формулировка динамики экономической системы. Известен с ошибками набор состояний \bar{Z}_i . Динамика задается общим уравнением:

$$\bar{Z}_{i+1} = F(\bar{Z}_i, \bar{Z}_{i-1}, \dots).$$

Задача построения динамической модели формулируется как поиск F из экспериментальных и общих соображений. В многочисленных работах Д.С. Чернавского обычно используются аналогичные непрерывные модели.

При построении моделей реального рынка в виде ансамбля нерациональных агентов огромный интерес вызывают известные из химии [23] и биологии [1] модели сложных самоорганизующихся систем, состоящих из конкурирующих элементов. В отличие от упомянутых выше, модели В. Вольтерра и В. Эбелинга изначально исходят не из феноменологических, а из сущностных соображений.

Итак, мы рассматриваем рынок как статистический ансамбль конкурирующих ограниченно нерациональных агентов с заданным способом определения рыночных

стоимостей. Неточные оценки рыночных стоимостей приводят к неэффективному распределению ресурсов в системе, а следовательно, к их избыточным потерям, пропорциональным ошибкам оценивания рыночных стоимостей реальных или виртуальных объектов.

Пример: некто берет 1 млн. руб. в банке на один год под 10%, строит (покупает) за 1 млн. руб. дом, который, по оценкам, будет стоить 1,2 млн. руб. Через год он продает этот дом. Результат зависит от ошибки $\frac{1,2 \pm \sigma}{1,2}$ в оценке. По меньшей мере, в линейных моделях все сводится к ошибке оценивания по указанной схеме.

На этой основе построена [2, 3, 5, 6, 9] общая формализованная статистическая модель рынка, ключевые уравнения динамики которой задаются в форме:

$$\bar{A}_{i+1} = \bar{A}_i - \text{diag}(\bar{\xi}_i) * \bar{A}_i + \frac{\bar{A}_i^T * \bar{\xi}_i}{\bar{A}_i * \bar{I}} * \bar{A}_i, \quad (1)$$

где

\bar{A}_i – распределение капитала по агентам на входе в i -цикл;

\bar{I} – единичный вектор;

$\bar{\xi}_i$ – ошибка оценивания результатов использования капитала в обменных $j = 1 \dots N$ агентами;

$\text{diag}(\bar{\xi}_i)$ – символ формирования на базе $\bar{\xi}_i$ диагональной матрицы.

В работе [4] модель (1) распространена на реально-виртуальные рынки.

Практическое применение модели предполагает экспериментальное изучение структуры ошибок для $\bar{\xi}$.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ОШИБОК ОЦЕНИВАНИЯ РЫНОЧНЫХ СТОИМОСТЕЙ НА РЕАЛЬНО-ВИРТУАЛЬНЫХ РЫНКАХ

С учетом первоочередной задачи построения комбинированных моделей реально-виртуальных рынков, прежде чем необходимы сравнительные экспериментальные результаты по оцениванию недвижимости как эталонного образца реальной экономики и пакетов акций как, бесспорно, необходимого элемента экономики виртуальной.

Характерные уровни воспроизводимостей и смещений в оценках рыночных стоимостей реальных экономических объектов представлены табл. 1-4.

В табл. 1 представлены типичные прогнозы на год вперед для акций компании мобильной связи МТС, выполненные авторитетными консультантами. В свернутом виде в таблице приведены оценки 2007 г. Стартовая рыночная цена акции $\approx 56,1$ долл. Средняя прогнозная цена на 2008 г. – 71,3 долл. Среднеквадратическое отклонение (СКО) – случайная ошибка агента – ≈ 4 долл. Предполагаемая доходность $\approx 15 \pm 8$ долл.

Фактическая цена по итогам года $\approx 81,8$ долл. в пределах вероятных отклонений. Фактическая доходность – более 40%. Аналогичная свертка для акций МТС в 2008 г. дает оценки:

- стартовая рыночная цена $\approx 81,8$ долл.;

² В вероятностном приближении Яковенко-Драгулеску все $P(\xi_j)$ будут идентичными и равномерными.

- средняя прогнозная цена ≈ 115,6 долл.;
- СКО одиночной оценки ≈ 10 долл.;
- предполагаемая доходность ≈ 34 ± 20 долл.
Фактическая цена по итогам года ≈ 31,7 долл. – заведомо отклоняется от любых допустимых статистических отклонений от прогнозов.

Таблица 1

ПРОГНОЗЫ УЧАСТНИКОВ РЫНКА СТОИМОСТИ АКЦИЙ МТС, ADR

Долл.

МТС, ADR Компании-оценщики	МВТ ³ Прогноз	Дата обновления
Метрополь ИФК	75,00	14.02.2007
МДМ-Банк	67,30	20.03.2007
ВЕЛЕС Капитал ИК	70,20	23.03.2007
Банк Москвы	68,20	23.03.2007
Rye Man & Gor Securities	77,20	06.04.2007
Deutsche UFG	70,00	15.03.2007
Среднее	71,32	-
СКО	4	-
...
Deutsche Bank	130,00	21.01.2008
UBS	115,00	13.02.2008
UniCredit	108,00	14.02.2008
Банк Москвы	107,30	13.02.2008
КИТ Финанс Инвестиционный банк	120,00	25.01.2008
Тройка Диалог	125,00	15.02.2008
УРАЛСИБ ФК	104,00	06.03.2008
Среднее	115,61	-
СКО	9	-
...
Deutsche Bank	46,40	12.03.2009
ING Group	40,70	12.02.2009
Nomura International	57,00	25.02.2009
UBS	40,00	10.02.2009
Банк Москвы	48,80	04.03.2009
ВЕЛЕС Капитал ИК	52,99	13.03.2009
КИТ Финанс Инвестиционный банк	64,70	04.03.2009
Метрополь ИФК	77,57	30.03.2009
ПетроКоммерц	32,47	12.03.2009
Тройка Диалог	40,00	27.02.2009
УРАЛСИБ ФК	45,00	04.03.2009
ЮниКредит Секьюритиз	42,00	26.02.2009
Среднее	48,97	-
СКО	12,5	-

Аналогичные результаты получены для большого ряда акций компаний-эмитентов, в частности, для СТС Media, «Газпрома», ЛУКОЙЛа.

Таблица 2

ПРОГНОЗЫ СТОИМОСТИ АКЦИЙ СТС МЕДИА

Долл.

Компании-оценщики	Прогноз
СТС Media, Inc. (СТС Медиа) (2007)	СТСМ
Тройка Диалог	24,00
ВЕЛЕС Капитал ИК	28,65
БрокерКредитСервис ИК	30,73
UBS	23,50
Deutsche UFG	34,00
СТС Media, Inc. (СТС Медиа) (2008)	СТСМ
ING Group	30,90
SOVLINK	32,50

³ Код компании-эмитента в торговой системе.

Компании-оценщики	Прогноз
ВЕЛЕС Капитал ИК	32,90
Альфа-Банк	36,00
Банк Москвы	32,30
БрокерКредитСервис ИК	30,73
Citigroup Investment Research	5,00
ING Group	9,10
Nomura International	12,30
ВЕЛЕС Капитал ИК	10,84
УРАЛСИБ ФК	11,00
ЮниКредит Секьюритиз	9,90

Таблица 3

ПРОГНОЗЫ СТОИМОСТИ АКЦИЙ «ГАЗПРОМА»

Долл.

Компании-оценщики	Прогноз
«Газпром» (2007)	GAZP
Успешная управляющая компания РТ	12,15
Файненшл Бридж ИК	13,60
Русские финансовые традиции ИК	11,90
ПетроКоммерц	14,29
МДМ-Банк	14,70
КИТ Финанс Инвестиционный банк	13,25
БрокерКредитСервис ИК	9,55
Банк Москвы	13,51
Банк ЗЕНИТ	12,20
АТОН ИГ	12,30
SOTIS Commerce	9,50
Rye Man & Gor Securities	13,56
«Газпром» (2008)	GAZP
Credit Suisse First Boston	20,00
ING Group	13,40
Rye Man & Gor Securities	18,50
Алемар ИФК	16,00
Банк ЗЕНИТ	16,15
ВЕЛЕС Капитал ИК	16,25
КИТ Финанс Инвестиционный банк	17,00
Открытие ИФК	14,40
ПетроКоммерц	20,48
Тройка Диалог	20,00
Файненшл Бридж ИК	17,97
Финам	17,50
Deutsche Bank	20,80
SOTIS Commerce	14,00
Альфа-Банк	22,00
Банк Москвы	16,78
Ист Коммерц ИГ	19,24
Метрополь ИФК	16,09
Элемтэ ИК	14,86
«Газпром» (2009)	GAZP
Citigroup Investment Research	4,70
Deutsche Bank	10,50
ING Group	15,60
Банк Москвы	6,23
ВЕЛЕС Капитал ИК	10,00
КИТ Финанс Инвестиционный банк	13,50
Открытие ИФК	6,40
ПетроКоммерц	4,32
ЮниКредит Секьюритиз	5,64

Таблица 4

**ПРОГНОЗЫ СТОИМОСТИ
АКЦИЙ ЛУКОЙЛ НК**

<i>Долл.</i>	
Компании-оценщики	Прогноз
ЛУКОЙЛ НК (2007)	
Успешная управляющая компания РТ	101,42
Файненшл Бридж ИК	113,30
ПетроКоммерц	88,40
Открытие БД	98,00
МДМ-Банк	109,70
КИТ Финанс Инвестиционный банк	96,00
ВЕЛЕС Капитал ИК	99,92
БрокерКредитСервис ИК	92,46
Банк Москвы	108,51
Банк ЗЕНИТ	90,00
АТОН ИГ	100,80
Альфа-Банк	72,10
UBS	111,00
SOTIS Commerce	75,00
Rye Man & Gor Securities	104,20
ING Group	90,90
FIM Securities	92,29
ЛУКОЙЛ НК (2008)	
Citigroup Investment Research	107,00
Credit Suisse First Boston	135,00
Deutsche Bank	124,70
HSBC	120,00
Rye Man & Gor Securities	91,30
SOTIS Commerce	72,00
UBS	95,00
UniCredit	98,10
Алемар ИФК	101,00
Банк ЗЕНИТ	110,00
ВЕЛЕС Капитал ИК	106,23
Ист Коммерц ИГ	115,80
КИТ Финанс Инвестиционный банк	115,10
Открытие ИФК	95,00
ПетроКоммерц	139,31
Проспект ИК	83,16
Тройка Диалог	87,00
Файненшл Бридж ИК	109,00
Элемтэ ИК	101,20
ЛУКОЙЛ НК (2009)	
Citigroup Investment Research	30,00
Deutsche Bank	90,00
HSBC	53,00
ING Group	42,14
Rye, Man & Gor Securities	64,30
UBS	44,00
Банк Москвы	50,28
КИТ Финанс Инвестиционный банк	77,30
ПетроКоммерц	44,82
УРАЛСИБ ФК	38,70
Финам	78,30
ЮниКредит Секьюритиз	58,50

Как данный пример, так и любые экспериментальные измерения ошибок в оценках и действиях агентов, безусловно, позволяют отвергнуть гипотезу о незначимости ошибок, и, следовательно, признать несостоятельность детерминированных моделей при описании реальных экономических систем. Более того, обработка вышеприведенных данных позволяет утверждать с вероятностью не менее 0,95 о наличии смещений в оценках агентов.

В ряде исследований сводные оценки устойчивости всей системы кредитных институтов используют гипотезу независимости ошибок агентов, что редко соответствует практике. Так, в табл. 5 и на рис. 1 представлены выполненные в 2006-2007 гг. усредненные по агентам прогнозы изменения рыночной стоимости недвижимости в Российской Федерации, которыми, в частности, руководствовались Министерство экономического развития РФ и реальные агенты.

Таблица 5

**ЦЕЛЕВОЙ ПРОГНОЗ ОСНОВНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
РАЗВИТИЯ РЫНКА ЖИЛЬЯ И ИПОТЕЧНОГО
КРЕДИТОВАНИЯ (В ЦЕНАХ 2007 Г.)**

Показатель	Годы					
	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Объем ВВП, млн. руб.	32 988 600	35 099 870	37 205 863	39 549 832	41 940 045	44 415 194
В % к предыдущему году	107,4	106,4	106,0	106,3	106,0	105,9
Доходы на душу населения, руб. в год	149 880	163 519	176 601	189 846	202 487	216 256
Рост реальных цен на жилье, % к предыдущему году.	20	9	6	5	3	2

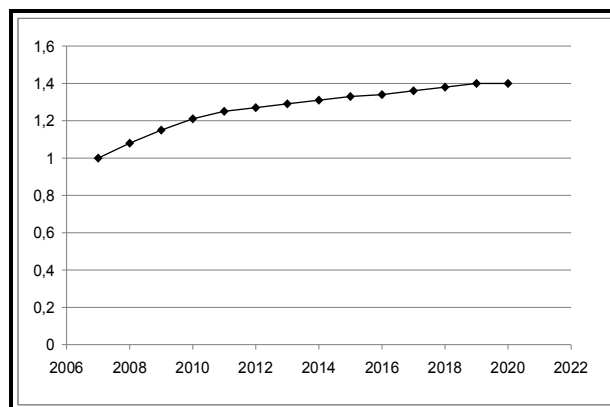


Рис. 1. Прогноз роста цен на жилье, к предыдущему году

В работе Г.М. Стерника [21] приводятся данные о прогнозируемом и фактическом изменении стоимости рыночной стоимости недвижимости в 1998-2002 и 2008-2010 гг. Это необычные, но сходные периоды. В начале первого случился дефолт, второго – кризис. Затем следовало восстановление экономики-

Эти данные свидетельствуют, что фактическое изменение рыночной стоимости недвижимости в 1998-2002 гг., 2008-2010 гг. кардинально отличалось от прогнозируемого. Следовательно, все прогнозные оценки агентов рынка недвижимости в РФ (как, кстати, и в США) содержали общую ошибку и были коррелированными.

В работе [22] приведены данные, отражающие сравнительную динамику восстановления цен на рынке жилья-новостроек после кризиса 1998 г. Эти данные свидетельствуют, что после кризиса 1998 г. цены на рынке элитных новостроек восстановились через 32 мес., а жилью в обычных новостройках для восстановления потребовалось еще 11 мес.

Таким образом, реальные экспериментальные данные, безусловно, подтверждают гипотезу о сильно коррелированных ошибках агентов-оценщиков рыночных стоимостей.

Уровень случайной составляющей ошибки оценивания рыночной стоимости недвижимости можно определять согласно общей теории измерений – методом параллельных измерений. Нами исследованы разные данные (отчеты) об оценке одних и тех же объектов недвижимости, выполненные разными агентами. Получены СКО и средняя погрешность оценок. Некоторые результаты представлены в табл. 6 ниже⁴.

Таблица 6

ПОГРЕШНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ ОБЪЕКТОВ НЕДВИЖИМОСТИ

№	Объект	Погрешность оценивания %
1	Квартира по адресу: г. Москва, Пожарский переулок, дом 11, кв. №14	3,2
2	ООО «Юмагузинское водохранилище» оценивалось:-	
	22 объекта недвижимости	42
	Стоимость чистых активов	36
	Стоимость доли открытого акционерного общества (ОАО) в уставном капитале	36
3	Квартира по адресу: г. Москва, Карамышевская набережная, д. 20, к. 1, кв. 6	25
4	Нежилое помещение на первом этаже общей площадью 108 кв. м по адресу: г. Ярославль, ул. Первомайская, д. 10	54
5	Земельный участок (1000 кв. м) с жилым (недостроенным) домом и земельный участок (3000 кв. м)	52
6	Рыночная стоимость права собственности на гараж-бокс №28 в ГСК «Ветеран труда» по адресу: г. Москва, Электродный пр-д, д. 6А, стр. 2	0,8
7	Рыночная стоимость права нежилого помещения общей площадью 564,6 кв. м, находящегося на первом этаже по адресу: Республика Марий Эл, г. Йошкар-Ола, ул. Мира, д. 48	27
8	Величина месячной арендной платы в отношении нежилых зданий, входящих в состав производственной базы Адрес: Приморский край, г. Фокино, ул. Тихоокеанская, 1, в/г 4)	0,8

4. КОМБИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНО-ВИРТУАЛЬНЫХ РЫНКОВ

В современной экономической теории доминирует раздельное детерминистское описание реальных рынков и вероятностное описание рынков финансовых. В то же время в реальности имеет место их сложное взаимодействие, которое определяет динамику современных глобальных и локальных рынков. Любой непредвзятый анализ [4, 6] последних глобальных экономических кризисов показывает, что их причину и динамику определяют перетоки капитала и информации между реальными и виртуальными рынками. Крупнейшие банкиры США описывали причины и динамику кризиса почти идентично, объясняя свое пове-

дение верой в дальнейший рост цен на недвижимость. В связи с этим выдавались фактически необеспеченные ипотечные кредиты (100-130% от текущей рыночной стоимости недвижимости). На базе этих залогов выпускались в неограниченных количествах (столько, сколько возьмет рынок) вторичные и третичные бумаги, которые «отравили» всю финансовую систему.

С точки зрения настоящей статьи имели место большие и почти стопроцентно коррелированные ошибки в прогнозах рыночной стоимости недвижимости. К этой ситуации неприменимы все известные классические методы оценки банковских рисков. Эта «всеобщая» ошибка мультиплицировалась финансовыми рынками до глобальной катастрофы.

Следовательно, любые управленческие решения по купированию или минимизации последствий кризисов такого типа и, в частности, установление ограничений на финансовые рынки должны базироваться на моделях комбинированных реально-виртуальных рынков. В силу заведомо недерминированного поведения рынков финансовых эти модели также должны быть недетерминистскими.

На сегодня известны достаточно скромные попытки [26-28] установления корреляционных связей между динамикой финансовых и реальных рынков в рамках квазиклассических теорий.

4.1. Концепция комбинированной модели реально-виртуальных рынков

В работах [4, 6, 9] в рамках общей вероятностно-статистической теории рынка предложена концепция комбинированной модели реально-виртуальных рынков.

Уравнение (1) позволяет анализировать самоорганизацию и прогресс различных экономических систем, влияние на них налогов и инноваций, в частности, получить частично детерминированные длинные кондратьевские циклы.

В [4, 6] приведено приближенное решение уравнения (1) для нормированных \bar{A} :

$$\bar{A}_{i+1} = (\bar{I}^{-1} * de(\xi * \bar{I}) * \bar{A}_0)^{-1} * de(\xi * \bar{I}) \bar{A}_0, \quad (2)$$

где

\bar{A}_0 – стартовое распределение капитала на рынке;

$F = de(\bar{f})$ – диагональная матрица с элементами;

$$de(\bar{f})_{jj} = +exp(-(\bar{f})_j).$$

Во всех реалистичных модельных экспериментах (1) и (2) дают статистически неразличимые результаты.

В связи с тем, что модель индифферентна к товару, уравнение (2) пригодно для раздельного описания финансовых рынков \bar{B}_0 выбором статистических

свойств вектора ошибок $\bar{\xi}_e$, которые могут быть коррелированы как по агентам, так и по времени. Однако при раздельном описании финансовых рынков корреляции остаются искусственными. Модель сохраняет феноменологический характер, свойственный финансовой математике. Корреляции должны возникать из взаимодействия с реальным рынком.

Предложена вполне реалистичная гипотеза [4, 6] о том, что распределение агентами капиталов в цикле $i \rightarrow i + 1$ на финансовом рынке \bar{B}_i зависит от цепочки доходностей $\bar{A}_1 + \Delta \bar{A}_i$ рынка реального. Для изучения

⁴ Данные получены при выполнении дипломной работы и предоставлены аспиранткой Центрального экономико-математического института Елисеевой Е.

базовых свойств модели было предложено в первом приближении считать, что распределение капиталов на виртуальном рынке в цикле $i \rightarrow i+1$ пропорционально последней доходности рынка реального $\overline{\Delta A}_i$. Кроме того, предполагается, что каждый агент j распределяет свой капитал a_j между реальным и виртуальным рынком в равной пропорции $\frac{\alpha}{(1-\alpha)}$.

Эти необязательные предположения кардинально упрощают построение комбинированной модели, которая с включением капитализированного источника ресурсов (Π, μ) в предельно упрощенном варианте [6] имеет вид (3, 4):

$$\overline{A}_{i+1} = \alpha * \overline{A}_i - \alpha * \text{diag}(\overline{\xi}_i) * \overline{A}_i + \frac{\alpha * \overline{A}_i^T * \overline{\xi}_i + \mu * \Pi_i}{\alpha * \overline{A}_i^T * \overline{I} + \Pi_i} * \alpha * \overline{A}_i + \quad (3)$$

$$+ (1-\alpha) * \left[(\overline{A}_i^T * \overline{I}) * (\overline{I}^T * \text{de}(\overline{\xi}_i * V)) * (\overline{A}_i)^{-1} * \text{de}(\overline{\xi}_i * V) * \overline{A}_i \right];$$

$$\Pi_{i+1} = \Pi_i - \mu * \Pi_i + \frac{\alpha * \overline{A}_i^T * \overline{\xi}_i + \mu * \Pi_i}{\alpha * \overline{A}_i^T * \overline{I} + \Pi_i} * \Pi_i, \quad (4)$$

где V – относительная скорость обмена на виртуальных рынках по сравнению с рынком реальным.

В концептуальном плане формулы (3, 4) отражают базовую полезность рынков виртуальных, которые в V -раз ускоряют решение двух главных задач рынка:

- во-первых, оценивания рыночных стоимостей;
- во-вторых, перераспределения капитала между агентами в зависимости от точности оценивания ими рыночных стоимостей⁵.

Однако, за это ускорение приходится платить отвлечением $(1-\alpha)$ капитала от прямого взаимодействия с ресурсами, что отражено формулой (4) и мультипликацией ошибок.

Приближенные аналитические решения системы (3), (4) возможны для рынков с бесконечными ресурсами Π . Численное моделирование предполагает некоторые диапазоны по параметрам $\overline{\xi}, \alpha, \mu, \overline{A}, \Pi$. По ошибкам оценивания рыночных стоимостей недвижимости и пакетов акций мы используем представленные выше результаты систематизированных экспериментальных экономических исследований, которые позволяют считать реалистичными для $(\overline{\xi}_j)$ коэффициенты вариации в пределах $[0,1 \div 0,2]$. В исходной некризисной ситуации массив $\overline{\xi}$ не обнаруживает сильных корреляций по j . Реалистично соотношение между общим капиталом рыночной системы $(\overline{I}^T * \overline{A}_i)$ и капитализацией доступных рынку ресурсов Π_i в диапазоне (10^{-2}) .

На данный момент возможны только грубые оценки скорости оборота V и доли отвлеченных капиталов $(1-\alpha)$, в

⁵ Еще раз отметим, что, по крайней мере, в линейном приближении любые действия или бездействия агентов, любые их реализованные или нереализованные бизнес-планы могут быть описаны в терминах ошибки оценивания рыночной стоимости предполагаемого результата (например, построенного через год дома).

связи с чем они варьировались в широких диапазонах $V(0-100)$ и $\alpha(0-1)$. μ – параметр «ошибки природы», который подбирался, исходя из стартовой доли банкротов агентов за один цикл примерно 0,05 от общего числа.

4.2. Результаты численных экспериментов

Характерные результаты численных экспериментов представлены рис. 2-11.

В первой серии численных экспериментов предполагалось, что все агенты имеют систематические⁶, зафиксированные на все 50 циклов ошибки оценивания, которые заданы наряду со стартовыми капиталами рис. 2, при $\mu = 0,15; \Pi = 1\,000\,000$.

A																			
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000
e																			
0,1	0,105	0,11	0,115	0,12	0,125	0,13	0,135	0,14	0,145	0,15	0,155	0,16	0,165	0,17	0,175	0,18	0,185	0,19	0,195

Рис. 2. Начальные фиксированные данные⁷

Эта серия численных экспериментов представлена рис. 3-8, где цифрами 1, 10, 20 обозначены капиталы соответствующих агентов, а кривая без номера отражает суммарный капитал всех агентов рынка.

Наиболее значимым и очевидным результатом этих численных экспериментов является резкое замедление скорости роста суммарного капитала (прогресса) системы при росте доли отвлечения $(1-\alpha)$ от реальных рынков к виртуальным. Однако и для малых V и $(1-\alpha)$ характерен стартовый провал и длительный выход на режим прогресса, связанный с замедленным сосредото-

чением капитала у эффективных агентов $(\frac{\sigma_j}{a_j} \approx 0,1)$,

что дает возможность построения оптимальных ограничений на виртуальные рынки.

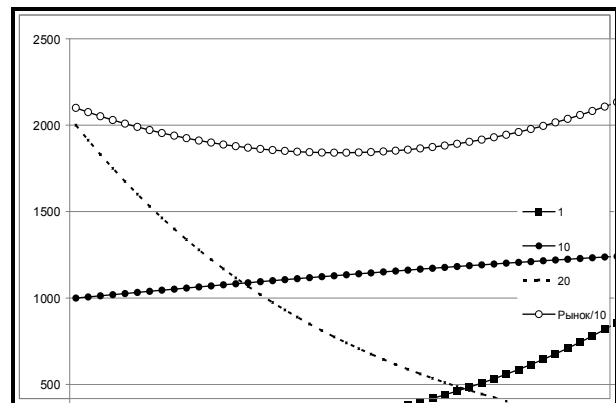


Рис. 3. Зависимость капитала от номера цикла при $V = 10; \alpha = 0,9$

⁶ Отметим, что математическое ожидание предполагаемой доходности формально может рассматриваться как отрицательная систематическая ошибка.

⁷ Обзор зарубежной литературы и расчеты данных сделал студент Московского физико-технического института (государственного университета) И. Митин.

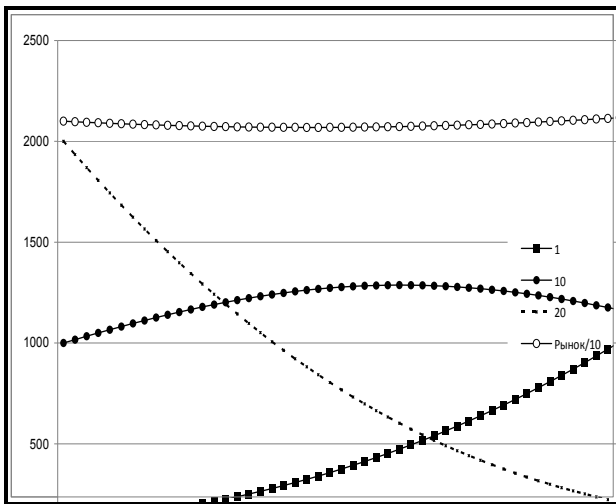


Рис. 4. Зависимость капитала от номера цикла при $V = 1; \alpha = 0,1$

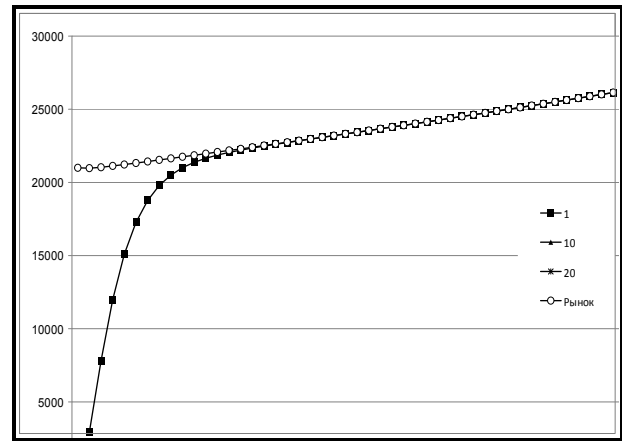


Рис. 7. Зависимость капитала от номера цикла при $V = 100; \alpha = 0,1$

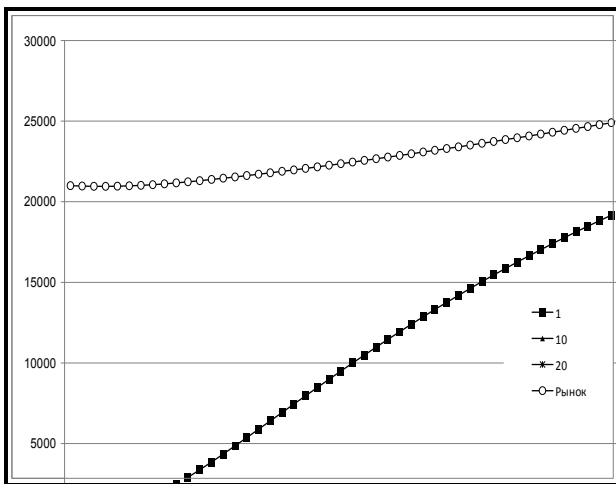


Рис. 5. Зависимость капитала от номера цикла при $V = 10; \alpha = 0,1$

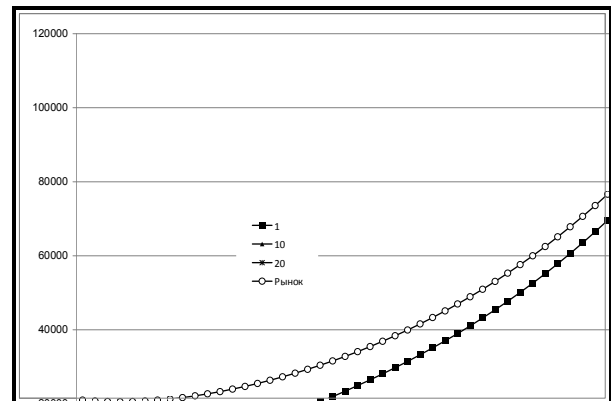


Рис. 8. Зависимость капитала от номера цикла при $V = 100; \alpha = 0,9$

На рис. 9-12 представлены выборочные результаты численных экспериментов с более реалистичным предположением о наличии у каждого агента a_j , кроме систематической e_j , еще и случайной составляющей ошибки e_{ij} , которая задавалась в виде равномерно распределенной в диапазоне $\pm e_j$.

Характерные результаты численных экспериментов для скорости $V = 10$ представлены на рис. 9, 10.

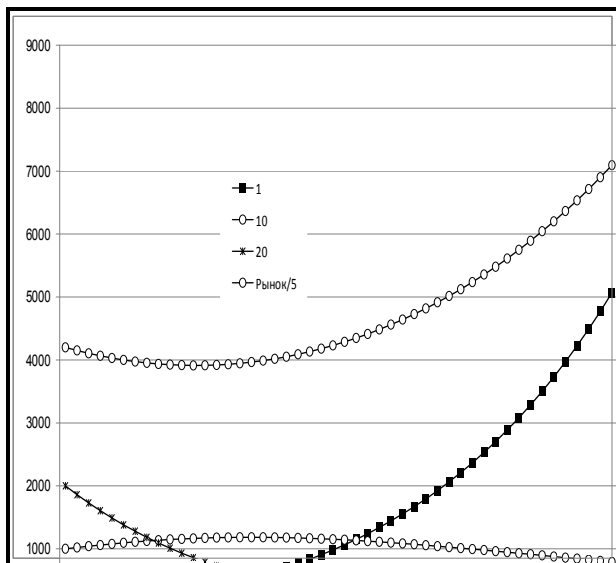


Рис. 6. Зависимость капитала от номера цикла при $V = 10; \alpha = 0,9$

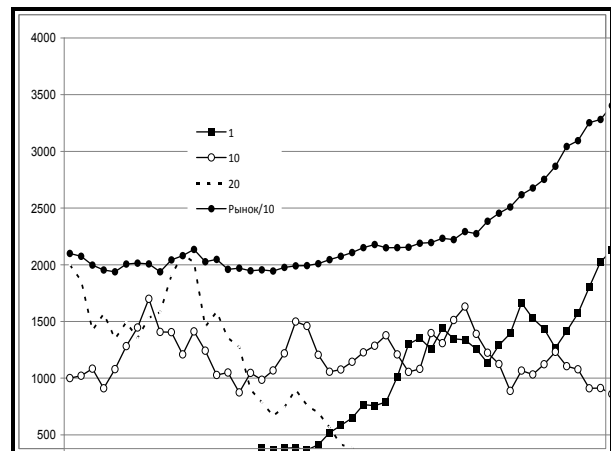


Рис. 9. Зависимость капитала от номера цикла при $V = 10; \alpha = 0,9$

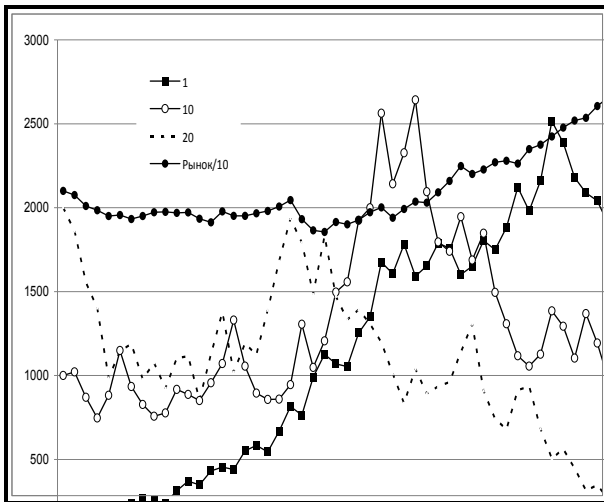


Рис. 10. Зависимость капитала от номера цикла при $V = 10$; $\alpha = 0,9$

На рис. 10 имеет место в районе 21-го цикла явный «кризис» развития системы, обусловленный случайной «перекачкой» виртуальным рынком самому неэффективному собственнику. На рис. 9 аналогичный «кризис» по той же причине начинается в районе 10-го цикла, однако достаточно устойчивый рост капитала наиболее эффективного агента после 20-го цикла обеспечивает рынку в целом быстрый и устойчивый рост.

На рис. 10 представлены выборочные результаты численных экспериментов с теми же исходными характеристиками $\bar{A}, \bar{\xi}$, скоростью $V = 100$, $\alpha = 0,9$. Несмотря на стабилизирующее влияние реального рынка, за 50 циклов не наблюдается гарантированного выхода на режим устойчивого роста капитала (прогресса).

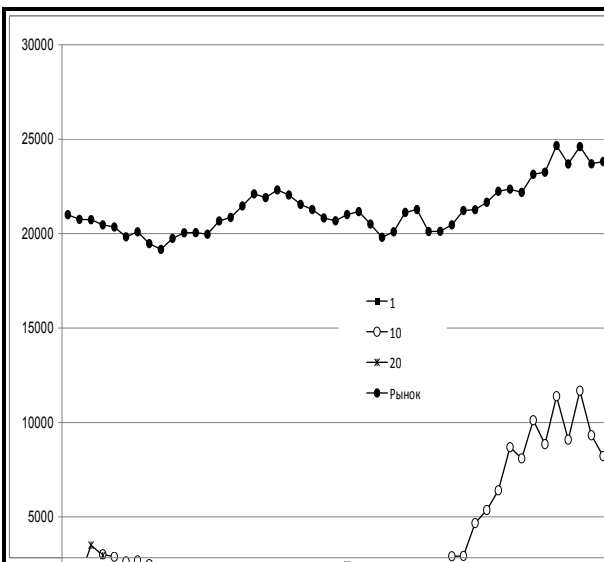


Рис. 11. Зависимость капитала от номера цикла при $V = 100$; $\alpha = 0,9$

Характерно тотальное замедление экономического роста по сравнению с рис. 8.

И, наконец, сочетание высокой скорости оборота $V = 100$ с доминирующей ролью виртуального рынка $(1 - \alpha) = 0,9$ приводит к полной рандомизации судьбы эффективных агентов, что представлено рис. 12.

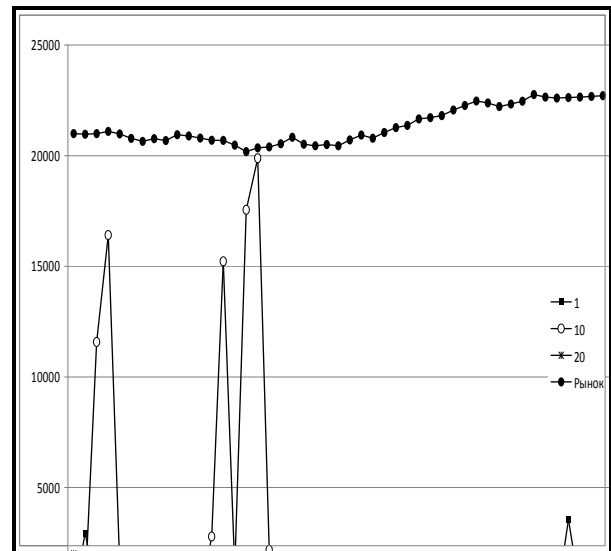


Рис. 12. Зависимость капитала от номера цикла при $V = 100$; $\alpha = 0,1$

Выводы

Представленные в первой части статьи экспериментальные материалы содержат в себе прямые и косвенные данные об ошибках оценивания недвижимости стандартных сырьевых и информационных объектов, которые чрезвычайно важны при построении реалистичных моделей рынка, оценке инновационных рисков и будут предметом первоочередного экспериментального изучения.

Первые из предполагаемых массивов экспериментальных данных результаты позволяют дать порядки погрешностей оценивания рыночных стоимостей реальных и виртуальных объектов как сопоставимые по величине.

В стационарной ситуации по коэффициенту вариации величина погрешности имеет порядок 0,1. Наличие смещений в оценках в кризис несомненно, а в стационаре — требует дополнительных исследований.

Во второй части представлены характерные результаты численных экспериментов по динамике недетерминированных реально-виртуальных рынков. Модели отражают основные особенности наблюдаемых в экономиках взаимодействий реальных и виртуальных рынков, в частности, мультипликацию ошибок виртуальными рынками. Из модели следует зависимость оптимального распределения ресурсов между реальным и виртуальным рынками от уровня ошибок в оценивании рыночных стоимостей, что должно стать предметом дальнейших исследований.

Литература

1. Вольтера В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] / В. Вольтера ; под ред. Ю.М. Свиричева ; пер. с франц. О.Н. Бондаренко. — М. : Наука. — 288 с.
2. Грачев И.Д. Вероятностная модель смешанных экономических систем как инструмент выбора и обоснования законодательных норм и правил хозяйствования [Текст] / И.Д. Грачев // Экономический анализ: теория и практика. — 2009. — №24. — С. 22-31.
3. Грачев И.Д. Законодательное обеспечение экономического прогресса: экономико-математические основы [Текст] / И.Д. Грачев. — Казань : Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2008. — 264 с.
4. Грачев И.Д. Комбинированная модель реально-виртуальной экономики [Текст] / И.Д. Грачев, Н.В. Ноакк // Аудит и финансовый анализ. — 2011. — №1. — С. 92-101.
5. Грачев И.Д. Методология вероятностной оценки рыночных стоимостей как основы исследования и регулирования макроэкономической системы [Текст] / И.Д. Грачев // Аудит и финансовый анализ. — 2009. — №4.

6. Грачев И.Д. Методология и экономический инструментарий моделирования и институциональной реализации экономического прогресса [Текст] : автореф. дисс. ... д-ра экон. наук / И.Д. Грачев ; Учреждение Российской Академии наук Центральный экономико-математический институт РАН (ЦЭМИ РАН). – М., 2010. – 627 с.
7. Грачев И.Д. Оценка микроэкономических рисков и безопасности [Текст] / И.Д. Грачев. – М. : Мастер-Лайн, 2003. – №4. – 279 с.
8. Грачев И.Д. Риски инновационных систем (математическое моделирование) [Текст] / И.Д. Грачев, В.М. Живетин. – М. : Изд-во Ин-та проблем риска, 2008. – 320 с.
9. Грачев И.Д. Статистическая модель автопрогресса экономических систем [Текст] / И.Д. Грачев. – М. : Наука, 2010. – 181 с.
10. Кейнс Дж.М. Общая теория занятости, процента и денег [Микроформа]. Избранное / Джон Мейнард Кейнс: [пер. с англ. Е.В. Виноградова и др.] – М. : РГБ, 2008.
11. Леонтьев В.В. Избранные статьи [Текст] / Василий Леонтьев ; вступ. ст. С.А. Калядиной // Междунар. благотворит. Фонд спасения Петербурга – Ленинграда. – СПб. : Изд-во газ. «Новое время», 1994. – 364 с.
12. Лоскутов А.Ю. Динамическое моделирование некоторых финансовых процессов [Текст] / А.Ю. Лоскутов, А.А. Бредихин. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 19 с.
13. Лоскутов А. Локальная аппроксимация. Новый метод прогнозирования экономических показателей [Текст] / А. Лоскутов, О. Котляров // Валютный спекулянт: альманах. – 2008. – С. 8-13.
14. Лощинин М. Обменный спектр фирмы подобен статистическому образу регионального рынка [Текст] / М. Лощинин, О. Лощинина // Экономист. – 2006. – №1. – С. 75-78.
15. Лощинин М. Закон Парето: потребность переоткрытия [Текст] / М. Лощинин // Экономист. – 2003. – №2. – С. 58-68.
16. Макаров В.Л. и др. Применение вычислительных моделей в государственном управлении [Текст] / В.Л. Макаров, А.Р. Бахтизин, С.С. Сулакшин ; Центр проблемного анализа и гос.-управленческого проектирования. – М. : Науч. эксперт, 2007. – 302 с.
17. Нейман Дж. фон. Теория игр и экономическое поведение [Текст] / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн ; пер. с англ. под ред. и с доб. Н.Н. Воробьева. – М. : Наука, 1970. – 707 с.
18. Поспелов И.Г. Модель современной экономики России: методы, технологии, результаты [Электронный ресурс] / И.Г. Поспелов // Мат-лы междунар. конф. «Путь в будущее – наука, глобальные проблемы, мечты и надежды» : 26-28 ноября, 2007 / Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Режим доступа: spkurdyumov.narod.ru/pospелov20.htm.
19. Псиола З.Г. и др. Нелинейная экономическая динамика [Текст] / З.Г. Псиола, Э.Р. Розендорф, В.В. Трофимов // Фундам. и прикл. матем. – 1997. – Т. 3 ; №2. – С. 319-349.
20. Смоляк С.А. Некоторые теоретические проблемы оценки имущества [Электронный ресурс] / С.А. Смоляк. Режим доступа: http://www.labrate.ru/articles/smolyak_article_2008-1_valuation_problem.htm.
21. Стерник Г.М. Спад на рынке строительства и продажи жилья в России [Текст] / Г.М. Стерник // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2009. – №3-4. – С. 185-209.
22. Чем схожи кризисы 98-го и 2008-го годов? [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.techart.ru/files/publications/move-su-101109.pdf>
23. Чернавский Д.С. Синергетика и информатика: динамическая теория информации [Текст] / Д.С. Чернавский ; предисл. и послесл. Г.Г. Малинецкого. – 3-е изд., доп. – М. : URSS, 2009. – 300 с.
24. Эбелинг В. и др. Физика процессов эволюции [Текст] / В. Эбелинг, А. Энгель, Р. Файстель; пер. с нем. Ю.А. Данилова. – М. : УРСС, 2001. – 326 с.
25. Dragulescu A. Statistical mechanics of money / A. Dragulescu, V.M. Yakovenko // The European physical J. Ser. 2004. August 4. Access mode – <http://www.complexity.ru/papers/EPJB-17-723-2000.pdf>

26. Levine R. Stock market development and long-run growth / R. Levine, S. Zervos // The World bank economic review. Vol. 10. N. 2. Pp. 323-339.
27. Levine R. Stock markets, banks, and economic growth / R. Levine, S. Zervos // The American economic review. 1988. Vol. 88. No. 3. P. 537-558.
28. Ludvigson S. How important is the stock market effect on consumption? / S. Ludvigson, C. Steindel // FRBNY economic policy review. 1999. July. Pp. 29-51.
29. Samuelson P. Foundations of economic analysis / P. Samuelson. New York: Atheneum, 1971.

Ключевые слова

Реально-виртуальные рынки; вероятностно-комбинированная модель; ошибки оценивания; рыночная стоимость; ограниченно нерациональные агенты.

*Грачёв Иван Дмитриевич
E-mail: idg19@mail.ru*

РЕЦЕНЗИЯ

Предлагаемая статья является продолжением исследования, результаты которого были опубликованы в первом номере журнала «Аудит и финансовый анализ» за 2011 г.

В более ранних публикациях автора была предложена модель реально-виртуальных рынков, где была признана изначально неверной аксиома о рациональных агентах, а также сформулирована гипотеза об ограниченно нерациональных агентах рынка, оценивающих ситуацию и действующих с ограниченной по дисперсии ошибкой. В данной статье излагается вероятностная модель реально-виртуальных рынков, построенная на основе общих положений «статистической экономики». Отдельное описание виртуального рынка не отличается от ранее предложенного, однако и теоретический, и практический интерес представляет описание взаимодействия реального и виртуального рынков, т.е. построение комбинированной модели реально-виртуальных рынков.

С учетом данной задачи прежде всего необходимы были сравнительные экспериментальные результаты по оцениванию недвижимости как эталонного образца реальной экономики и пакетов акций как, бесспорно, необходимого элемента экономики виртуальной. Характерные уровни воспроизводимостей и смещений в оценках рыночных стоимостей экономических объектов представлены соответствующими таблицами и рисунками. Реальные экспериментальные данные подтверждают гипотезу автора о сильно коррелированных ошибках агентов-оценщиков рыночных стоимостей.

В заключительной части статьи автор приводит результаты численных экспериментов по динамике недетерминированных реально-виртуальных рынков. Модели отражают характерное экономическое явление – мультипликацию ошибок виртуальными рынками. Отсюда, как убедительно показывает автор, следует зависимость оптимального распределения ресурсов между реальным и виртуальным рынками от уровня ошибок в оценивании рыночных стоимостей.

Заключение. Рецензируемая статья представляет интерес для научных работников, занимающихся исследованиями экономики кризисных явлений, отвечает требованиям, предъявляемым к научным работкам, а потому рекомендуется к опубликованию в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Хрусталёв Е.Ю., д.э.н., профессор, в.н.с., Центральный экономико-математический институт Российской Академии наук

3.21. PROBABILISTIC DYNAMIC MODEL OF THE REAL-VIRTUAL MARKETS

I.D. Grachev, Doctor of Economical Sciences, Deputy of State Duma of Russia, Member of National Advice of Russian Federation on Evaluation Activity

In the pre-crisis and crisis of the estimation errors of market values increase sharply both on the real and the virtual markets. There is a clear correlation between the estimation errors of different agents, which can be interpreted as a mass (universal) displacement estimates on the order of the coefficient of variation.

The presented analytical results and numerical calculations allowed by development of the probabilistic com-

combined model of real-virtual markets and the filling of its experimental information to give informed management decisions to control and regulate the virtual market

Literature

1. V. Volterra, *Mathematical Theory of the struggle for existence*; Ed. by Y.M. Svirezhev; trans. from French O.N. Bondarenko [Text] / V. Volterra. – Moscow: Nauka. – 288 p.
2. I.D. Grachev. Probabilistic model of mixed economic systems as a tool of choice and justification of legal norms and rules of management [Text] // *Economic Analysis: Theory and Practice («ID Finances and Credit»)*. – 2009. – №24 (153). – P. 22-31.
3. I.D. Grachev. Legislative provision of economic progress: the economic and mathematical foundations [Text] / I.D. Grachev. – Kazan: Publishing of Kazan. State univ., 2008. – 264 p.
4. I.D. Grachev. Combined model of real-virtual economy [Text] / I.D. Grachev, N.V. Noack / *Audit and financial analysis*. – M., 2011. – №1. – P. 92-101.
5. I.D. Grachev. Methodology for probabilistic assessment of market value as the basis of research and management of the macroeconomic system [Text] / I.D. Grachev // *Audit and financial analysis*. – 2009. – №4. – P. 92-101.
6. I.D. Grachev. Methodology and econophysical modeling tools and institutional implementation of economic progress: Dis. ... Dr. Econ. Science / I. D. Grachev – Establishment of the Russian Academy of Sciences, Central Economics and Mathematics Institute (CEMI RAS). – Moscow, 2010. – 627 p.
7. I.D. Grachev. Score microeconomic risk and security [Text] / I.D. Grachev. – M.: Master – Line, 2003. – №4. – 279 p.
8. I.D. Grachev. Risks of innovation systems (mathematical modeling) [Text] / I.D. Grachev, V.V. Zhivetin. – Moscow: Publishing House of the Institute of Problems of risk. 2008. – 320 p.
9. I.D. Grachev. Statistical model avtoprogressa economic systems [Text] / I.D. Grachev. – Moscow: Nauka, 2010. – 181 p.
10. J.M. Keynes. *General Theory of Employment, Interest and Money* [Mikrofilm]. Selected works / John Maynard Keynes; [trans. from English. E.V. Vinogradov et al.] – Moscow: RGB, 2008.
11. V.V. Leontiev. Selected Articles: Translation [Text] / Wassily Leontief, introd. art. of S.A. Kalyadin, Internat. fund of St. Petersburg – Leningrads life-saving Spb.: Publish. of journ. «New Era», 1994. – 364 p.
12. A.Y. Loskutov. Dynamic simulation of certain financial processes [Text] / A.Y. Loskutov, A.A. Bredikhin / Moscow: Publish. of Mosc. Univ. – UDC 517.9:519.86. – 19 p.
13. A.Y. Loskutov. Local approximation. A new method for predicting economic indicators [Text] / A.Y. Loskutov, O. Kotlyarov / *Currency speculator*. – Almanac of 2008. – P. 8-13.
14. M. Loshchinin. The exchange range firms like statistically regional market [Text] / M. Loshchinin, O. Loshchinin // *Ukrainian journal «Economist»*. – №1. – 2006. – P. 75 – 78.
15. M. Loshchinin. Pareto Law: the need to reopen / M. Loshchinin [Text] / M. Loshchinin // *Ukrainian journal «Economist»*. – №2. – 2003. – P. 58 – 68.
16. V.L. Makarov. The use of computational models in public administration [Text] V.L. Makarov, A.R. Bakhtizin, S.S. Sulakhin. Center for Problem Analysis and state-management planning. – Moscow: Scientif. expert, 2007. – 302 p.
17. J. Neumann. *Theory of Games and Economic Behavior* [Text] / J von Neumann, O. Morgenstern, trans. from English. Ed. and ext. N.N. Vorobiev. – M.: Nauka, 1970. – 707 p.
18. I.G. Pospelov. Model of a modern Russian economy: methods, techniques, results // *Proceedings of International Conference «Path to the Future – the science, global problems, hopes and dreams.»* November 26-28, 2007, Applied Mathematics Institute. M.V. Keldysh Academy of Sciences, Moscow. [Electronic resource] / I.G Pospelov. Mode of access: spkurdyumov.narod.ru/pospelov20.htm.
19. Z.G. Psiola. Nonlinear economic dynamics [Text] / Z.G. Psiola, E.R. Rozendorm, V. Trofimov, «Fund. and Math. Math. – 1997. – T. 3. – №2. – P. 319 – 349.
20. S.A. Smolyak. Some theoretical problems of property valuation [electronic resource] / S. Smolyak. Mode of access: http://www.labrate.ru/articles/smolyak_article_2008-1_valuation_problem.htm.
21. G.M. Sternik. Downturn in the market for construction and housing sales in Russia [Text] / G.M. Sternik // *Journal of the New Economic Association*. – №3-4. – M.: 2009. – P. 185-207.
22. «What do the similar the crises in 1998 and 2008 years?» [Electronic resource] / Access mode: <http://www.techart.ru/files/publications/move-su-101109.pdf>
23. D.S. Chernavskii. *Synergetics and Information: Dynamic Theory of Information* [Text] / D.S. Chernavskii; foreword. and afterword. G.G. Malinetskii. – 3rd ed., add. – Moscow: URSS, 2009. – 300 p.
24. W. Ebeling. *Physics of evolutionary processes* [Text] / W. Ebeling, A. Engel, R. Faystel; trans. from Deutsch Y.A. Danilova. – Moscow: URSS, 2001. – 326 p.
25. A. Dragulescu. *Statistical Mechanics of Money* [Electronic resource] / A. Dragulescu, V.M. Yakovenko // *The European Physical J. Ser. B*. August 4, 2004. Access mode – <http://www.complexity.ru/papers/EPJB-17-723-2000.pdf>
26. R. Levine. *Stock Market Development and Long-Run Growth* [Text] / R. Levine, S. Zervos // *THE WORLD BANK ECONOMIC REVIEW*. – VOL. 10. – NO. 2. – P. 323-339.
27. R. Levine. *Stock Markets, Banks, and Economic Growth* [Text] / R. Levine, S. Zervos // *The American Economic Review*. – Vol. 88. – No. 3 (Jun., 1998) – P. 537-558.
28. S. Ludvigson. How Important Is the Stock Market Effect on Consumption? [Текст] / S. Ludvigson, C. Steindel // *FRBNY ECONOMIC POLICY REVIEW*, JULY 1999. – P. 29-51.
29. P. Samuelson. *Foundations of Economic Analysis* [Text] / P. Samuelson. – New York: Atheneum, 1971.

Keywords

Real-virtual markets; combined probabilistic model; the estimation errors; the market value. limited irrational agents.