

3.11. ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРИИ МОДИЛЬЯНИ-МИЛЛЕРА ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ МОДЕЛИ РОСТА КОМПАНИИ

Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор,
академик РАЕН, профессор кафедры
математики и информатики

Тверская сельскохозяйственная академия

Рассматривается теория Модильяни-Миллера о стоимости собственного капитала леввериджной компании [1-3] для нерегулярной модели роста ее доходов. Предполагается, что денежный поток на инвестируемый капитал компании растет нерегулярно внутри прогнозного периода.

Эта модель обобщает результаты теории Модильяни-Миллера для конечного прогнозного периода, полученные в [1-3] в части учета возможного нерегулярного роста денежного потока на инвестируемый капитал и ненулевой постпрогнозной стоимости компании. В качестве целевой структуры капитала рассматривается постоянная структура в постпрогнозный стационарный период. Структура капитала в прогножном периоде интерполируется по фактическому начальному значению и конечному целевому, характеризующемуся заданным уровнем леввериджа в соответствие с методикой [5]. В результате структура капитала становится переменной, что ведет к переменности средневзвешенной ставки на инвестированный капитал. Получено рекуррентное уравнение для переменной средневзвешенной ставки и конечное условие для него, позволяющие последовательно получить значение всех средневзвешенных ставок. Это позволяет получить из них соответствующие значения переменной стоимости собственного капитала компании при том же целевом значении леввериджа.

Вот основные идеи, заложенные в нашей новой работе. Она предназначена для аспирантов и докторантов, специализирующихся в области теории Модильяни-Миллера и Марковица-Шарпа, а также для действующих профессиональных оценщиков инвестиций и бизнеса.

1. Классическая теория Модильяни-Миллера

При наличии корпоративных налогов теория Модильяни-Миллера дает следующие результаты [2] (мы приводим их исключительно с целью разъяснения сути аналога теории Модильяни-Миллера для конечного прогнозного периода, предложенного в [2]). Мы воспользуемся более привычными для нас обозначениями, введенными в работе [5].

Для вывода зависимости стоимости средневзвешенной ставки $j = WACC$ на инвестированный капитал Y и стоимости i собственного капитала от леввериджа L , т.е. отношения заемного капитала Z компании к собственному капиталу X используем следующую цепочку равенств [2]:

$$\begin{aligned} Y_L &= Y_0 + Zc; \\ Z &= w_d Y_L; \\ Y_L &= q / j; \\ Y_L &= q / i_0 + Zc = q / i_0 + w_d c q / j; \\ \frac{1 - w_d c}{j} &= \frac{1}{i_0}; j = i_0 (1 - \frac{L}{1+L} c). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь

c – ставка корпоративного налога на прибыль;

$w_d = L / (1 + L)$ – доля заемного капитала Z в инвестированном капитале $Y = X + Z$ компании;

$q = CF$ – денежный поток на инвестированный капитал без учета эффекта налогового щита, т.е. прибыль до налогообложения и уплаты процентов скорректированная на ставку корпоративного налога, плюс амортизация, минус капвложения и изменение чистого оборотного капитала [5]. Индексы $L, 0$ в формулах (1) означают, что соответствующая величина относится к леввериджной или безлеввериджной компании.

Заметим, что в системе (1) постулируется неравенство:

$$i_0 \geq j \geq (1 - c)g = g', \tag{2}$$

которое следует непосредственно из определения средневзвешенной стоимости, но поскольку в теории Модильяни-Миллера сначала находится ее величина, а затем уже стоимость собственного капитала компании, то оно должно доказываться. Левое неравенство в (2) следует, впрочем, непосредственно из основного уравнения теории Модильяни-Миллера в (1), связывающего стоимость леввериджной и безлеввериджной компании. Если постулировать второе неравенство в (2) по определению, то возникает вопрос о существовании решения основного уравнения теории Модильяни-Миллера находящегося в соответствующих пределах. Конечно, можно искать это решение в заданных пределах, а если оно не существует, то считать, что мы вышли за пределы ограничений, в пределах которых полученные результаты сохраняют экономический смысл, поскольку цена собственного капитала компании оказалась бы в этом случае отрицательной.

С учетом этого замечания из (1) находится стоимость собственного капитала i леввериджной компании [2]:

$$\begin{aligned} j &= i_0 (1 - w_d c) = w_e i + w_d g (1 - c); \\ i &= \frac{j - w_d g (1 - c)}{w_e} = \\ &= \frac{i_0 (1 - w_d c) - L / (1 + L) g (1 - c)}{1 / (1 + L)} = \\ &= i_0 + L (i_0 - g) (1 - c). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$w_e = 1 / (1 + L) = 1 - w_d$ – доля собственного капитала

X в инвестированном капитале $Y = X + Z$ компании;

g – стоимость заемного капитала компании.

2. Аналог теории Модильяни-Миллера для конечного периода

Приведем аналог теории Модильяни-Миллера для конечного прогнозного периода, следуя [2] с целью анализа ее корректности. Отметим сразу же, что авторы предполагают нулевой постпрогнозный стоимость компании, тем самым заранее ограничивая себя другим крайним случаем по отношению к перпетуитетной компании, рассмотренной в классической теории Модильяни-Миллера. Поэтому их формулы дают лишь оценку снизу для стоимости леввериджной компании.

Величину налогового щита авторы [2] ищут по формуле:

$$\begin{aligned} cS &= \sum_{k=1}^n \frac{gZc}{(1+g)^k} = \frac{gZc}{1+g} \frac{1 - (1+g)^{-n}}{1 - (1+g)^{-n}} = \\ &= cZ [1 - (1+g)^{-n}] \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь

S – текущая стоимость остатков по долгу по ставке g .

Для вывода зависимости стоимости средневзвешенной ставки $j = WACC$ на инвестированный капитал используется следующая цепочка равенств, аналогичная (1) [2]:

$$\begin{aligned} Y_L &= Y_0 + Sc; \\ Z &= w_d Y_L; \\ Y_L &= q[1 - (1 + j)^{-n}] / j; \\ Y_L &= q[1 - (1 + i_0)^{-n}] / i_0 + cZ[1 - (1 + g)^{-n}] = \\ &= q[1 - (1 + i_0)^{-n}] / i_0 + cw_d Y_L [1 - (1 + g)^{-n}]; \\ Y_L(1 - cw_d[1 - (1 + g)^{-n}]) &= q[1 - (1 + i_0)^{-n}] / i_0; \\ \frac{1 - (1 + j)^{-n}}{j} * (1 - cw_d[1 - (1 + g)^{-n}]) &= \\ &= \frac{1 - (1 + i_0)^{-n}}{i_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Последнее уравнение относительно неизвестной средневзвешенной ставки j предлагается решать численно, пользуясь монотонностью левой части по j .

После этого по определению j и находится стоимость собственного капитала i леввериджной компании [2]:

$$\begin{aligned} j &= w_e i + w_d g(1 - c); \\ i &= \frac{j - w_d g(1 - c)}{w_e} = \frac{j - L / (1 + L) g(1 - c)}{1 / (1 + L)} = \\ &= j(1 + L) - Lg(1 - c). \end{aligned} \quad (6)$$

Конечной формулы (2) в этом случае не получается в силу нелинейной зависимости последнего уравнения (13) от j, i_0, g .

Отметим, что расчет текущей стоимости налогового щита в (4) не вполне корректен, поскольку предполагает постоянно не только доли заемного капитала в инвестированном, но и абсолютное постоянство заемного капитала, что невозможно, поскольку стоимость инвестированного капитала в модели с нулевой остаточной стоимостью, принятой в [1-3], убывает до нуля. В связи с этим в предыдущей работе на эту тему нами был приведен корректный расчет текущей стоимости налогового щита, основанный на полученных нами формулах для стоимости инвестированного капитала компании. Остатках по долгу получаются из них при заданной постоянной доле заемного капитала в инвестированном, что позволяет подсчитать проценты, которые и выводятся из-под корпоративного налога на прибыль.

Поэтому в настоящей работе сразу рассматривается его обобщение на случай нерегулярной модели роста, который включает предыдущий случай как частный.

3. Стоимость компании в нерегулярной модели роста

Вначале выпишем рекуррентное уравнение для стоимости инвестированного капитала Y_k на конец k -го года следуя [7]:

$$Y_{k-1} = \frac{q_k + Y_k}{1 + j_{k-1}}; k = n, \dots, 1. \quad (7)$$

Здесь q_k, j_{k-1} – соответственно нерегулярный денежный поток и средневзвешенная стоимость инвестированного капитала компании, отнесенные к k -му периоду.

При $k \geq n$ имеет место формула Гордона для постпрогнозной стоимости инвестированного капитала компании [4, 5]:

$$Y_k = q_k \frac{1 + v_0}{j_n - v_0}. \quad (8)$$

Здесь $q_k = q_n(1 + v_0)^{k-n}; k \geq n$; – регулярный денежный поток в постпрогнозный стационарный период;

v_0 – ожидаемый постпрогнозный постоянный темп роста денежного потока, $j_k \equiv j_n, k \geq n$, – постоянная постпрогнозная средневзвешенная стоимость инвестированного капитала.

В частности, при $k = n$:

$$Y_n(j_n) = q_n * \frac{1 + v_0}{j_n - v_0}. \quad (9)$$

При $k > n$ стоимость инвестированного капитала компании будет расти с постпрогнозным темпом:

$$Y_k = Y_n(1 + v_0)^{k-n}. \quad (10)$$

Остатки Z_k по долгу на конец k -го года при заданной структуре инвестированного $w = w_n$ капитала получают теперь по формуле:

$$Z_k = w_n Y_k. \quad (11)$$

Здесь $Y_k, k = 0, 1, \dots, n$, – решение уравнения (7) с конечным условием (8) при $k = n$. Структура капитала $w = w_k$ в прогнозном периоде интерполируется по фактическому начальному значению $w = w_0$ и конечному целевому $w = w_n = L / (1 + L)$, характеризующемуся заданным уровнем леввериджа L в соответствие с методикой [5]:

$$w_k = w_0(1 - \frac{k}{n}) + \frac{L}{1 + L} * \frac{k}{n}, k = 0, 1, \dots, n. \quad (12)$$

В результате структура капитала становится переменной, что ведет к переменности средневзвешенной ставки на инвестированный капитал.

4. Текущая стоимость налогового щита

Текущая стоимость налогового щита на конец n -го года может быть подсчитана следующим образом:

$$\begin{aligned} cS_n &= cgw_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_{k-1}}{(1 + g)^k} = Y_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + v_0)^{k-1}}{(1 + g)^k} = \\ &= cgw_n q_n \frac{1 + v_0}{j_n - v_0} * \frac{1}{1 + g} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 + j}{1 + g} \right)^k = \\ &= cgw_n q_n \frac{1 + v_0}{j_n - v_0} * \frac{1}{g - v_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Воспользовавшись теперь (13) как конечным условием для налогового щита, выпишем рекуррентное уравнение для текущей стоимости на конец $(k - 1)$ -го года:

$$cS_{k-1} = \frac{cY_{k-1}gw_{k-1} + cS_k}{1 + g}, k = n, \dots, 1. \quad (14)$$

Предполагается, что для каждого $k = n, \dots, 1$ сначала путем соответствующего обобщения теории Модильяни-Миллера будет определено j_{k-1} . Затем Y_{k-1} по формуле (7), а затем уже cS_{k-1} по формуле (14).

5. Обобщение теории Модильяни-Миллера на постпрогнозный период

Для вывода конечного значения средневзвешенной ставки $j = j_n$ может быть использовано уравнение

Модильяни-Миллера на конец n -го года:

$$Y_n(j_n) = Y_n(i_0) + cS_n(j_n).$$

Здесь $Y_n(j_n)$ – функция, заданная формулой (9);

$Y_n(i_0)$ – та же функция, в которую вместо j_n подставлено значение i_0 ;

$cS_n = cS_n(j_n)$ – текущая стоимость налогового щита, подсчитанная по формуле (13).

В развернутом виде уравнение (13) примет вид:

$$Y_n = \frac{q_n(1+v_0)}{j_n - v_0} = \frac{q_n(1+v_0)}{i_0 - v_0} + \frac{g}{g - v_0} cw_n Y_n;$$

$$\frac{q_n(1+v_0)}{j_n - v_0} (1 - \frac{gcw_n}{g - v_0}) = \frac{q_n(1+v_0)}{i_0 - v_0}.$$

Откуда получим формулу для конечного значения средневзвешенной ставки $j = j_n$:

$$j_n = (i_0 - v_0) (1 - \frac{g}{g - v_0} cw_n) + v_0. \tag{15}$$

Заметим, что при $v_0 = 0$ формула (15) превращается в последнюю формулу в классической теории Модильяни-Миллера (1). Поэтому полученная формула (15) обобщает классическую формулу Модильяни-Миллера (1).

6. Следствие для корректировки бета-фактора

Приведем тут же для полноты вывод формулы для бета-фактора леввериджной компании $\beta = \beta_n$ через бета-фактор аналогичной безлевериджной компании $\beta_0 = \beta_{0n}$ в постпрогнозный стационарный период в обобщенной модели CAPM [5]:

$$i_n = i = i_f + \beta(i_m - i_f) + d,$$

где

r_f – безрисковая ставка;

r_m – доходность рыночного портфеля [6];

d – поправка на дополнительные факторы не учтенные в модели CAPM.

Эта поправка может быть интерпретирована как аддитивная составляющая в соответствующей линейной регрессии [6]. При условии выполнения всех предположений модели CAPM [6] она равна нулю. В этом и состоит собственно смысл теоретической формулы для стоимости собственного капитала компании через доходность рыночного портфеля и бета-фактор. Однако практически доходность рыночного портфеля заменяется обычно доходностью подходящего биржевого индекса, а бета-фактор рассчитывается для отрасли, а не для данной конкретной компании. В результате возникает ненулевая аддитивная составляющая в соответствующей линейной регрессии, которая может быть оценена статистически.

Теперь в обычных предположениях портфельной теории Марковица-Шарпа (CAPM) [6] с учетом обоб-

щенной формулы Модильяни-Миллера (15) и последней формулы в (6) имеем цепочку равенств:

$$i = r_f + \beta(r_m - r_f) + d;$$

$$i_0 = r_f + \beta_0(r_m - r_f) + d_0;$$

$$i = j(1+L) - Lg(1-c) =$$

$$= (i_0 - v_0)(1+L - \frac{g}{g-v_0}cL) +$$

$$+ (1+L)v_0 - Lg(1-c) =$$

$$= i_0 + (i_0 - v_0)L(1 - \frac{g}{g-v_0}c) +$$

$$+ L[v_0 - g(1-c)] =$$

$$= r_f + \beta_0(r_m - r_f) + d_0 + L(i_0 - r_f) *$$

$$* (1 - \frac{g}{g-v_0}c) + L[v_0 + (r_f - v_0) *$$

$$* (1 - \frac{g}{g-v_0}c) - g(1-c)] =$$

$$= r_f + \beta_0(r_m - r_f)(1 + L(1 - \frac{g}{g-v_0}c)) +$$

$$+ \{d_0 + L[(d_0 + r_f - v_0) *$$

$$* (1 - \frac{g}{g-v_0}c) + v_0 - g(1-c)]\} =$$

$$= r_f + \beta(r_m - r_f) + d, \tag{16}$$

если положить:

$$\beta = \beta_0(1 + L(1 - \frac{g}{g-v_0}c));$$

$$d = d_0 + L[d_0 + r_f - v_0] *$$

$$* (1 - \frac{g}{g-v_0}c) + v_0 - g(1-c)] \tag{17}$$

Что и дает искомое компактное обобщение формулы, хорошо известной оценщикам бизнеса на случай $g \neq r_f, v_0 \neq 0$ [5]. Напомним, что d_0 здесь – поправка на дополнительные факторы, неучтенные в модели CAPM для аналогичной безлевериджной компании, определяемая статистически.

Известно, что покупку государственных облигаций можно рассматривать, как депозитную операцию [6]. Не случайно ставка r по депозитам на рынке оказывается близкой к безрисковой r_f , а на неразвитых финансовых рынках просто заменяет собой безрисковую [5]. Таким образом:

$$r_f \approx r. \tag{18}$$

Заметим, что величина поправки $d \neq 0$ в (17) даже в том случае, когда $v_0 = 0, d_0 = 0$. В этом случае формула (17) приобретает вид:

$$\beta = \beta_0(1 + L(1 - c));$$

$$d = -L(1 - c)(g - r). \tag{19}$$

7. Обобщение теории Модильяни-Миллера на прогнозный период

Для вывода рекуррентного уравнения для средневзвешенной ставки $j = j_k, k = n-1, \dots, 1$, может быть использовано уравнение Модильяни-Миллера на конец $(k-1)$ -го года:

$$Y_{k-1}(j_{k-1}) = Y_{k-1}(i_0) + cS_{k-1}(j_{k-1}) = Y_{k-1}(i_0) + \frac{cY_{k-1}gw_{k-1} + cS_k(j_k)}{1+g} \quad (20)$$

Здесь

$Y_{k-1}(j_{k-1})$ – функция заданная рекуррентным уравнением (7) с конечным условием (9);

$Y_{n-1}(i_0)$ – та же функция в которую вместо j_{k-1} подставлено значение i_0 ;

$cS_n = cS_n(j_n)$ – текущая стоимость налогового щита, подсчитанная по рекуррентной формуле (14) с конечным условием (13).

В развернутом виде уравнение (13) примет вид:

$$Y_{k-1} = \frac{q_k + Y_k(j_k)}{1 + j_{k-1}} = Y_{k-1}(i_0) + \frac{cY_{k-1}gw_{k-1}}{1+g} + \frac{cS_k(j_k)}{1+g}; \quad (21)$$

$$\frac{q_k + Y_k(j_k)}{1 + j_{k-1}} (1 - \frac{gcw_{k-1}}{1+g}) = Y_{k-1}(i_0) + \frac{cS_k(j_k)}{1+g}.$$

Откуда получим искомую рекуррентную формулу для текущего значения средневзвешенной ставки $j = j_{k-1}$:

$$j_{k-1} = \frac{q_k + Y_k(j_k)}{(1+g)Y_{k-1}(i_0) + cS_k(j_k)} * (1 + g(1 - cw_{k-1})) - 1, k = n, \dots, 1. \quad (22)$$

Получив средневзвешенные ставки $j = j_{k-1}, k = n, \dots, 1$, по рекуррентному уравнению (22) с конечным условием (15), можно получить соответствующую стоимость собственного капитала леввериджной компании по средней формуле из (6):

$$i_{k-1} = \frac{j_{k-1} - w_{k-1}g(1-c)}{1 - w_{k-1}}, k = n, \dots, 1. \quad (23)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе на примере случая наличия корпоративных налогов предложено корректное обобщение теории Модильяни-Миллера для конечного прогнозного периода с ненулевой остаточной стоимостью леввериджной компании в нерегулярной модели роста.

Полученное рекуррентное уравнение для средневзвешенной стоимости инвестированного капитала леввериджной компании является корректным аналогом уравнения Модильяни-Миллера и позволяет вычислить стоимость собственного капитала леввериджной компании при заданном уровне стоимости собственного капитала аналогичной безлеввериджной компании и величине леввериджа, к которому стремится компания в постпрогнозный период. Это обычно среднеотраслевое значение леввериджа.

Литература

1. Брусов П.Н. и др. Стоимость и структура капитала компании в *post* Модильяни – Миллеровскую эпоху [Текст] / П.Н. Брусов, Т.В. Филатова, Н.П. Орехова, П.П. Брусов, А.П. Брусова // Финансовая аналитика. – 2011. – №37. – С. 2-12; Финансовая аналитика. – 2011. – №38. – С. 9-18.
2. Брусов П.Н. и др. Аномальная зависимость стоимости собственного капитала компании от леввериджа [Текст] / П.Н. Брусов, Т.В. Филатова, Н.П. Орехова, П.П. Брусов, А.П. Брусова // Финансовая аналитика. – 2012. – №26. – С. 7-19.

3. Оценка бизнеса [Текст] : учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М. : Финансы и статистика, 2002.
4. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст] / Deloitte&Touche. 2003-2005.
5. Первозчиков А.Г. Учет структуры капитала в моделях денежного потока для собственного и инвестированного капитала [Текст] / А.Г. Первозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2006. – №1. – С. 163-166.
6. Шарп У. и др. Инвестиции [Текст] : пер. с англ. / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли. – М. : ИНФРА-М, 1998. – 1028 с.

Ключевые слова

Теория Модильяни-Миллера; леввериджные компании; средневзвешенная стоимость капитала леввериджной компании; налоговый щит; стоимость инвестированного капитала; его зависимость от средневзвешенной стоимости; остатки по займам и налоговый щит; уравнение Модильяни-Миллера для средневзвешенной стоимости; стоимость собственного капитала компании; ее зависимость от леввериджа.

Первозчиков Александр Геннадьевич

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается теория Модильяни-Миллера о стоимости собственного капитала леввериджной компании для нерегулярной модели роста ее доходов. Предполагается, что денежный поток на инвестируемый капитал компании растет нерегулярно внутри прогнозного периода. Эта модель обобщает результаты теории Модильяни-Миллера для конечного прогнозного периода, полученные полученной П. Брусовым с учениками в части учета возможного нерегулярного роста денежного потока на инвестируемый капитал и ненулевой постпрогнозной стоимости компании. В результате структура капитала становится переменной, что ведет к переменности средневзвешенной ставки на инвестированный капитал. Получено рекуррентное уравнение для переменной средневзвешенной ставки и конечное условие для него, позволяющие последовательно получить значение всех средневзвешенных ставок. Это позволяет получить из них соответствующие значения переменной стоимости собственного капитала компании при том же целевом значении леввериджа.

Вот основные идеи, заложенные в работе. Она предназначена для аспирантов и докторантов, специализирующихся в области теории Модильяни-Миллера и Марковица-Шарпа, а также для действующих профессиональных оценщиков инвестиций и бизнеса.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.Г. Первозчикова может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н, проф., зав. кафедрой бухгалтерского учета и аудита, проректор по научной работе Тверской государственной сельскохозяйственной академии