11.4. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Терелянский П.В., к.т.н., д.э.н., доцент, зав. кафедрой «Информационные системы в экономике»;
Костикова А.В., магистр экономики, ассистент кафедры «Информационные системы в экономике»

Волгоградский государственный технический университет

В статье обоснована необходимость разработки инструментария для принятия решений в динамической среде. Предлагается математический аппарат динамических нечетких множеств, который основывается на учете фактора времени при построении функций принадлежности. Определены понятия динамического нечеткого числа, динамического нечеткого множества, динамической функции принадлежности. Для графической интерпретации динамических нечетких множеств автор предлагает использовать поверхности, построенные в трехмерной системе координат, где одна из осей на графике фиксирует изменение во времени. Рассмотрены факторы, влияющие на вид динамической функции принадлежности, на основе чего определены ее типы. Описаны операции над нечеткими динамическими числами в форме их функций принадлежности, представлены графические модели. Предложен алгоритм принятия решений на основе динамических нечетких множеств. Если удастся однозначно выделить доминирующие альтернативы в разные моменты времени, можно построить линию тренда и осуществить прогнозирование наилучшего решения на перспективу.

Согласно методам принятия решений, описание свойств объектов сложных систем можно представить в виде набора чисел с нечеткой функцией принадлежности. Для построения функции принадлежности используются прямые и косвенные методы. В прямых методах эксперт явно задает правила определения функции принадлежности (формулой, таблицей, примером). В косвенных методах функция принадлежности выбирается так, чтобы удовлетворять некоторым заранее сформулированным условиям. И в том и другом случаях, исходная информация, на основе которой принимается решение о виде функции принадлежности, с течением времени устаревает. Как правило, эксперту не хватает данных для пересмотра правил построения функций принадлежности, кроме того, считается, что изменение оценок в небольшие интервалы времени не может быть велико, поэтому ввиду отсутствия любых других инструментов описания динамических характеристик, в принятии решений используются статические функции принадлежности, определенные на некоторый момент времени в недалеком прошлом. Недостатки такого подхода очевидны – статические характеристики ограничивают описание динамических объектов и ставят под сомнение достоверность получаемых результатов.

Ряд проведенных авторами исследований показал, что описание эволюционирующих систем возможно с помощью динамических нечетких множеств (ДНМ). С практической точки зрения с каждым динамическим нечетким множеством удобно ассоциировать некоторое динамическое свойство, признак или атрибут, которые характеризуют рассматриваемую совокупность объектов универсума. При этом по аналогии с классическими множествами рассматриваемое свойство может порождать некоторый предикат, который вполне естественно назвать динамическим нечетким предикатом. Данный нечеткий предикат может принимать множество значений истинности из интервала [0, 1] в разные моменты времени. При этом значению «истина» по-прежнему соответствует число единица, а значению «ложь» – число ноль. Это можно интерпретировать следующим образом. Чем в большей степени элемент обладает рассматриваемым свойством, тем более близко к единице должно быть значение истинности соответствующего нечеткого предиката. И наоборот, чем в меньшей степени элемент обладает рассматриваемым свойством, тем более близко к нулю должно быть значение истинности этого нечеткого предиката. Если элемент определенно не обладает рассматриваемым свойством, то соответствующий нечеткий предикат принимает значение «ложь» (или число ноль). Если же элемент определенно обладает рассматриваемым свойством, то соответствующий нечеткий предикат принимает значение «истина» (или число единица). Применение динамических нечетких множеств, функции принадлежности которых будут определяться парой $\mu(x,t)$, позволит учесть бесконечный ряд параметров системы в любой срез времени.

Определение 1.

Пусть:

X – некоторое множество;

M – множество принадлежностей;

$\mu_{\tilde{A}_t} : X \to M$.

Динамическим нечетким подмножеством ***A*** ~ множества ***X*** называется множество пар:

$$\tilde{A}_t = \{\mu_{\tilde{A}}(x,t), x\}, \qquad (1)$$

$x \in X,\ t \in T,$

где ***T*** – горизонт построения модели.

Таким образом, ДНМ представляется набором:

$$\langle U, M, \mu_{\tilde{A}_t}, T \rangle,$$

где ***U*** – универсальное множество, в то время как для нечеткого множества, определенного Заде, исключена переменная времени [8, с. 340]:

$$\langle U, M, \mu_{\tilde{A}} \rangle.$$

Носителем ДНМ $\tilde{A}$ называется обычное множество A_S , которое содержит только те элементы универсума, для которых значения функции принадлежности соответствующего ДНМ отличны от нуля.

Среди очевидных преимуществ применения ДНМ для принятия решений можно выделить следующие:

- возможность оперировать одновременно нечеткими входными данными с непрерывно изменяющимися во времени значениями, полученными в результате статистических опросов, т.е. такими, которые невозможно задать однозначно;
- возможность нечеткой формализации критериев оценки и сравнения: оперирование критериями «большинство», «возможно», «преимущественно»;
- возможность проведения качественных оценок как входных данных, так и выходных результатов, т. е. возможность оперировать не только значениями данных, но и степенью их достоверности и ее распределением;
- возможность быстрого моделирования сложных динамических систем и их сравнительного анализа с заданной степенью точности.

Даже при отсутствие точных данных о значениях каких-либо критериев лицо, принимающее решение (ЛПР), или эксперт в состоянии описать их словами, например, «в последние несколько лет наши конкурентные преимущества достаточно высоки», «на протяжении текущего года сохраняется высокий уровень спроса» и т.д. Такой оценки вполне достаточно для определения функций принадлежности лингвистических переменных и их компьютерной обработки наряду с другими, более детерминированными показателями.

В качестве иллюстрации нечеткого динамического моделирования, рассмотрим пример построения функции принадлежности нечеткому множеству «Молодой» для нескольких временных периодов (рис. 1). Согласно утверждениям экспертов, в современных условиях люди в возрасте от 15 до 30 оцениваются как бесспорно молодые, а от 50 и выше – немолодые. В диапазоне от 31 до 50 эксперты высказывают расплывчатое мнение.

Определим вид и значения функции принадлежности нечеткому множеству «Молодой» в период 13-14 веков, когда средняя продолжительность жизни в колебалась от 17,3 до 32,7 года. Анализ экспертных суждений относительно принадлежности возрастных групп к понятию «молодой», показывает, что функция принадлежности будет определяться отличным от современного трактования диапазоном значений. Из графика функции, соответствующей периоду «Средние века» на рис. 1а, видно, что для данного исторического периода характерной чертой «молодого» считался возраст до 10 лет. Начиная с 11 и до 25 лет принадлежность к понятию «молодой» постепенно снижается, а от 25 лет и старше приравнивается к нулю.

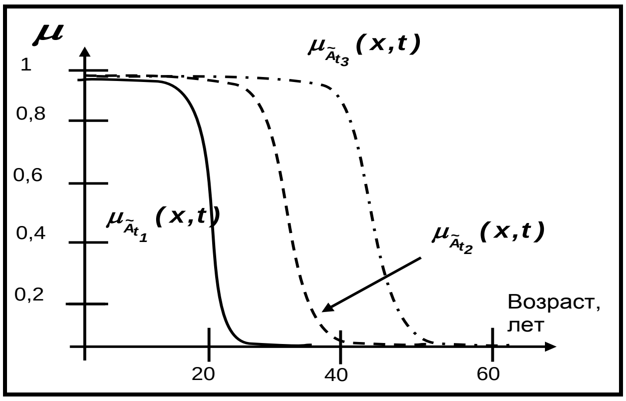

Рис. 1. Функции принадлежности нечеткому множеству «Молодой человек»

В периоды времени:

t_1 – период средних веков;

t_2 – XX в.;

t_3 – настоящее время.

В целом можно указать несколько причин изменения функции принадлежности. Среди них явно выделяются две группы факторов: субъективные и объективные. К объективным факторам следует отнести динамичность самих изучаемых объектов или явлений, а также непостоянство среды, в условиях которой они рассматриваются. Одним из примеров здесь может выступить изменение отношения экспертов к скорости обработки информации в связи с научно-техническим прогрессом. Субъективные причины обусловлены изменениями внутренних суждений экспертов (ЛПР) по истечению времени, особенностей восприятия экспертами анализируемых объектов и условий среды, в которых они находятся. В данном случае изменения могут наблюдаться в отношении к таким фразам, как «высокооплачиваемая работа», «престижный район», «вкусный ужин».

Ряд проведенных авторами исследований показал, что выявленная динамика нечетких множеств наблюдается во всех эволюционирующих системах. Кроме того, авторами установлено, что в динамической среде над нечеткими множествами и соответствующими им функциями принадлежности наблюдается следующее [3, с. 22]:

- в несмежные временные интервалы степень принадлежности нечеткому множеству различна;
- изменению подвергается набор элементов нечеткого множества;
- одно и то же нечеткое множество может быть представлено разными функциями принадлежности, которые изменяются во времени;

Динамическое нечеткое множество может быть представлено в виде поверхности, а график функции принадлежности нечеткому множеству – в трехмерной системе координат, где одна из осей на графике будет фиксировать его изменение во времени. Функцию принадлежности динамическому нечеткому множеству, охватывающую полный период построения модели, будем называть динамической.

Определение 2.

Динамической функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}_t}(x,t): X \to [0;1]$$

называется функция, которая каждому элементу, $x \in X$, ставит в соответствие число из интервала [0;1] и позволяет вычислить степень принадлежности каждого элемента динамическому нечеткому множеству $\tilde{A}_t$ в любой момент времени.

Определение 3.

Динамическое нечеткое число представлено совокупностью нечетких чисел, представленных во времени и может быть определено как нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, для которого его функция принадлежности определяется как функция нескольких переменных, одна из которых параметр времени t.

Для функции принадлежности динамического нечеткого числа соблюдаются условия нормальности и выпуклости. Динамическое нечеткое множество называется нормальным, если максимальное значение его функции принадлежности равно единице. Формально это означает, что для нормального нечеткого множества необходимо выполнение следующего условия:

$$\sup_{x \in \Re} \mu_{\tilde{A}_t}(x,t) = 1.$$

Динамическое нечеткое множество $\tilde{A}_t = \{\mu_{\tilde{A}_t}(x,t), x\}$ с универсумом X называют выпуклым, если его функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}_t}(x,t)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\mu_{\tilde{A}_t}(x,t) \geq \min\left\{\mu_{\tilde{A}_t}(a), \mu_{\tilde{A}_t}(b)\right\},$$

для любых значений $x, a, b \in X$, при которых: $a < x < b$ и $a \neq b$.

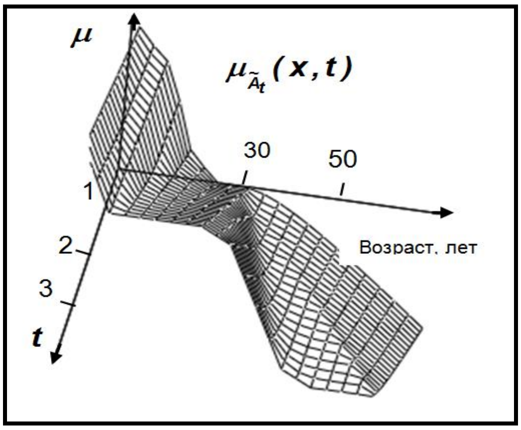

Рис. 2. Динамическая функция принадлежности нечеткому множеству «Молодой»[1]

На рис. 2 представлена динамическая функция принадлежности нечеткому множеству «Молодой человек» для трех временных периодов в декартовом пространстве:

- абсцисса – ось времени;
- ордината – степень принадлежности;
- аппликата – область определения нечеткого значения.

Вызванные во времени изменения сопровождаются сдвигом функции принадлежности относительно абсциссы и перерождением как самого исследуемого пространства из двумерного в трехмерное, так и самой функции принадлежности в поверхность.

В отличие от классических нечетких множеств, представленных на плоскости кривыми первого и второго порядков, а также прерывистыми трендами, нечеткое динамическое число представляет собой непрерывную поверхность. Построенная на рис. 2 динамическая функция принадлежности аппроксимируется множеством одномерными функций принадлежности (рис. 1). Поверхность в данном случае образуется множеством последовательных положений плоских одномерных функций принадлежности, перемещающихся в пространстве состояний системы во времени. Каждая функция принадлежности будет называться образующей поверхности. Если образующая есть плоская кривая, она может иметь постоянный или переменный вид. Перемещается образующая по направляющим, представляющим собой линии иного направления, чем образующие. Направляющие линии задают закон перемещения образующим. При перемещении образующей по направляющим создается каркас поверхности, представляющий собой совокупность нескольких последовательных положений образующих и направляющих. Поверхности определяются как множество точек, координаты которых удовлетворяют определенному виду уравнений: $F(\mu_{A(t)}, x, t) = 0$. Форма поверхности будет зависеть от вида определенных в разные моменты времени функций принадлежности. Выбор вида функций принадлежности зависит от ряда субъективных факторов, которые обязательно присутствуют, так как выбор осуществляет ЛПР.

На практике удобно использовать те функции принадлежности, которые допускают аналитическое представление в виде некоторой простой математической функции. Это упрощает не только соответствующие численные расчеты, но и сокращает вычислительные ресурсы, необходимые для хранения отдельных значений этих функций принадлежности. В классической теории нечетких множеств принято выделять следующие основные типы функций принадлежности:

- кусочно-линейные;
- ***Z***-образные;
- ***S***-образные;
- ***П***-образные.

Исходя из изменчивости двух взаимодействующих факторов: типа одномерных функций принадлежности, заданных экспертами в различные моменты времени и интервала значений параметра, степень принадлежности нечеткому множеству для которого определяется с помощью функции принадлежности [4, с. 52], нами определено четыре типа динамических функций принадлежности.

Первый тип динамической функции принадлежности может быть построен в случае, если в любой точке на выбранном временном интервале тип исходной одномерной функции оставался неизменным и интервал анализируемого параметра X не изменяется или нарастает постепенно и включает точки принадлежавшие области построения X в предыдущем моменте времени. Для первого типа характерно изменение степени принадлежности параметра X нечеткому множеству во времени. К этому типу относится рассмотренный пример с возрастной оценкой нечеткого множества «молодой», проиллюстрированный на рисунке 2.

Пусть в момент времени $t = 0$, функция принадлежности нечеткому множеству приняла треугольный вид. При изменении параметра времени ($t + i$, где i – шаг динамической функции) и соблюдении условия сохранения вида функции, получим последовательность $\{F_n\}$ где для каждого $n, F_n \subseteq Fun(n)$ (рис. 3а). Таким образом, заключим, что существует семейство треугольных функций $f_{\Delta} = (f_1, f_2, ..., f_n)$, определенных параметром времени $t_i, t_{i+1}, ..., t_k$.

Динамические функции принадлежности треугольного вида для $\forall t = const,\ при\ t \in [0, \infty]$ в общем случае может быть заданы аналитически следующим выражением:

$$f_{I_{\Delta}}(x, t; a, b, c) = \begin{cases} 0, x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b; \\ \frac{c-x}{c-b}, b \leq c \leq x; \\ 0, c \leq x. \end{cases},$$

где a, b, c – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a \leq b \leq c$. Применительно к конкретной функции, изображенной на рис. 3, а, значения параметров равны: a = 0, b = 5, c = 10. Как нетрудно заметить, параметры а и с характеризуют основание треугольника, а параметр b – его вершину. Как можно заметить, эта функция принадлежности порождает нормальное выпуклое унимодальное нечет-

[1] 1 – средние века; 2 – XX в.; 3 – настоящее время.

кое множество с носителем – интервалом (***a***, ***c***), границами ***(a, c) \ {b}***, ядром ***{b}*** и модой ***b***.

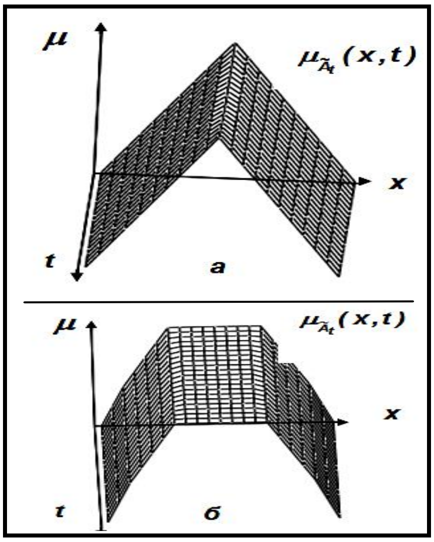

Рис. 3. Динамические функции принадлежности первого типа треугольного (а) и трапециевидного (б) типов

Аналогичным образом определим семейство трапециевидных функций принадлежности (рис. 3б):

$$f_{I_T}(x,t;a,b,c,d)=\begin{cases} 0, x\le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b; \\ 1, b\le x\le c; \\ \dfrac{d-x}{d-c}, c\le x\le d; \\ 0, d\le x. \end{cases},$$

где ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a\le b\le c\le d$. Параметры ***a*** и ***d*** характеризуют нижнее основание трапеции, а параметры ***b*** и ***c*** – верхнее основание трапеции. При этом данная функция принадлежности порождает нормальное выпуклое нечеткое множество с носителем – интервалом (***a***, ***d***), границами (***a***, ***b***)(***c***, ***d***) и ядром [***b***, ***c***].

Для построения ***П***-образной функции могут быть использованы линейные ***Z***- и ***S***-образные функции принадлежности. Тогда в пределах одного временного среза аналитическая запись будет задана следующим выражением:

$$f_{I_П}(x,t;a,b,c,d)= \\ =f_S(x,t;a,b)\bullet f_Z(x,t;c,d).$$

где ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a\le b\le c\le d$, а знак «•» обозначает обычное арифметическое произведение значений соответствующих функций.

При малейшем изменении интервала, определяющего параметр ***X*** в любой момент времени, при неизменном виде одномерных функции принадлежности поверхность приобретает вид ломанной (рис. 4, а).

Так как функции принадлежности в разные моменты времени не различаются структурно, то можно определить некий коэффициент пропорциональности, связывающий смежные функции друг с другом.

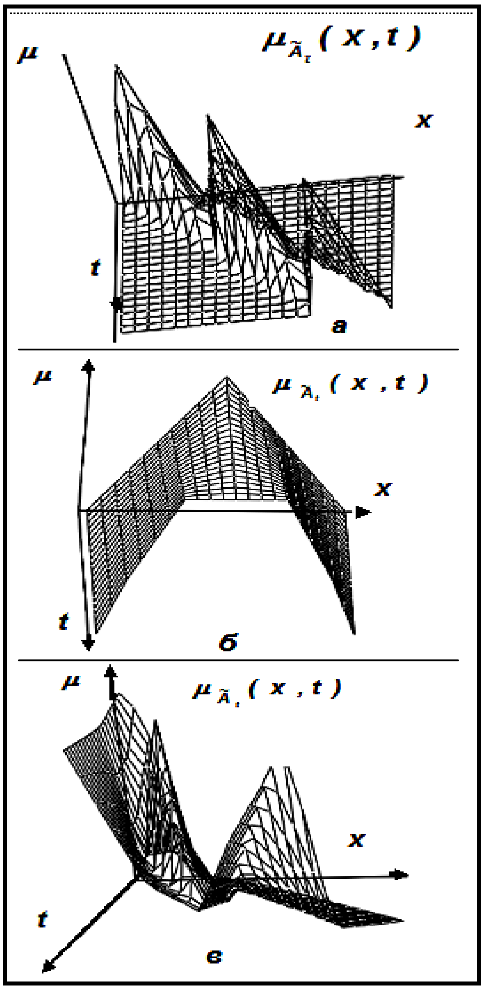

Рис. 4. Динамические функции принадлежности второго (а), третьего (б) и четвертого (в) типов

Например, для треугольной функции (рис. 4, а):

$f_{II_\Delta}(x,t;a_t,b_t,c_t),$

где a_t,b_t,c_t – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения в разные моменты времени ***t*** и упорядоченные отношением:

$a_t\le b_t\le c_t,$

коэффициент пропорциональности на всем промежутке построения модели примет следующий вид:

$$R(t)=(R(t_0);R_1(t_1);R_2(t_2);....R_k(t_k)). \qquad (2)$$

Пусть в период t_0 примет следующий вид:

$R(t_0)=(1,1,1).$

Коэффициент пропорциональности для следующего периода может быть представлен формулой (3), в виде отношения числовых параметров двух смежных треугольных функций.

$$R(t_1)=\left(\frac{a_2}{a_1};\frac{b_2}{b_1};\frac{c_2}{c_1}\right). \tag{3}$$

Отсюда любой числовой параметр:

$a_{t+1}, b_{t+1}, c_{t+1}$

определяется как:

$a_t = R(t)*a_{t-1}, b_t = R(t)*b_{t-1}, c_t = R(t)*c_{t-1}$.

Тогда для дискретного числа срезов при $t=0,1,2,...,k$, имеем:

$$f_{II_\Delta}(x,t;a_t,b_t,c_t)= =\left\{\frac{x-R(t)*a_{t-1}}{b_{t-1}*R(t)-a_{t-1}*R(t)}\right\}. \tag{4}$$

Третий тип динамической функции принадлежности представлен на рис. 4б. В данном случае происходит изменение вида исходных одномерных функций в разные моменты времени, при этом анализируемый интервал значений параметра X остается постоянным. Например, при комбинации треугольной и трапециевидной функций, искомую динамическую функцию принадлежности можно записать:

$$f_{III}(x,t;a,b,c,d)= =f_{I_\Delta}(x,t;a,b,c)*f_{IT}(x,t;a,b,c,d)).$$

Динамическая функция принадлежности четвертого типа в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{IV}(x,t;a_1,...,a_n,b_1,...,b_n)= =f_I(x,t;a_1,...,a_n,)*f_I(x,t;b_1,...,b_n).$$

Динамическая функция принадлежности четвертого типа характеризуется полной изменчивостью. Оба фактора, влияющих на вид динамической функции изменяются во времени. График представляет собой ломанную и остроконечную поверхность (рис. 4в).

Следует заметить, что переход к динамическим нечетким числам, не влечет за собой изменения свойств, установленных для классических нечетких множеств Л. Заде или дополнительных требований по осуществлению операций над ними. Определить операции над динамическими нечеткими множествами позволяет аналогия между представлением четких и нечетких множеств в форме их функций принадлежности [7, с. 55]. Динамическая функция принадлежности представляет собой совокупность одномерных функции принадлежности нечеткому множеству определенного типа на конкретное время проведения операций над ними.

Рассмотрим поле операции над нечеткими динамическими числами. Определим два простейших обычных отношения, которые могут иметь место между двумя произвольными нечеткими множествами, заданными на одном и том же универсуме U. Первое из них – равенство двух нечетких множеств.

Два нечетких множества $\tilde{A}_t=\left\{(x),\mu_{\tilde{A}}(x,t)\right\}$ и $\tilde{B}_t\left\{(x),\mu_{\tilde{B}}(x,t)\right\}$ считаются равными, если их функции принадлежности принимают равные значения на всем универсуме U:

$$\mu_{\tilde{A}_t}(x,t)=\mu_{\tilde{B}_t}(x,t)$$

для любого

$$x\in U, t\in T. \tag{5}$$

Равенство множеств в данном случае записывается как:

$\tilde{A}_t=\tilde{B}_t$.

Следующим простейшим отношением является понятие нечеткого подмножества (или нечеткого доминирования) произвольных нечетких множеств. Нечеткое множество $\tilde{A}_t=\left\{(x),\mu_{\tilde{A}}(x,t)\right\}$ является нечетким подмножеством нечеткого множества $\tilde{B}_t\left\{(x),\mu_{\tilde{B}}(x,t)\right\}$ тогда и только тогда, когда значения функции принадлежности первого не превосходят соответствующих значений функций принадлежности второго, т.е. выполняется условие:

$$\mu_{\tilde{A}t}(x,t)\le\mu_{\tilde{B}t}(x,t)$$

для любого

$$x\in U, t\in T. \tag{6}$$

Для обозначения нечеткого подмножества используется символ «$\subseteq$«. При этом в случае $\tilde{A}_t \subseteq \tilde{B}_t$,говорят, что нечеткое множество $\tilde{B}_t$ доминирует нечеткое множество $\tilde{A}_t$, а нечеткое множество $\tilde{A}_t$ содержится в нечетком множестве $\tilde{B}_t$.

Операции пересечения, объединения и дополнения динамических нечетких множеств. Пусть множество $\tilde{A}_t$ задано функцией $\mu_{\tilde{A}t}(x,t)$, а множество $\tilde{B}_t$ задано функцией $\mu_{\tilde{B}t}(x,t)$, тогда пересечением нечетких множеств $\tilde{A}_t$ и $\tilde{B}_t$ из U называют нечеткое множество вида:

$$\tilde{C}_t=\tilde{A}_t\cap\tilde{B}_t=\int_U(\mu_{\tilde{A}_t}(x,t)\wedge\mu_{\tilde{B}_t}(x,t))/(x), \tag{7}$$

где

$$(\mu_{\tilde{A}_t}(x,t)\wedge\mu_{\tilde{B}_t}(x,t))= =\min\left\{\mu_{\tilde{A}_t}(x,t),\mu_{\tilde{B}_t}(x,t)\right\}, x\in U, t\in T.$$

В результате операции пересечения множеств получаем динамическое нечеткое множество $\tilde{C}_t$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{C}t}(x,t)$, которое содержит только те элементы, которые принадлежат обоим множествам $\tilde{A}_t$ и $\tilde{B}_t$. Результат операции пересечения двух и большего числа динамических нечетких множеств, заданных на одном и том же универсуме U, также можно изобразить графически в декартовой системе координат в трехмерном пространстве. Этот способ особенно удобен для визуализации операций с бесконечными нечеткими множествами. В данном случае каждое из нечетких множеств изображается соответствующей функцией принадлежности, а функция принадлежности результата операции пересечения изображается утолщенной линией [7, с. 56]. Для дополнительной наглядности область, расположенная ниже значений результирующей функции принадлежности, изображается крупной сеткой (рис. 4, а).

Аналогично тому, как две поверхности пересекаются по линии (совокупности линий), динамические нечеткие множества $\tilde{A}_t$ и $\tilde{B}_t$ имеют общую линию пересечения, которая одновременно принадлежит каждому из них. В зависимости от типа нечетких чисел и их взаимного положения линия пересечения может быть прямой или ломанной.

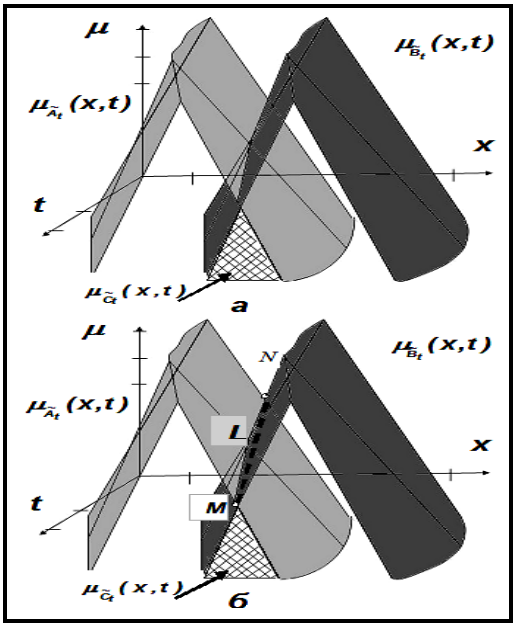

Рис. 5, а, б. Графическое представление операции пересечения двух нечетких множеств $\tilde{A}_t$ и $\tilde{B}_t$

Линия пересечения двух динамических нечетких множеств $\tilde{A}_t$ и $\tilde{B}_t$ (рис. 4б) является прямой линией ***L*** и, следовательно, определяется двумя точками ***M*** и ***N***, одновременно принадлежащими обеим плоскостям. Для того чтобы определить координаты точек необходимо опустить перпендикуляры на три оси $x, \mu(x,t)$. Уравнение прямой может быть найдено, исходя из координат известных точек, лежащих на ней. Пусть прямая ***L*** проходит через точки ***M*** (x_M, μ_M, t_M) и ***N*** (x_N, μ_N, t_N).

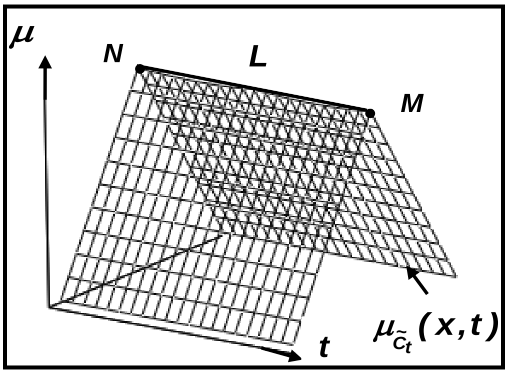

Рис. 6. Графическое представление результата операции пересечения двух нечетких множеств $\tilde{A}_t$ и $\tilde{B}_t$

Уравнения прямой, проходящей через точку ***M***, имеет вид:

$$y - y_M = k(x - x_M), \qquad (8)$$

где ***k*** – неизвестный коэффициент. Так как прямая проходит через точку ***N*** (x_N, μ_N, t_N), то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению:

$$y_N - y_M = k(x_N - x_M). \qquad (8)$$

Отсюда находим $k = \dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M}$. Подставляя найденное значение ***k*** в уравнение (8), получим уравнение прямой, проходящей через точки ***M*** и ***N***

$$\frac{y - y_M}{y_N - x_M} = \frac{x - x_M}{x_N - x_M} \qquad (9)$$

Построенные динамические функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}t}(x,t) = \mu_{\tilde{B}t}(x,t)$ представляют собой множество точек, определяющих изменение степеней принадлежности нечеткому множеству в разные моменты времени.

Данные поверхности удовлетворяют общему уравнению:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и

$$Ex + Fy + Gz + H = 0,$$

тогда система уравнений

$$\begin{cases} Ax + B\mu + Ct + D = 0 \\ Ex + F\mu + Gt + H = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

описывает линию пересечения ***L*** этих плоскостей.

Координаты любой точки линии удовлетворяют обоим уравнениям поверхностей, так как эта точка одновременно лежит на обеих поверхностях.

Объединением нечетких множеств $\tilde{A}_{(t)}$ и $\tilde{B}_{(t)}$ из ***U*** называют нечеткое множество вида

$$\tilde{C}_t = \tilde{A}_t \cup \tilde{B}_t = \int_U (\mu_{\tilde{A}t}(x,t) \vee \mu_{\tilde{B}t}(x,t)) / (x), \qquad (11)$$

где

$$(\mu_{\tilde{A}_t}(x,t) \vee \mu_{\tilde{B}_t}(x,t)) =$$
$$= max\left\{\mu_{\tilde{A}_t}(x,t), \mu_{\tilde{B}_t}(x,t)\right\}, x \in U, t \in T.$$

Операцию объединения нечетких множеств в смысле (11) иногда называют max-объединением или $\vee$ - объединением. Последнее обозначение связано с определением логической операции «или» (неисключающего или), которая в математической логике обозначается знаком «$\vee$». Соответственно функция принадлежности объединения в этом случае часто записывается в виде: $\mu_{\tilde{C}_t}(x,t) = (\mu_{\tilde{A}t}(x,t) \vee \mu_{\tilde{B}t}(x,t))$. При этом знак «$\vee$» используется в качестве синонима операции максимума.

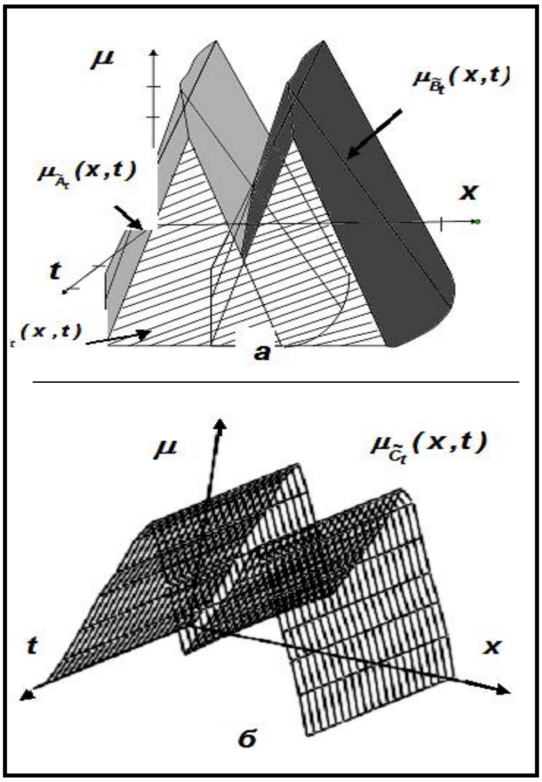

Рис. 7. Графическое представление операции объединения двух нечетких множеств (а) $\tilde{A}_t$ и $\tilde{B}_t$ и результат операции объединения операции дополнения нечеткого множества (б)

В результате объединения динамических нечетких множеств $\tilde{A}_t$ и $\tilde{B}_t$, получается множество $\tilde{C}_t$, которое содержит те элементы, которые принадлежат множеству $\tilde{A}_t$ или множеству $\tilde{B}_t$ или обоим множествам Графическая интерпретация операции объединения динамических нечетких множеств представлена на рис. 7, а.

Дополнением или отрицанием динамического нечеткого множества $\tilde{A}$ называют операцию, результатом которой является множество $\overline{A} = \neg\tilde{A}$, которое содержит все элементы, которые принадлежат универсальному множеству, но не принадлежат множеству $\tilde{A}$ (рис. 8а).

$$\overline{A}_t = \int_U (1 - \mu_{\tilde{A}_t}(x)/(x), x \in U, t \in T. \quad (12)$$

Разностью двух нечетких множеств и называется некоторое третье нечеткое множество, заданное на этом же универсуме U, функция принадлежности которого определяется по следующей формуле:

$$\mu_{\tilde{E}_t}(x) = \\ = max((\mu_{\tilde{A}_t}(x) - \mu_{\tilde{B}t}(x)), 0), x \in U, t \in T, \quad (13)$$

где под знаком максимума используется обычная операция арифметической разности двух чисел. Операция разности двух нечетких множеств (рис. 8а) по аналогии с обычными множествами обозначается знаком «\». В этом случае результат операции разности двух нечетких множеств можно записать в виде:

$$\tilde{E}_t = \tilde{A}_t \setminus \tilde{B}_t .$$

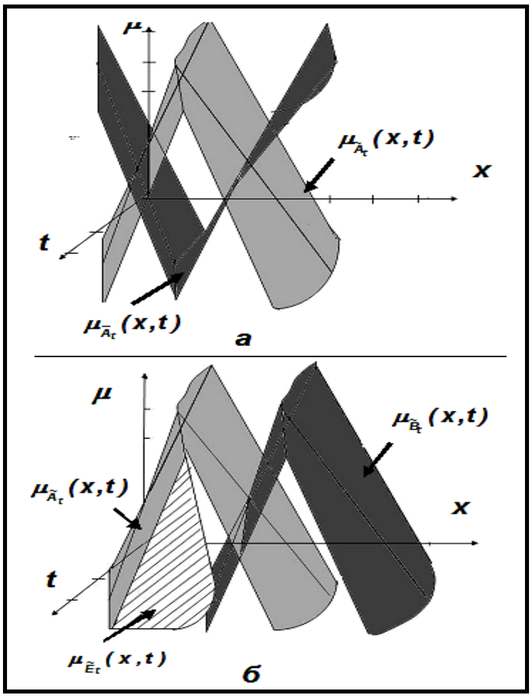

Рис. 8. Графическое представление операции дополнения нечеткого множества $\tilde{A}_t$ (а) графическое представление операции разности двух нечетких множеств $\tilde{A}_t$ и $\tilde{B}_t$ (б)

Особенность рассматриваемых операций над нечеткими множествами состоит в том, что для них не выполняются закон исключенного третьего и закон тождества (свойства дополняемости операций пересечения и объединения). Динамические нечеткие подмножества некоторого универсального множества относительно операций объединения, пересечения и дополнения, определенных соотношениями (7, 11, 12) удовлетворяют классическим свойствам идемпотентности, коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности [7, с. 59].

Выработка эффективного управленческого решения в динамической среде требует от эксперта знаний обо всех изменениях нечетких множеств и соответствующих им функций принадлежности на всем горизонте построения модели. Процесс динамического нечеткого моделирования представляется следующим нижеперечисленным образом.

- Предварительный анализ. Эксперт определяет проблему и горизонт построения модели, а также отбирает критерии, влияющие на принятие решения, рассматривает альтернативные варианты.
- Структурный анализ. Эксперт проводит качественную структуризацию проблемы и выделяет равноотстоящие интервалы времени, в рамках горизонта построения модели.
- Анализ неопределенности и построение динамических функций принадлежности по всем критериям.
- Выполнение вычислительных экспериментов на основе полученных на этапе 3 динамических нечетких множеств в целях выявления наилучшего варианта решения.
- Применение результатов вычислительных экспериментов в принятии решений.

Третий этап один из самых важных, так как именно в рамках него эксперту необходимо определить весь набор точек, по которым будут строиться динамические функции принадлежности. Как правило, эксперт обладает информацией о некоторых опорных или, так называемых, реперных точках системы в строго определенные моменты времени [4, с. 140]. Данных точек может оказаться недостаточно для построения максимально точной динамической функции принадлежности. Задача сводится к поиску значений функции в промежуточных точках и определению вида функции.

Как показывает практика, эксперт с высокой долей вероятности может указать вид и значения функции принадлежности в начальный момент времени [2, с. 4], несколько важных для эксперта точек на рассматриваемом интервале (обычно это бифуркационные точки системы), а также точка в конечный момент времени, если и в конечном моменте возможны бифуркации. На основе указанных точек мы получаем массивы экспериментальных данных, описывающих степень принадлежности каждого исследуемого параметра заданному нечеткому множеству в разные моменты времени.

Для того чтобы заполнить «пробелы» (рис. 9) необходимо интерполировать имеющиеся данные и построить на их основе экстраполирующие зависимости для оценки степени принадлежности в другие моменты времени. Другими словами, мы прогнозируем значения принадлежности динамическому нечеткому множеству на условный момент времени $\boldsymbol{t \in T}$, $\boldsymbol{A(t)=A\{x_n,x_i,x_e\}}$, где $\boldsymbol{x_n}$ – множество достоверно известных точек, $\boldsymbol{z_i}$ – точки, полученные в результате интерполяции, $\boldsymbol{z_e}$ – экстраполируемые состояния, а $\boldsymbol{T}$ есть множество моментов времени существования исследуемой системы [6, с. 464].

Множество реперных точек можно получить либо путем накопления информации о состоянии отдельных элементов системы в момент времени $\boldsymbol{t}$ с последующей их интеграцией, либо путем привлечения экспертных оценок. Если изменение данной метрической величины соответствует какой-либо закономерности, то для количественной оценки вполне можно подобрать функциональное представление этой закономерности и получить изменение вектора степени принадлежности во времени [7, с. 343].

Показатель	F_1	F_2	F_3	…	F_n
t_0	x_0	x_0	x_0	x_0	x_0
	x_1	?	x_1	?	x_1
	…	…	…	…	…
	x_n	x_n	?	x_n	?
t_1	?	x_0	?	x_0	x_0
	x_1	?	x_1	?	x_1
	…	…	…	…	…
	x_n	x_n	x_n	x_n	x_n
t_n	x_0	x_0	x_0	x_0	x_0
	x_1	x_1	?	?	?
	…	…	…	…	…
	x_n	x_n	x_n	x_n	x_n

Рис. 9. Массив экспериментальных данных, где x_n – числовая величина, определяющая степень принадлежности конкретного значения критерия F_n заданному нечеткому множеству

Таким образом, в данный определенный момент времени рассчитывается степень принадлежности искомого критерия множеству и определяется лучшая альтернатива. Аппроксимируя точки в полученном массиве данных можно спрогнозировать функциональное представление динамики принадлежности. В результате получим несколько функций принадлежности в разные моменты времени и совместить их в трехмерном пространстве (рис. 1, 2, 3), что и будет являться фазовым пространством решения конкретной задачи.

Процедуру построения динамической функции принадлежности можно упростить, если воспользоваться двумерной интерполяцией, которая приводит к построению поверхности, проходящей через массив точек, описывающий сетку на координатной плоскости.

Поверхность создается участками двумерных кубических сплайнов, являющихся функциями и имеющих непрерывные первые и вторые производные по обеим координатам. Для поиска конкретного значения функции принадлежности для выбранного критерия в искомый момент времени, необходимо опустить проецирующие лучи (перпендикуляры) из указанной точки до пересечения с плоскостями проекций μ, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{t}$. Положение точки в евклидовом пространстве будет определяться с помощью трех чисел, выражающих расстояние от этой точки до координатных плоскостей проекций.

В результате проведенных вычислительных операций экспертом может быть выделена одна альтернатива, доминирующая однозначно на всем горизонте анализа, либо небольшое число альтернатив, получивших наивысшие оценки по критериям в различные моменты времени. Информацию о наилучших альтернативных вариантах целесообразно представить в виде ряда, на основе которого эксперт сможет указать некоторую тенденцию доминирования альтернатив на протяжении определенного промежутка времени. Путем экстраполяции рядов экспертом может быть определен прогноз относительно наилучшей альтернативы на заданную перспективу.

Терелянский Павел Васильевич

Костикова Анастасия Владимировна

Литература

1. Костикова А.В. Динамика нечетких чисел в принятии решений [Текст] / П.В. Терелянский, А.В. Костикова // Aktualne problem nowoczesnych nauk – 2012 : mater. VIII miedzynar. nauk.-prakt. konf., 07-15 czerwca 2012 r. T. 7. Ekonomiczne nauki. – Przemysl, 2012. – С. 22-25.
2. Костикова А.В. Динамические функции принадлежности первого, второго, третьего и четвертого типов [Текст] / П.В. Терелянский, А.В. Костикова // Aktualne problem nowoczesnych nauk – 2012 : mater. VIII miedzynar. nauk.-prakt. konf., 07-15 czerwca 2012 r. T. 42. Matematyka. – Przemysl, 2012. – С. 51-55.
3. Костикова А.В. Операции над динамическими нечеткими множествами [Текст] / П.В. Терелянский, А.В. Костикова // Aktualne problem nowoczesnych nauk – 2012 : mater. VIII miedzynar. nauk.-prakt. konf., 07-15 czerwca 2012 r. T. 42. Matematyka. – Przemysl, 2012. – С. 55-60.
4. Непараметрическая экспертиза объектов сложной структур [Текст] : монография / П.В. Терелянский. – М. : Дашков и К°, 2009. – 221 с.
5. Терелянский П.В. Математические и инструментальные средства поддержки принятия решений в экономике [Текст] / П.В. Терелянский // Аудит и финансовый анализ. – 2008. – №6. – С. 461-471.
6. Терелянский П.В. Компьютерная система принятия решений с прогнозированием динамики предпочтений [Текст] / П.В. Терелянский // Междунар. конф. по проблемам управления : Москва, 29 июня-2 июля 1999 г. : тез. докл. – М., 1999. – Т. 2. – С. 342-344.
7. Zadeh L.A. Fuzzy sets / L.A. Zadeh // Information and control. 1965. №8. Pp. 338-353.

Ключевые слова

Теория нечетких множеств; принятие решений; динамическая система; динамическая функция принадлежности; экспертные оценки.

РЕЦЕНЗИЯ

Проблема разработки инструментария нечетких множеств для описания динамических характеристик объектов весьма актуальна для лиц, анализирующих поведение сложных систем. Дело в том, что существующие методы теории нечетких множеств не учитывают влияние фактора времени в процессе принятия решений. К сожалению, подобный подход ограничивает описание динамических объектов и не всегда может гарантировать достоверность получаемых результатов в процессе принятия решений на определенный момент времени.

Разрабатываемый автором математический аппарат позволяет описывать эволюционирующие системы с помощью динамических нечетких множеств. Ключевым моментом используемой автором методологии выступает изменение уровней принадлежности заданным оценочным категориям, а также непостоянство элементов нечетких множеств в различные моменты времени. Автор предлагает строить наглядные графические модели в трехмерной системе координат, где одна из осей отображает изменение во времени свойств объектов сложных систем, выраженных с помощью набора чисел с нечеткой функцией принадлежности. Достаточно подробно автором описаны типы динамических функций принадлежности и представлены операции над динамическими нечеткими множествами. Весьма интересным представляются рассуждения автора относительно прогнозирования наилучшей альтернативы на заданную перспективу. Ограниченный объем статьи не позволил автору провести более подробное описание зависимости между точно известными и получаемыми на основе интерполяции значениями функций принадлежности. Возможно, это следовало бы сделать за счет уменьшения объема графических моделей, представленных по каждому аспекту разрабатываемого инструментария.

Важно отметить, что изложенные автором теоретические положения существенно расширяют возможности методов теории нечетких множеств и повышают эффективность принятия решений в динамических задачах в условиях неопределенности.

Считаю, что статья несет в себе элементы несомненной научной новизны, является актуальной и должна быть рекомендована к печати.

Сазонов С.П., д.э.н., профессор, зав. кафедрой «Экономика и финансы предприятий» Волгоградского государственного технического университета