

### 3.5. ОПТИМИЗАЦИЯ СМЕШАННОГО ДВУХУРОВНЕВОГО ДОГОВОРА ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ

Исхаков Ф.Р., аспирант. инженер-программист  
ООО НПФ «Экситон-автоматика»;  
Бронштейн Е.М., д.ф.м.н., профессор, Уфимский  
государственный авиационный университет

Определен и исследован смешанный двухуровневый договор перестрахования, определяется стратегия, лучшая для страховой компании, т.е. лучшая комбинация характеристик смешанного двухуровневого договора перестрахования. Оценка стратегий основана на вычислении комбинированного показателя, совмещающая различные критерии оценки и учитывающая предпочтения пользователя в виде весовых коэффициентов.

#### ВВЕДЕНИЕ

Перестрахование является необходимым условием обеспечения финансовой устойчивости страховых операций и нормальной деятельности любого страхового общества.

В большинстве случаев страховых общества не имеют возможности создать идеально сбалансированный портфель рисков, поскольку количество объектов страхования небольшое или в портфеле содержатся крупные и опасные риски, которые вносят в состав портфеля элементы диспропорции.

Кроме того, практика показывает, что любое страховое общество даже при тщательном отборе рисков при приеме их на страхование не может создать портфель полностью изолированных друг от друга объектов страхования, так как условиями страхования обычно покрываются различные опасности, которым застрахованные объекты могут подвергаться одновременно при наступлении катастроф: наводнений, ураганов, землетрясений, опустошительных пожаров и т.д. [9, с. 184]. Возникает потребность в страховании своих активов в других страховых компаниях с целью создания сбалансированного портфеля договоров страхования, обеспечения финансовой устойчивости и рентабельности страховых операций. Соответственно страховой компании необходимо заключать договор перестрахования.

В настоящее время разработано множество видов перестрахования и перед компаниями возникают вопросы, какой вид договора перестрахования предпочтительнее и какую часть обязательств передать перестраховочной компании.

В данной работе рассматривается комбинированный двухуровневый договор перестрахования, включающий в себя элементы эксцедентного и кватного видов перестрахования. Задача перестрахования заключается в оптимизации параметров этого договора по ряду критериев. В зависимости от финансового положения, особенностей страхового рынка и индивидуальных предпочтений лиц, принимающих решения, более привлекательным выглядит тот или иной критерий оценки. В связи с этим была введена целевая функция, объединяющая различные критерии оценки и учитывающая предпочтения пользователя в виде весовых коэффициентов.

Работа основана на имитационном моделировании капитала страховщика через определенный временной горизонт (в настоящей работе год). При этом учитываются доход компании от инвестиционной деятельности, страховые выплаты, поступления премий, расходы на ведение деятельности, налоговые отчисления за предшествующий период.

Цель данной работы – определение таких значений характеристик смешанного двухуровневого договора перестрахования, при которых целевая функция (далее комбинированный показатель) принимает наименьшее значение.

#### Методика принятий решений

Страховой компании необходимо выбрать из множества возможных договоров перестрахования (стратегий) наиболее эффективный. Для решения данной задачи был использован метод анализа иерархий. Проблема выбора отражена в виде иерархии, содержащей три уровня: цель, критерии и альтернативы (рис. 1). Под альтернативами понимаются различные договоры перестрахования. В качестве критериев выбраны меры риска  $VaR^\alpha$  и  $CVaR^\alpha$  случайной величины – убытка страховщика:

$\Delta U^\alpha = U_0 - U_1^\alpha$ ,

$$\Delta U^\alpha = U_0 - U_1^\alpha,$$

где

$U_0, U_1^\alpha$  – соответственно начальный и конечный (при использовании стратегии  $\alpha$ ) капитал инвестора, вероятность разорения  $P^\alpha$ , математическое ожидание прибыли  $M^\alpha$ .

$VaR^\alpha$  – величина ущерба, которая с вероятностью, равной уровню доверия  $\phi = 0,95$ , не будет превышена:

$$VaR_\phi^\alpha [\Delta U^\alpha] = \inf \{ \xi \mid P(\Delta U^\alpha \leq \xi) \geq \phi \}.$$

$CVaR^\alpha$  – математическое ожидание убытка компании при условии, что его величина больше  $VaR^\alpha$ :

$$CVaR_\phi^\alpha [\Delta U^\alpha] = E[\Delta U^\alpha \mid \Delta U^\alpha \geq VaR(\Delta U^\alpha)].$$

$M^\alpha$  – математическое ожидание прибыли страховой компании:

$$M^\alpha = E[U_1^\alpha - U_0].$$

$P^\alpha$  – вероятность разорения страховой компании:

$$P^\alpha = P[U_1^\alpha < 0].$$

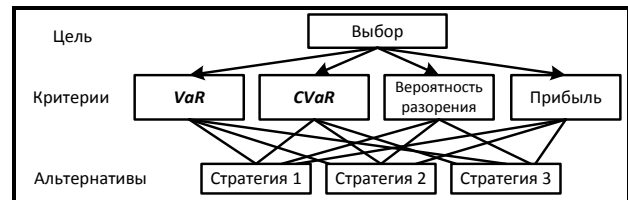


Рис.1. Структура задачи выбора решения

Оценка договоров (стратегий)  $\Theta^\alpha$  основана на вычислении комбинированного показателя для каждой из рассматриваемых стратегий. Договор перестрахования является более предпочтительным при уменьшении мер риска  $VaR^\alpha$ ,  $CVaR^\alpha$ , вероятности разорения  $P^\alpha$  и увеличении математического ожидания прибыли  $M^\alpha$ , следовательно, при вычислении комбинированного показателя значения математического ожидания необходимо умножить на  $(-1)$ . Комбинированный показатель будем искать в виде выпуклой комбинации [4, с. 92].

$$\Theta^\alpha = \sum_{i=1}^4 \omega_i * \lambda_i^\alpha, \quad (1)$$

где

$\lambda_i^\alpha$  – нормированное значение  $i$ -го критерия;

$\omega_i$  – весовые коэффициенты;

$\alpha$  – стратегия (вид договора перестрахования).

Предпочтительна стратегия с минимальным значением  $\Theta^\alpha$ .

Величины весовых коэффициентов  $\omega_i$  определяется пользователем: чем предпочтительней критерий, тем больше значение коэффициента. Весовые коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} 0 \leq \omega_i \leq 1; \\ \sum_{i=1}^n \omega_i = 1. \end{cases}$$

Случайные величины: мера риска  $VaR^\alpha$ ,  $CVaR^\alpha$ ,  $P^\alpha$ ,  $M^\alpha$  имеют разную размерность, т.е. их значения несопоставимы. Поэтому при формировании комбинированного показателя целесообразно вместо каждой из

случайных величин  $X_i^\alpha$  ( $i = 1, 2, 4$  – кроме  $P^\alpha$ ) рассматривать величины, нормированные следующим образом. Считаем, что значения  $X_i^\alpha$  являются случайными величинами, зависящими от стратегии  $\alpha$  [5, с. 75].

$$\lambda_i^\alpha = \frac{X_i^\alpha - \overline{X_i^\alpha}}{\sigma_i},$$

где

$\overline{X_i^\alpha}$  — математическое ожидание  $X_i^\alpha$ ,

$\sigma_i$  — среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X_i^\alpha$ .

### Договор перестрахования

В договоре перестрахования прописывается доля участия перестраховщика, лимиты ответственности. С точки зрения страховой компании договор перестрахования представляет собой функцию, где размер иска является независимой переменной  $y$ , сумма компенсации страховой компанией – зависимой переменной  $F_\psi(y)$ . Графики перестраховочных функций продемонстрированы на рис. 2. Мы рассматриваем функцию, которая зависит от четырех параметров и является сочетанием эксцедентного и квотного видов перестрахования [2, с. 300], причем рассмотрены две квотные области (двухуровневая модель).

$$F_\psi(y) = \begin{cases} y, & y \leq d'; \\ d' + a'(y - d'), & d' < y \leq d''; \\ d' + a'(d'' - d') + a''(y - d''), & y > d''. \end{cases} \quad (2)$$

Функция перестрахования для перестраховочной компании выглядит следующим образом:

$$F_r(y) = \begin{cases} 0, & y \leq d'; \\ (1 - a')(y - d'), & d' < y \leq d''; \\ (1 - a')(d'' - d') + (1 - a'')(y - d''), & y > d''. \end{cases}$$

Здесь  $a', a'' < 1$ , стратегия задается параметрами  $a', a'', d', d''$ . Разумеется,  $F_\psi(y) + F_r(y) = y$ .

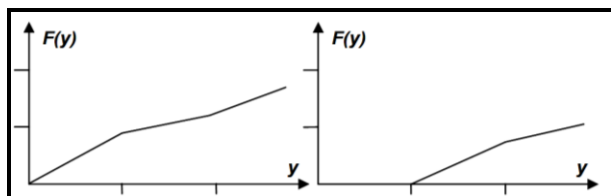


Рис. 2. Графики функций перестрахования для страховой компании (слева) и для перестраховочной компании (справа)

### Формирование капитала страховой компании

$U_t$  – капитал страховой компании в конечный момент времени вычисляется следующим образом:

$$U_t = U_0 + Pr + I - L - E - R - T,$$

где  $U_0$  – начальный капитал компании;

$Pr$  – премии;

$I$  – доход компании от инвестиционной деятельности;

$L$  – страховые выплаты с учетом перестрахования;

$E$  – расходы;

$R$  – сумма премий, выплачиваемая перестраховщику;

$T$  – налоги.

### Экономический блок модели

#### Краткосрочные процентные ставки

При анализе учитывается динамика банковской процентной ставки. В работе использовалась модель Кокса-Ингерсолла-Росса [1, с. 14] для номинальной спот-ставки, поскольку она исключает получение отрицательных номинальных значений:

$$r = r_0 + a(b - r_0) + s r_0, 5 Z, \quad (3)$$

где

$r$  – мгновенное значение краткосрочной процентной ставки в конце периода;

$Z$  – случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение;

$b$  – долгосрочное среднее значение процентной ставки;

$a$  – константа, определяющая скорость приближения процентной ставки к своей долгосрочной средней величине  $b$ ;

$s$  – волатильность процентной ставки.

Отталкиваясь от модели мгновенной спот-ставки, определяем временную кривую спот-ставок [1, с. 15]:

$$R_T = T^{-1}(r_t B_T - \ln A_T)$$

$T$  – время до погашения облигации, а остальные параметры определяются по формулам [1, с. 15]:

$$A_T = \left( \frac{2G e^{(a+G)T/2}}{(a+G)(e^{GT} - 1) + 2G} \right)^{2ab/s^2};$$

$$B_T = \frac{2(e^{GT} - 1)}{(a+G)(e^{GT} - 1) + 2G};$$

$$G = \sqrt{a^2 + 2s^2},$$

где  $a, b, s$  – параметры уравнения (3).

#### Общэкономическая инфляция

Моделирование величины убытков требует учета инфляции. Для моделирования инфляционного процесса в работе использовалась равновесная модель Орнштейна-Уленбека [1, с. 16] как одна из наиболее распространенных моделей инфляции при динамическом финансовом анализе:

$$i_t = i_0 + a_i(b_i - i_0) + s_i Z,$$

где  $a_i$  – параметр, который определяет скорость приближения инфляции к долгосрочному математическому ожиданию;

$b_i, s_i$  – стандартное отклонение уровня инфляции;

$Z$  – случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение.

#### Доходы от акций

Модель доходности акций реализована на основе имитации временного ряда. Предполагается, что доходность акций является случайной величиной  $S$  и подчиняется определенному закону распределения. Основываясь на исторических данных, построена гистограмма распределения случайной величины, вычислен приблизительный закон распределения случайной величины  $S$ . Затем на этой основе сгенерированы прогнозные значения доходности акций.

### Операционный блок модели

#### Выплаты

Основными факторами случайности суммарной величины выплат являются число выплат и величины

выплат. Так как оба фактора число выплат и размер выплат являются случайными величинами, было применено имитационное моделирование двух дискретных случайных величин.

Число выплат за период  $N$  – дискретная случайная величина. На основе данных о числе выплат за прошедшие периоды определена статистическая оценка закона распределения  $F_n$  и построена гистограмма распределения случайной величины. По полученному закону распределения рассчитаны прогнозные значения числа выплат.

Размер  $Y$  выплат по иску – дискретная случайная величина. Аналогичным образом построена гистограмма распределения случайной величины, вычислена статистическая оценка закона распределения случайной величины, и рассчитаны прогнозные значения случайной величины  $Y$ . Размер выплат определяется договором перестрахования, по формуле (2).

Суммарная величина выплат на конец периода без учета перестрахования  $L'$  вычисляется по следующей формуле:

$$L' = \sum_{i=1}^N y_i.$$

Суммарная величина выплат на конец периода с учетом перестрахования вычисляется по следующей формуле:

$$L = \sum_{i=1}^N F_{\psi}(y_i).$$

### Премии

Основным источником формирования финансов страховой компании являются страховые премии. Они рассчитываются как произведение математического ожидания суммы будущих выплат на страховую надбавку, т.е.

$$Pr = (1+\theta) E(L'),$$

где  $\theta$  – страховая надбавка (бета-премия) страховой компании;

$E(L')$  – математическое ожидание суммарной выплаты без учета перестрахования.

### Премии за перестрахование

Сумма премий, выплачиваемая перестраховочной компании, рассчитана на основе средних суммарных выплат страховой компании.

$$R = (1+\theta') (E(L') - E(L)),$$

где  $\theta'$  – страховая надбавка перестраховочной компании;

$E(L')$  – математическое ожидание суммарной выплаты без учета перестрахования;

$E(L)$  – математическое ожидание суммарной выплаты с учетом перестрахования.

Расходы.

Расходы на ведение дел были приняты доле  $a_e$  расходов от объема премий [1, с. 19]:

$$E = a_e Pr.$$

### Налоги

Размер налоговых отчислений рассчитывается при предположении о неизменности ставки налога на прибыль. Налоговые отчисления определяются как произведение полученной прибыли на ставку налогообложения  $\tau$ .

$$T = \begin{cases} \tau(Pr + I - L - E - R), & Pr + I - L - E - R > 0; \\ 0, & Pr + I - L - E - R \leq 0. \end{cases}$$

### Инвестиционный блок модели

Инвестиционный блок в представленной модели в основном использует выходные данные экономического блока модели. Моделируемая страховая компания имеет возможность инвестировать в три инструмента: денежные средства, которые не приносят дохода, государственные облигации и акции – распределяя свободные средства между ними.

Доход от инвестиционной деятельности рассчитывается по следующей формуле:

$$I = \gamma U_a(\beta R_T + (1 - \beta) S),$$

где

$\gamma$  – доля средств, вложенных в инвестиции;

$\beta$  – доля инвестиционных средств, вложенных в облигации;

$(1 - \beta)$  – доля инвестиционных средств, вложенных в акции;

$R_T$  – доходность облигаций;

$S$  – доходность акций.

### Блок интеграции операционной и инвестиционной деятельности

Для математической модели функционирования страховой компании без учета перестрахования, описывающей ее основные финансовые потоки и риски, проводится 10 000 испытаний по методу Монте-Карло. Выходными данными данной операции являются 10 000 прогнозных значений убытка, на основании которых вычисляется дисперсия размера убытка страховой компании  $\sigma^2$ . Аналогичным образом определяются  $K$  прогнозных значений убытка для каждой стратегии страховой компании. Количество испытаний  $K$  определяется формулой [6]:

$$K = \frac{\sigma^2 t_{1-\frac{a}{2}}^2}{\varepsilon^2},$$

где

$K$  – оценка числа итераций;

$a$  – уровень достоверности;

$t_{1-\frac{a}{2}}$  – квантиль нормального распределения уровня  $1-\frac{a}{2}$ ;

$\varepsilon$  – точность оценки вычислений;

$\sigma^2$  – дисперсия размера убытка страховой компании за период.

Испытание включает в себя разыгрывание следующих величин:

- инфляция;
- доходность от вложения в акции;
- доходность от вложения в облигации;
- число выплат;
- размер выплат.

Исходя из полученных значений, вычисляется прогнозное значение величины капитала. Так как проводится  $K$  испытаний, то соответственно получится  $K$  значений величин убытка страховой компании. По имеющимся данным убытков рассчитываются показатели оценки стратегий:

- меры риска  $VaR^{\alpha}$  и  $CVaR^{\alpha}$  с определенным уровнем достоверности;
- вероятность разорения  $P^{\alpha}$ ;
- математическое ожидание прибыли  $M^{\alpha}$ .

### Результаты вычислений

Математическая модель реализована в программном продукте, с помощью которого симулировано функционирование страховой компании и определена наиболее

предпочтительная стратегия. Рассмотрим исходные данные и полученные результаты.

Входные данные.

- Доходность акции Открытого акционерного общества (ОАО) «ЛУКОЙЛ». Котировки акций для анализа взяты с официального сайта компании [3] за период с января 2002 г. по декабрь 2009 г.
- Уровень процентной ставки. Статистические данные уровня процентной ставки (доходность государственных краткосрочных обязательств, ГКО) получены с официального сайта Центрального банка РФ [8] за период с января 2001 г. по декабрь 2009 г.
- Уровень инфляции. Статистические данные индекса потребительских цен получены с официального сайта Федеральной службы государственной статистики [7] за период с января 2001 г. по декабрь 2009 г.
- Частота выплат и размер выплат. Необходимые исторические данные были предоставлены филиалом страховой компании «Росгосстрах».

Параметры модели:

- налоговая ставка на прибыль ( $\tau = 20\%$ );
- доля расходов от объема премий ( $a_e = 20\%$ );
- количество рабочих дней в полугодии (95 дней);
- начальный капитал ( $U_0 = 1000000$ );
- страховая надбавка ( $\theta = 20\%$ );
- страховая надбавка перестраховочной компании ( $\theta' = 20\%$ );
- доля инвестированного капитала ( $\gamma = 100\%$ );
- доля облигации в инвестиционном портфеле ( $\beta = 50\%$ );
- уровень достоверности ( $\alpha = 0,95$ );
- точность оценки вычислений ( $\epsilon = 0,01$ ).

Параметры стратегии.

Таблица 1

**ХАРАКТЕРИСТИКИ ДОГОВОРА ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ**

Переменная	Начальное значение	Конечное значение	Шаг
$d'$	0	16 000	2 000
$d''$	16 000	34 000	2 000
$a'$	0	1	0,2
$a''$	0	1	0,2

**Проверка моделей на адекватность**

Таблица 2

**РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ КОМБИНИРОВАННОГО ПОКАЗАТЕЛЯ (КП)**

№	Весовые коэффициенты				Характеристики договора перестрахования				КП
	VaR	CVaR	BP	Pr	$\alpha'$	$\alpha''$	$d'$	$d''$	
1	25	25	25	25	0,6	0	16 000	26 000	-0,6
2	0	33	33	33	1	0	0	30 000	-0,4
3	33	0	33	33	1	0	6 000	34 000	-0,47
4	33	33	0	33	0,6	0	16 000	26 000	-0,8
5	33	33	33	0	0,2	0	10 000	30 000	-0,89
6	40	20	20	20	0,6	0	16 000	26 000	-0,74
7	20	40	20	20	0,4	0	16 000	24 000	-0,72
8	20	20	40	20	0,6	0	16 000	26 000	-0,48
9	20	20	20	40	1	0	6 000	34 000	-0,52
10	70	10	10	10	0,4	0	14 000	24 000	-1,04
11	10	70	10	10	0	0	12 000	22 000	-1,04
12	10	10	70	10	0,6	0	16 000	26 000	-0,24
13	10	10	10	70	1	1	2 000	30 000	-0,72
14	100	0	0	0	0,4	0	14 000	24 000	-1,34
15	0	100	0	0	0	0	8 000	32000	-1,45
15	0	0	100	0	0	0	0	16 000	0
16	0	0	0	100	1	1	4 000	16 000	-1,46

Остатки – это разность между исходными (наблюдаемыми) значениями зависимой переменной и предсказанными значениями. Исследуя остатки, мы можем оценить степень адекватности модели. Необходимо проверить остатки на состоятельность, эффективность и несмещенность. В пакете Statistica проведена проверка остатков моделей Орнштейна-Уленбека и Кокса-Ингерсолла-Росса на соответствие «белому шуму» с помощью коррелограмм АКФ и ЧАКФ. Остатки удовлетворяют требованиям состоятельности, эффективности и несмещенности, соответственно модели адекватны.

Результаты вычислений для страховой компании.

Была проведена серия расчетов комбинированного показателя при различных комбинациях весовых коэффициентов. В табл. 2 представлены результаты расчетов.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе определен комбинированный договор перестрахования, экспериментально исследована эффективность его применения для страховой компании при учете ряда как эндогенных, так и экзогенных факторов. Установлено, что в большинстве случаев применение комбинированного договора эффективнее пропорционального и эксцедентного.

**Литература**

1. Борисов Б.И. Динамический метод анализа и управления деятельностью страховой компании [Текст] : автореф. дисс. / Б.И. Борисов. – М., 2007. – 24 с.
2. Гвозденко А.А. Страхование [Текст] : учеб. пособие / А.А. Гвозденко. – М. : Проспект, 2006. – 464 с.
3. ЛУКОЙЛ [Электронный ресурс] : официальный сайт компании. Режим доступа: <http://www.lukoil.ru/>
4. Ногин В.Д. Принятие решений при многих критериях [Текст] : учеб.-метод. пособие / В.Д. Ногин. – СПб. : ЮТАС, 2007. – 104 с.
5. Орлов А.И. Математика случая. Вероятность и статистика – основные факты [Текст] : учеб. пособие / А.И. Орлов. – М. : МЗ-Пресс, 2004. – 110 с.
6. Ходасевич Г.Б. Обработка экспериментальных данных на ЭВМ [Текст] : учеб. пособие / Г.Б. Ходасевич. Ч. 1. – СПб. : СПбГУТ им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, 2002. – 82 с.
7. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://gks.ru/>
8. Центральный банк РФ [Электронный ресурс] : официальный сайт. Режим доступа: <http://www.cbr.ru/>
9. Шахов В.В. Страхование [Текст] : учеб. для вузов / В.В. Шахов. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 311 с.

**Ключевые слова**

Смешанный двухуровневый договор перестрахования; комбинированный показатель; весовой коэффициент; перестрахование; мера риска;  $VaR$ ;  $CvaR$ ; вероятность разорения; метод Монте-Карло; модель Кокса-Ингерсолла-Росса; модель Орнштейна-Уленбека.

*Исхаков Фан Радисович;  
Бронштейн Ефим Михайлович*

**РЕЦЕНЗИЯ**

Актуальность темы. Развитие страхового бизнеса является важным показателем экономического развития. Система перераспределения рисков между страховыми компаниями, в частности, перестраховочные операции, играют важную роль в обеспечении устойчивости страховой системы в целом. В этой связи развитие новых подходов к формированию договоров перестрахования представляется чрезвычайно актуальным.

Научная новизна и практическая значимость. В работе предложены комбинированные стратегии организации процесса перестрахования, в этом состоит научная новизна. Разработан программный продукт, который позволяет формировать договор перестрахования с учетом предпочтений страховщика по историческим данным.

Заключение. Считаю, что статья представляет интерес как для теории, так и для практики, удовлетворяет требованиям к научным публикациям. Рекомендую представленную работу к публикации в журнале «Аудит и финансовый анализ».

*Амирханова Л.Р., д.э.н., профессор кафедры менеджмента и маркетинга ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»*