

3.12. ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРИИ МОДИЛЬЯНИ-МИЛЛЕРА ДЛЯ ДВУХСКОРОСТНОЙ МОДЕЛИ РОСТА КОМПАНИИ

Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор, академик РАЕН, профессор кафедры математики и информатики

Тверская сельскохозяйственная академия

Рассматривается теория Модильяни-Миллера о стоимости собственного капитала леввериджной компании [1-3] для двухскоростной модели роста ее доходов. Предполагается, что денежный поток на инвестируемый капитал компании растет с постоянным, но неравным темпом внутри и вне прогнозного периода.

Эта модель обобщает результаты теории Модильяни-Миллера для конечного прогнозного периода, полученные в [1-3] в части учета возможного роста денежного потока на инвестируемый капитал и ненулевой постпрогнозной стоимости компании. И в определенном смысле минимальна, поскольку модель постоянного роста была бы перпетуитетной и мало чем отличалась бы от классической теории Модильяни-Миллера [1-3].

Вот основные идеи, заложенные в нашей новой работе. Она предназначена для аспирантов и докторантов, специализирующихся в области теории Модильяни-Миллера и Марковица-Шарпа, а также для действующих профессиональных оценщиков инвестиций и бизнеса.

1. Классическая теория Модильяни-Миллера

При наличии корпоративных налогов теория Модильяни-Миллера дает следующие результаты [2] (мы приводим их исключительно с целью разъяснения сути аналога теории Модильяни-Миллера для конечного прогнозного периода, предложенного в [2]). Мы воспользуемся более привычными для нас обозначениями, введенными в работе [4].

Для вывода зависимости стоимости средневзвешенной ставки $j = WACC$ на инвестированный капитал Y и стоимости i собственного капитала от леввериджа L , т.е. отношения заемного капитала Z компании к собственному капиталу X используем следующую цепочку равенств [2]:

$$\begin{aligned} Y_L &= Y_0 + Zc; Z = w_d Y_L; \\ Y_L &= q / j; Y_L = q / i_0 + Zc = q / i_0 + w_d c q / j; \quad (1) \\ \frac{1 - w_d c}{j} &= \frac{1}{i_0}; j = i_0 (1 - \frac{L}{1 + L} c), \end{aligned}$$

где

c – ставка корпоративного налога на прибыль;

$w_d = L / (1 + L)$ – доля заемного капитала Z в инвестированном капитале $Y = X + Z$ компании;

$q = CF$ – денежный поток на инвестированный капитал без учета эффекта налогового щита, т.е. прибыль до налогообложения и уплаты процентов скорректированная на ставку корпоративного налога, плюс амортизация, минус капвложения и изменение чистого оборотного капитала [4].

Индексы $L, 0$ в формулах (1) означают, что соответствующая величина относится к леввериджной или безлеввереджной компании.

Откуда и находится стоимость собственного капитала i леввериджной компании [2]:

$$\begin{aligned} j &= i_0 (1 - w_d c) = w_e i + w_d g (1 - c); \\ i &= \frac{j - w_d g (1 - c)}{w_e} = \\ &= \frac{i_0 (1 - w_d c) - L / (1 + L) g (1 - c)}{1 / (1 + L)} = \\ &= i_0 + L (i_0 - g) (1 - c), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$w_e = 1 / (1 + L) = 1 - w_d$ – доля собственного капитала

X в инвестированном капитале $Y = X + Z$ компании; g – стоимость заемного капитала компании.

2. Эквивалентное уравнение теории Модильяни-Миллера

Уравнение:

$$\frac{q}{j} = Y_L = \frac{q}{i_0} + cZ, \quad (3)$$

допускает эквивалентную форму:

$$Y_L = \frac{q + cgZ}{j'} = \frac{q}{i_0} + \frac{cgZ}{g} = \frac{q}{i_0} + cZ, \quad (4)$$

где

$$j' = w_e i + w_d g.$$

В самом деле, денежный поток на инвестированный капитал леввериджной компании с учетом эффекта налогового щита будет равен не q , а $q + cgZ$. В частности при $i_0 \geq g$, что представляется естественным, из (3) следует, что искомая величина j' средневзвешенной стоимости инвестированного капитала должна находиться в пределах:

$$i_0 \geq j' \geq g, \quad (5)$$

что и должно выполняться независимо от величины L , поскольку j' по определению есть среднее с весами от i_0 и g . В отличие от (3) из которого следует только односторонне неравенство: $i_0 \geq j$.

Из левого равенства (4) с учетом $Z = w_d Y_L$ следует цепочка равенств:

$$\begin{aligned} j' Y_L &= q + cg w_d Y_L; \\ Y_L (j' - c g w_d) &= q; Y_L = \frac{q}{j' - c g w_d}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из правого равенства (4) с учетом $Z = w_d Y_L$ следует цепочка равенств:

$$\begin{aligned} Y_L &= \frac{q}{i_0} + c w_d Y_L; \\ Y_L (1 - c w_d) &= \frac{q}{i_0}, \end{aligned} \quad (7)$$

что вместе с (6) дает:

$$\frac{q (1 - c w_d)}{j' - c g w_d} = \frac{q}{i_0}. \quad (8)$$

Откуда, сокращая обе части на q получим искомую формулу для средневзвешенной стоимости инвестированного капитала леввериджной компании:

$$j' = i_0 (1 - c w_d) + c g w_d. \quad (9)$$

Эта формула эквивалентна первой формуле в (2).

Действительно:

$$\begin{aligned} j &= iw_e + (1-c)gw_d = \\ &= iw_e + gw_d - cgw_d = \\ &= j' - cgw_d = i_o(1-cw_d). \end{aligned} \quad (10)$$

В частности, из (5) имеем:

$$i_o \geq i_o - cgw_d \geq j \geq g(1-cw_d) \geq g(1-c) = g'. \quad (11)$$

Заметим, что доказанное неравенство

$$i_o \geq j \geq (1-c)g = g'$$

следует непосредственно из определения средне-взвешенной стоимости, но поскольку в теории Модильяни-Миллера сначала находится ее величина, а затем уже стоимость собственного капитала компании, то оно должно доказываться. Если пастулировать его по определению, то возникает вопрос о существовании решения основного уравнения теории Модильяни-Миллера находящегося в соответствующих пределах. Конечно, можно искать это решение в заданных пределах, а если оно не существует, то считать, что мы вышли за пределы ограничений, в пределах которых полученные результаты сохраняют экономический смысл, поскольку цена собственного капитала компании оказалась бы в этом случае отрицательной.

3. Аналог теории Модильяни-Миллера для конечного периода

Приведем аналог теории Модильяни-Миллера для конечного прогнозного периода, следуя [2] с целью анализа ее корректности. Отметим сразу же, что авторы предполагают нулевой постпрогнозную стоимость компании, тем самым заранее ограничивая себя другим крайним случаем по отношению к перпетуитетной компании, рассмотренной в классической теории Модильяни-Миллера. Поэтому их формулы дают лишь оценку снизу для стоимости леввериджной компании.

Величину налогового щита авторы [2] ищут по формуле:

$$\begin{aligned} cS &= \sum_{k=1}^n \frac{gZc}{(1+g)^k} = \\ &= \frac{gZc}{1+g} * \frac{1-(1+g)^{-n}}{1-(1+g)^{-1}} = cZ[1-(1+g)^{-n}]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь S – текущая стоимость остатков по долгу по ставке g .

Для вывода зависимости стоимости средневзвешенной ставки $j = WACC$ на инвестированный капитал используется следующая цепочка равенств, аналогичная (1) [2]:

$$\begin{aligned} Y_L &= Y_o + Sc; Z = w_d Y_L; \\ Y_L &= q[1-(1+j)^{-n}] / j; \\ Y_L &= q[1-(1+i_o)^{-n}] / i_o + cZ[1-(1+g)^{-n}] = \\ &= q[1-(1+i_o)^{-n}] / i_o + cw_d Y_L [1-(1+g)^{-n}] \quad (13) \\ Y_L(1-cw_d[1-(1+g)^{-n}]) &= q[1-(1+i_o)^{-n}] / i_o; \\ \frac{1-(1+j)^{-n}}{j} * (1-cw_d[1-(1+g)^{-n}]) &= \\ &= \frac{1-(1+i_o)^{-n}}{i_o}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение относительно неизвестной средневзвешенной ставки j предлагается решать численно, пользуясь монотонностью левой части по j .

После этого по определению j и находится стоимость собственного капитала i леввериджной компании [2]:

$$\begin{aligned} j &= w_e i + w_d g(1-c); \\ i &= \frac{j - w_d g(1-c)}{w_e} = \frac{j - L/(1+L)g(1-c)}{1/(1+L)} = \\ &= j(1+L) - Lg(1-c). \end{aligned} \quad (14)$$

Конечной формулы (2) в этом случае не получается в силу нелинейной зависимости последнего уравнения (13) от j, i_o, g .

Отметим, что расчет текущей стоимости налогового щита в (12) не вполне корректен, поскольку предполагает постоянство не только доли заемного капитала в инвестированном, но и абсолютное постоянство заемного капитала, что невозможно, поскольку стоимость инвестированного капитала в модели с нулевой остаточной стоимостью, принятой в [1, 2, 5], убывает до нуля. В связи с этим в предыдущей работе на эту тему нами был приведен корректный расчет текущей стоимости налогового щита, основанный на полученных нами формулах для стоимости инвестированного капитала компании. Остаток по долгу получается из них при заданной постоянной доле заемного капитала в инвестированном, что позволяет подсчитать проценты, которые и выводятся из-под корпоративного налога на прибыль.

Поэтому в настоящей работе сразу рассматривается его обобщение на случай двухскоростной модели роста, который включает предыдущий случай как частный.

4. Стоимость компании в двухскоростной модели роста

Вначале получим формулы для стоимости инвестированного капитала Y_k на конец k -го года, $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} Y_k &= \sum_{t=k+1}^n \frac{q(1+v)^t}{(1+j)^{t-k}} + \frac{Y_n}{(1+j)^n} = \\ &= q(1+v)^k \sum_{t=1}^{n-k} \left(\frac{1+v}{1+j} \right)^t + q \frac{(1+v)^n}{(1+j)^{n-k}} \cdot \frac{1+v_o}{j-v_o} = \\ &= q(1+v)^k \left[\frac{1+v}{j-v} \left(1 - \left(\frac{1+v}{1+j} \right)^{n-k} \right) + \frac{1+v_o}{j-v_o} \left(\frac{1+v}{1+j} \right)^{n-k} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь v, v_o – соответственно темп роста денежного потока на инвестированный капитал компании в прогнозный и постпрогнозный период.

Мы воспользовались здесь формулой Гордона для постпрогнозной стоимости инвестированного капитала компании [3, 5]:

$$Y_n = q(1+v)^n \frac{1+v_o}{j-v_o}.$$

В частности, при $k = 0$:

$$\begin{aligned} Y_o &= Y_o(j) = \\ &= q * \left[\frac{1+v}{j-v} \left(1 - \left(\frac{1+v}{1+j} \right)^n \right) + \frac{1+v_o}{j-v_o} \left(\frac{1+v}{1+j} \right)^n \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

При $k > n$ стоимость инвестированного капитала компании будет расти с постпрогнозным темпом:

$$Y_k = Y_n(1 + v_0)^{k-n} = q(1 + v)^n \frac{(1 + v_0)^{k-n+1}}{j - v_0}.$$

Остатки Z_k по долгу на конец k -го года при фиксированной структуре инвестированного капитала будут теперь по формуле:

$$Z_k = w_d Y_k. \quad (17)$$

5. Текущая стоимость налогового щита

Текущая стоимость налогового щита на конец n -го года может быть подсчитана следующим образом:

$$\begin{aligned} cS_n &= cgw_d \sum_{k=1}^n \frac{Y_{k-1}}{(1+g)^k} = Y_n \sum_{k=1}^n \frac{(1+v_0)^{k-1}}{(1+g)^k} = \\ &= cgw_d q(1+v)^n \frac{1+v_0}{j-v} * \frac{1}{1+g} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1+j}{1+g} \right)^k = \\ &= cgw_d q(1+v)^n \frac{1+v_0}{j-v_0} * \frac{1}{g-v_0}. \end{aligned} \quad (18)$$

Воспользовавшись теперь (18), как конечным условием для налогового щита, подсчитаем его величину на конец 0 -го:

$$\begin{aligned} cS_0 &= cS_0(j) = \\ &= cgw_d \sum_{k=1}^n \frac{Y_{k-1}}{(1+g)^k} + \frac{cS_n}{(1+g)^n} = cgw_d q * \\ &* \left\{ \frac{1+v}{j-v} \sum_{k=1}^n \frac{(1+v)^{k-1}}{(1+g)^k} - \left(\frac{1+v}{j-v} - \frac{1+v_0}{j-v_0} \right) * \right. \\ &* \left(\frac{1+v}{1+j} \right)^n \frac{1}{1+g} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1+j}{1+g} \right)^{k-1} + \\ &+ \left. \left(\frac{1+v}{1+g} \right)^n \frac{1+v_0}{j-v_0} * \frac{1}{g-v_0} \right\} = cgw_d q \left\{ \frac{1+v}{j-v} * \right. \\ &* \frac{1}{g-v} \left[1 - \left(\frac{1+v}{1+g} \right)^n \right] + \frac{(1+j)(v-v_0)}{(j-v)(j-v_0)} * \\ &* \frac{1}{j-g} * \left(\frac{1+v}{1+j} \right)^n \left[1 - \left(\frac{1+j}{1+g} \right)^n \right] + \\ &+ \left. \left(\frac{1+v}{1+g} \right)^n \frac{1+v_0}{j-v_0} * \frac{1}{g-v_0} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для вывода зависимости стоимости средневзвешенной ставки $j = WACC$ на инвестированный капитал теперь может быть использована следующая цепочка равенств, аналогичная (1):

$$\begin{aligned} Y_L &= Y_0 + cS_0; \\ Y_L &= Y_0(j); \\ Y_0 &= Y_0(i_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $Y_0(j)$ – функция заданная формулой (16);

$Y_0(i_0)$ – та же функция в которую вместо j подставлено значение i_0 ;

$cS_0 = cS_0(j)$ – текущая стоимость налогового щита, подсчитанная по формуле (19).

В силу неравенства (11) при $j = i_0$ левая часть уравнения (20) будет меньше правой, а при $j = g' = g(1-c) -$

больше правой, что позволяет решить это уравнение приближенно с любой точностью методом деления отрезка $[i_0, g']$ пополам.

6. Приближенное уравнение для средневзвешенной ставки

Из (20) получим:

$$Y_0(j) - Y_0(i_0) = cS_0(j). \quad (21)$$

Откуда следует приближенное уравнение:

$$Y_0'(i_0)(j - i_0) \approx cS_0'(i_0)(j - i_0) + cS_0(i_0). \quad (22)$$

Отсюда получим приближенную формулу для j :

$$j \approx i_0 + \frac{cS_0(i_0)}{Y_0'(i_0) - cS_0'(i_0)}. \quad (23)$$

Здесь

$Y_0'(i_0), S_0'(i_0)$ производные по j от функций $Y_0(j)$; $S_0(j)$ заданных формулами (16), (19) в которые вместо j подставлено значение i_0 .

Заметим, что функций $Y_0(j), S_0(j)$ и их производные линейно зависят от q и поэтому правая часть (23) от q не зависит. Далее функция $S_0(j)$ линейно зависит от $w_d = L/(1+L)$, а функция $Y_0(j)$ и ее производная явно не зависят от w_d , и значит от L . Это приведет к тому, что правая часть (23) будет дробно-линейной функцией от L , в отличие от линейной по L функции в правой части классической формулы Модильяни-Миллера (2).

Мы не станем здесь вычислять производные $Y_0'(i_0), S_0'(i_0)$ в явном виде, поскольку формула (23) нам нужна как основа для будущих обобщений, где уже нельзя получить явных формул для функций $Y_0(j), S_0(j)$. Однако для них и их производных можно написать рекуррентные уравнения типа уравнений в вариациях, что позволяет вычислить все их значения, входящие в (23) при заданном i_0 . Исходную стоимость капитала безлевериджной компании можно найти в рамках обобщенной модели CAPM [6] через бета-фактор аналогичной безлевериджной компании β_0 [5]:

$$i_0 = i_f + \beta_0(i_m - i_f) + d_0, \quad (24)$$

где

i_f – безрисковая ставка;

i_m – доходность рыночного портфеля [6];

d_0 – поправка на дополнительные факторы, не учтенные в модели CAPM.

Известно, что эта поправка может быть интерпретирована как аддитивная составляющая в соответствующей линейной регрессии [6]. При условии выполнения всех предположений модели CAPM [6] она равна нулю. В этом и состоит собственно смысл теоретической формулы для стоимости собственного капитала компании через доходность рыночного портфеля и бета-фактор. Однако практически доходность рыночного портфеля заменяется обычно доходностью подходящего биржевого индекса, а бета-фактор рассчитывается для отрасли, а не для данной конкретной компании. В

результате возникает ненулевая аддитивная составляющая в соответствующей линейной регрессии, которая может быть оценена статистически.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе на примере случая наличия корпоративных налогов предложено корректное обобщение теории Модильяни-Миллера для конечного прогнозного периода с ненулевой остаточной стоимостью леввериджной компании в двухскоростной модели роста.

Полученное уравнение для средневзвешенной стоимости инвестированного капитала леввериджной компании является корректным аналогом уравнения Модильяни-Миллера и позволяет вычислить стоимость собственного капитала леввериджной компании при заданном уровне стоимости собственного капитала аналогичной безлеввериджной компании и величине леввериджа.

Литература

1. Брусов П.Н. и др. Аномальная зависимость стоимости собственного капитала компании от леввериджа [Текст] / П.Н. Брусов, Т.В. Филатова, Н.П. Орехова, П.П. Брусов, А.П. Брусова // Финансовая аналитика. – 2012. – №26. – С. 7-19.
2. Брусов П.Н. и др. Стоимость и структура капитала компании в *post Modigliani – Miller* эпоху [Текст] / П.Н. Брусов, Т.В. Филатова, Н.П. Орехова, П.П. Брусов, А.П. Брусова // Финансовая аналитика. – 2011. – №37. – С. 2-12; 2011. – №38. – С. 9-18.
3. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» / Deloitte&Touche. – декабрь 2003-март 2005.
4. Перевозчиков А.Г. Учет структуры капитала в моделях денежного потока для собственного и инвестированного капитала [Текст] / А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2006. – №1. – С. 163-166.
5. Оценка бизнеса [Текст] : учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М. : Финансы и статистика, 2002.
6. Шарп У. и др. Инвестиции [Текст] : пер. с англ. / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли. – М. : ИНФРА-М, 1998. – XII, 1028 с.

Ключевые слова

Теория Модильяни-Миллера; леввериджные компании; средневзвешенная стоимость капитала леввериджной компании; налоговый щит; стоимость инвестированного капитала; его зависимость от средневзвешенной стоимости; остатки по займам и налоговый щит; уравнение Модильяни-Миллера для средневзвешенной стоимости; стоимость собственного капитала компании; ее зависимость от леввериджа.

Перевозчиков Александр Геннадьевич

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается теория Модильяни – Миллера о стоимости собственного капитала леввериджной компании для двухскоростной модели роста ее доходов. Предполагается, что денежный поток на инвестируемый капитал компании растет с постоянным, но неравным темпом внутри и вне прогнозного периода. Эта модель обобщает результаты теории Модильяни-Миллера для конечного прогнозного периода, полученные полученной П. Брусовым с учениками в части учета возможного роста денежного потока на инвестируемый капитал и ненулевой постпрогнозной стоимости компании. И в определенном смысле минимальна, поскольку модель постоянного роста ничем не отличалась бы от классической теории Модильяни-Миллера.

Вот основные идеи, заложенные в новой работе авторов. Она предназначена для аспирантов и докторантов, специализирующихся в области теории Модильяни-Миллера и Марковица-Шарпа, а также для действующих профессиональных оценщиков инвестиций и бизнеса.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.Г.Перевозчикова может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н, профессор, зав. кафедрой бухгалтерского учета и аудита, проректор по научной работе Тверской государственной сельскохозяйственной академии