

8.2. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИЙ В ОСНОВНЫЕ СРЕДСТВА КОМПАНИИ

Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., проф., академик РАЕН, проф. кафедры математики и информатики Тверской государственной сельскохозяйственной академии; Лесик И.А., программист отдела инновационных ИТ в обучении, Центр разработки и внедрения технологий управления ОАО «НПО Русбитех», г. Тверь

[Перейти на Главное МЕНЮ](#)
[Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ](#)

Рассматривается простейшая модель инвестиций в основные средства компании с использованием заемного капитала. В качестве критерия предлагается использовать прямой критерий стоимости собственного капитала компании. Стоимость собственного капитала может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода, что позволяет поставить задачу исследования стоимости компании от объема заемных средств. Эту зависимость можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности роста стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов. Показано, что линия финансового менеджера является графиком возрастающей, вогнутой и кусочно-линейной функции и получена формула для ее обобщенного дифференциала. Это позволяет использовать численный метод для ее построения и решает в определенном смысле поставленную задачу в общем случае.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается простейшая модель инвестиций в основные средства компании с использованием заемного капитала. Эта модель представляет собой частный случай моделей предложенных в [10] для изучения влияния заемного капитала на рост ее стоимости в процессе инвестиций в основные и оборотные средства компании. Целью финансового менеджмента компании в долгосрочной перспективе, как известно [4, 5], является обеспечение роста ее стоимости за счет инвестиции собственных и заемных средств в основные и оборотные средства компании.

В отличие от [10], где используется косвенный критерий валовой прибыли, в качестве критерия предлагается использовать прямой критерий стоимости собственного капитала компании. Эта стоимость в простейшем случае может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода [8, 11, 13], что позволяет поставить задачу исследования стоимости компании от объема заемных средств. Эту зависимость можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности по росту стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов.

В настоящей работе показано, что линия финансового менеджера является графиком возрастающей, вогнутой и кусочно-линейной функции и получена формула для ее обобщенного дифференциала в смысле [2, 3]. Это позволяет использовать численный метод для ее построения и решает в определенном смысле поставленную задачу в общем случае.

Вот основные идеи, заложенные в нашей новой работе. Она предназначена для аспирантов и докторантов, специализирующихся в области финансового менеджмента предприятия, а также для действующих профессиональных оценщиков инвестиций и бизнеса.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Начнем с классической производственной задачи [3], которую мы возьмем за основу нашей простейшей модели инвестиций в основные средства компании. Мы приводим классические результаты исключительно с

целью разъяснения сути предлагаемых инноваций. Мы воспользуемся более привычными для нас обозначениями, введенными в работах [2, 3].

1.1. Производственная задача

При производстве n видов продукции предприятия используется m видов ресурсов. Известно:

b_1, b_2, \dots, b_m – запасы ресурсов;

$a_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ – расход i -го вида ресурса на изготовление единицы j -й продукции;

$c_j (j = 1, 2, \dots, n)$ – цена единицы j -й продукции.

Требуется составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

Обозначим через $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ – объем выпуска j -й продукции. Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется фазовым вектором системы и характеризует ее состояние. Учитывая, что $c_j x_j$ – прибыль от реализации всего объема j -й продукции, а $a_{ij} x_j$ – затраты i -го вида ресурса на весь объем выпуска j -й продукции, запишем математическую модель задачи. С учетом не отрицательности выпуска продукции получим:

$$z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2; \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m; \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

Или в векторной форме:

$$z(x) = (c, x) \rightarrow \max, \quad Ax \leq b, x \geq 0. \quad (2)$$

Здесь

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)'$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)'$ – векторы-столбцы; (c, x) – скалярное произведение векторов c, x в евклидовом пространстве E_n ;

$A = \|a_{ij}\|$ – матрица $m \times n$.

Задача 1.1

При производстве двух видов продукции используются три вида ресурсов. Составить математическую модель и найти план выпуска продукции, обеспечивающий максимум дохода (табл. 1).

Таблица 1

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции 1	Расход сырья на единицу продукции 2
20	2	1
12	1	1
30	1	3
Цена	40	50

Решение.

$$z(x) = 40 x_1 + 50 x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 20; \\ x_1 + x_2 \leq 12; \\ x_1 + 3x_2 \leq 30; \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

Решая эту задачу графическим методом, поскольку в ней только две переменных, получим единственное оптимальное решение:

$$x_1^* = 3, x_2^* = 9, z^* = z(x^*) = 40 \cdot 3 + 50 \cdot 9 = 570 .$$

1.2. Двойственные оценки и устойчивость задачи

Обозначим через $\phi(b,c)$ оптимальное значение критерия в задаче (2), при фиксированном b – через $f(c)$, а при фиксированном c – через $F(b)$. Тогда, как показано в [1], функция $\phi(b,c)$ – вогнута по b и выпукла по c , и значит, непрерывна по этим переменным.

Задачей двойственной к (2) называется задача:

$$\begin{aligned} \langle b, p \rangle &\rightarrow \min, \\ A'p &\geq c, p \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вектор двойственных переменных (оценок);

A' – транспонированная матрица A .

Оказывается, что если двойственная задача (3) имеет единственное решение p^* , то функция $F(b)$ для задачи (2) дифференцируема и

$$\partial F(b) / \partial b_i = p_i^*, i = 1, 2, \dots, m$$

[1], т.е. ее дифференциал равен:

$$dF(b) = \langle p^*, db \rangle . \tag{4}$$

Здесь

$db = (db_1, db_2, \dots, db_m)$ – вектор возможных приращений вектора запасов $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)'$.

Это позволяет исследовать устойчивость результата задачи (2) относительно малых изменений вектора параметров $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)'$ и представляет простейшую модель изучения устойчивости системы.

Задача 1.2

Для производственной задачи 1 составить математическую модель двойственной задачи и найти соответствующий вектор оценок.

Решение. Строго говоря, нужно рассмотреть варианты, когда одно из неравенств будет строгим, но в данном случае минимум критерия достигается, когда оба они выполняются как равенства. С учетом этого замечания получим задачу:

$$z(p) = 20 p_1 + 12 p_2 + 30 p_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2 p_1 + p_2 + p_3 = 40 ; \\ p_1 + p_2 + 3 p_3 = 50 ; \end{cases}$$

$$p_j \geq 0.$$

Решая эту задачу методом исключения переменных, поскольку в ней только одна небазисная переменная, получим единственное оптимальное решение, соответствующее случаю, когда оба ограничения активны:

$$p_1^* = 0, p_2^* = 35, p_3^* = 5, z^* =$$

$$= z(p^*) = 20 \cdot 0 + 12 \cdot 35 + 30 \cdot 5 = 570 .$$

Заметим, что оптимальное значение прямой и двойственной задачи совпадает, как известно из теории двойственности. Это обстоятельство может служить для взаимного контроля правильности полученных решений.

Если двойственная задача (3) имеет не единственное решение, то функция $F(b)$ будет только дифференцируемой по направлениям, как показано в [1].

Пусть $\{p^1, p^2, \dots, p^k\}$ – множество крайних точек выпуклого многогранного множества P^0 оптимальных решений двойственной задачи (3), тогда производную функции $F(b)$ по направлению $s, \|s\|=1$, можно найти по формуле [1]:

$$\frac{\partial F(b)}{\partial s} = \lim_{\lambda} \frac{F(b + \lambda s) - F(b)}{\lambda} = \min_{1 \leq r \leq k} \langle s, p^r \rangle . \tag{5}$$

Это позволяет исследовать устойчивость результата задачи (2) относительно малых изменений вектора параметров $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ в произвольном направлении $s, \|s\|=1$. Здесь $\|s\|$ – длина вектора s .

В частности, имеет место формула:

$$\begin{aligned} \Delta F(b) &= F(b + \lambda s) - F(b) = \\ &= \min_{1 \leq r \leq k} \langle s, p^r \rangle \cdot \lambda + o(\lambda). \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $\{p^1, p^2, \dots, p^l\}, l \geq k$, – объемлющее множество крайних точек выпуклого многогранного множества $P(P^0 \subseteq P)$ всех допустимых решений двойственной задачи (3).

Тогда функция $F(b)$ является функцией минимума конечного числа дифференцируемых функций и в частности кусочно-линейна:

$$F(b) = \min_{1 \leq r \leq l} \langle b, p^r \rangle . \tag{7}$$

В этом случае $o(\lambda)/\lambda \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$, равномерно по направлению $s, \|s\|=1$ [6]. Полагая для любого приращения Δb :

$$s = \Delta b / \|\Delta b\|, \lambda = \|\Delta b\|, \tag{8}$$

Получим из (6), что

$$\begin{aligned} \Delta F(b) &= F(b + \Delta b) - F(b) = \\ &= \min_{1 \leq r \leq k} \langle \Delta b, p^r \rangle + o(\|\Delta b\|). \end{aligned} \tag{9}$$

Это позволяет определить обобщенный дифференциал в смысле [2, 3] функции минимума формулой:

$$dF(b) = \min_{1 \leq r \leq k} \langle \Delta b, p^r \rangle . \tag{10}$$

Этот обобщенный дифференциал имеет все свойства обычного (кроме линейности по Δb) и может быть использован для приближенного вычисления приращения функции минимума:

$$\begin{aligned} \Delta F(b) &= F(b + \Delta b) - F(b) \approx \\ \approx dF(b) &= \min_{1 \leq r \leq k} \langle \Delta b, p^r \rangle . \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, обобщенный дифференциал представляет из себя минимум дифференциала критерия в (3) по параметру b , для тех крайних значений переменной p которые доставляют минимум в (3).

Пример 1.1

В задаче 2 решение оказалось единственным, поэтому ее значение (совпадающее со значением задачи 1) дифференцируемо по b , причем

$$dF(b) = \langle p^*, db \rangle = p_1^* \Delta b_1 + p_2^* \Delta b_2 + p_3^* \Delta b_3 .$$

Пусть, например, требуется определить приближенно, на сколько процентов изменится результат, если первый и третий запасы уменьшатся на 1%, а второй увеличится на 2%. В этом случае

$$\Delta b_1 = -0,01 b_1 = -0,01 * 20 = -0,2;$$

$$\Delta b_2 = 0,02 b_2 = 0,02 * 12 = 0,24;$$

$$\Delta b_3 = -0,01 b_3 = -0,01 * 30 = -0,3.$$

И по формуле (14), в частности, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta F(b) &= F(b + \Delta b) - F(b) \approx dF(b) = \\ &= 0 * (-0,2) + 35 * 0,24 + 5 * (-0,3) = 6,9. \end{aligned}$$

Это составит $\Delta F(b) / z * 100 = 6,9 / 570 * 100 = 1,2\%$ от оптимального значения задачи z^* .

Аналогично в задаче (2) ввести множество:

$$\{x^1, x^2, \dots, x^p\}$$

крайних точек выпуклого многогранного множества x^0 оптимальных решений задачи (2). Пусть:

$$\{x^1, x^2, \dots, x^r\}, r \geq p, \text{ — объемлющее множество крайних}$$

точек выпуклого многогранного множества $x (x^0 \subseteq P)$ всех допустимых решений двойственной задачи (2).

Тогда функция $f(c)$ оптимального значения задачи (2) является функцией максимума конечного числа дифференцируемых функций:

$$f(c) = \max_{1 \leq t \leq r} \langle c, x^t \rangle. \quad (12)$$

Это позволяет определить обобщенный дифференциал в смысле [2, 3] функции минимума формулой:

$$df(c) = \max_{1 \leq t \leq p} \langle \Delta c, x^t \rangle. \quad (13)$$

Этот обобщенный дифференциал имеет все свойства обычного (кроме линейности по Δb) и может быть использован для приближенного вычисления приращения функции минимума:

$$\Delta f(c) = f(c + \Delta c) - f(c) \approx df(c) = \max_{1 \leq t \leq p} \langle \Delta c, x^t \rangle. \quad (14)$$

Пример 1.2

В задаче 1 решение оказалось единственным, поэтому ее значение (совпадающее со значением задачи 1) дифференцируемо по b , причем

$$df(c) = \langle x^*, dc \rangle = x_1 * \Delta c_1 + x_2 * \Delta c_2.$$

Пусть, например, требуется определить приближенно, на сколько процентов изменится результат, если первая цена уменьшится на 2%, а вторая увеличится на 1%.

В этом случае

$$\Delta c_1 = -0,02 c_1 = -0,02 * 40 = -0,8;$$

$$\Delta c_2 = 0,01 c_2 = 0,01 * 50 = 0,5.$$

И по формуле (17), в частности, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta f(c) &= f(c + \Delta c) - f(c) \approx \\ &\approx df(c) = 3 * (-0,8) + 9 * 0,5 = 2,1. \end{aligned}$$

Это составит $\Delta f(c) / z * 100 = 2,1 / 570 * 100 = 0,4\%$ от оптимального значения задачи z^* .

2. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИЙ

Перейдем теперь к простейшей модели инвестиций в основные средства компании с использованием заемного

капитала z , следуя [10] и сохранив введенные обозначения. Для этого рассмотрим классическую производственную задачу при условии, что вектор ресурсов b получил приращение y . Это приращение может возникнуть от инвестиций в основные и оборотные средства или перепрофилирования производства [10]. В этой работе мы рассмотрим случай инвестиций в основные средства предприятия с использованием заемного капитала на долгосрочной основе. Предположим в связи с этим, что все ограничения производственной задачи (1) являются ограничениями по производственной мощности [10]. Тогда величины $b_i, i = 1, 2, \dots, m$, в правых частях ограничений задачи (1) равны соответственно:

$$b_i = (k_i + l_i) \tau_i, i = 1, 2, \dots, m, \quad (15)$$

где

k_i — число единиц оборудования вида i , которое имеется на предприятии;

l_i — число дополнительных единиц оборудования вида i , приобретаемых за счет заемных средств;

τ_i — время эффективного использования оборудования вида i за рассматриваемый период, обычно — год. В этом случае величины коэффициентов a_{ij} интерпретируются как время t_{ij} загрузки оборудования вида i при выпуске одной единицы продукции j [10].

Предположим, что стоимость одной единицы оборудования вида i составляет d_i и на его увеличение выделена сумма y_i из общей суммы инвестиций z . Тогда без учета целочисленности переменных k_i, l_i получим:

$$k_i = b_i^0 / d_i, l_i = y_i / d_i, i = 1, 2, \dots, m. \quad (16)$$

Здесь b_i^0 — стоимость единиц оборудования вида i , которое имеется на предприятии. Подставляя (16) в (15) получим:

$$b_i = (b_i^0 + y_i) \tau_i / d_i, i = 1, 2, \dots, m, \quad (17)$$

Полагая:

$$a_{ij}^0 = t_{ij} d_i / \tau_i, \quad (18)$$

приходим к нормированной задаче (1):

$$q(y) = \max_x \langle c, x \rangle; \quad (19)$$

$$A^0 x \leq b^0 + y, x \geq 0.$$

Эта форма наиболее удобна для изучения непосредственного влияния инвестиций в основные средства на валовую прибыль предприятия, которая отличается от избранного критерия на постоянные расходы c_0 предприятия.

Сравнивая функцию (19) с функцией $F(b)$, введенной в п. 1.2, убеждаемся, что

$$q(y) = F(b^0 + y). \quad (20)$$

В силу вогнутости и кусочно-линейности (полилинейности) $F(b)$, следует вогнутость и кусочная линейность функции $q(y)$ в (19).

Введем функцию:

$$Q(V) = \max_y q(y); \quad (21)$$

$$\langle e, y \rangle = V, y \geq 0.$$

Здесь $e = (1, \dots, 1)' \in E_m$ – вектор столбец. Эта функция показывает, как валовая прибыль, отличающаяся от избранного критерия на постоянные расходы c_0 предприятия, зависит от объема заемного капитала v на долгосрочной основе, доступного компании для финансирования инвестиций в основные средства.

Из вогнутости функции $q(y)$ и линейности ограничений в (21) в силу леммы 1.8 в [12] функция $q(v)$ будет также вогнутой. Из кусочно-линейности функции $q(y)$ следует кусочная линейность функции $q(v)$ в (21), как будет показано далее при выводе формула для ее обобщенного дифференциала, поскольку и то и другое следует из представления этой функции в виде минимума от конечного числа линейных по v функций.

Теперь мы можем определить стоимость собственного капитала $x = x(v)$ компании в результате инвестиции заемного капитала v на долгосрочной основе в основные средства. Эта стоимость в простейшем случае может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода [8, 11, 13]:

$$x(v) = \frac{q(v) - c_0 - gv}{i} \tag{22}$$

Здесь g – средняя стоимость капитала на долгосрочной основе; i – подходящая ставка капитализации валовой прибыли компании. Из вогнутости и кусочно-линейности функции $q(v)$ следует вогнутость и кусочная линейность функции $x(v)$.

Зависимость (22) можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности по росту стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов.

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РОСТА СТОИМОСТИ

Перейдем теперь к рассмотрению условий, при которых возможен рост стоимости собственного капитала компании в результате инвестиций в основные средства с использованием заемного капитала на долгосрочной основе, т.е. когда выполняется неравенство:

$$x(v) \geq x(0), \tag{23}$$

при всех $v > 0$.

Положим

$$y = \lambda b^0, \tag{24}$$

где $\lambda > 0$ определяется из ограничения (21):

$$\langle e, y \rangle = v. \tag{25}$$

Откуда получим:

$$\lambda = \frac{v}{\langle e, b^0 \rangle}. \tag{26}$$

Тогда вектор (24) является допустимым вектором в задаче (21) и следовательно справедливо неравенство:

$$q(v) \geq q(y). \tag{27}$$

В силу (24) и линейности ограничений вектор $(1 + \lambda)x$ будет допустимым для задачи (19) и справедливо неравенство:

$$q(y) \geq (1 + \lambda)\langle c, x \rangle = (1 + \lambda)q(0). \tag{28}$$

Отсюда в силу (27) следует неравенство:

$$q(v) \geq (1 + \lambda)q(0). \tag{29}$$

Далее, если $v = 0$, то из ограничения (25) следует, что $y = 0$ – единственное допустимое решение задачи (21) и следовательно:

$$q(0) = q(0). \tag{30}$$

Поэтому в силу (29):

$$q(v) \geq (1 + \lambda)q(0). \tag{31}$$

Используя полученное неравенство, имеем:

$$\begin{aligned} x(v) - x(0) &= \frac{q(v) - c_0 - gv}{i} - \frac{q(0) - c_0}{i} = \\ &= \frac{q(v) - q(0) - gv}{i} \geq \frac{\lambda q(0) - gv}{i} = \\ &= v \frac{q(0) / \langle e, b^0 \rangle - g}{i}. \end{aligned} \tag{32}$$

Теперь из (32) следует, что достаточным условием роста стоимости собственного капитала компании является условие:

$$\frac{q(0)}{\langle e, b^0 \rangle} - g \geq 0. \tag{33}$$

Здесь $\langle e, b^0 \rangle$ – стоимость оборудования, которое имеется на предприятии. Величину

$$i_0 = \frac{q(0)}{\langle e, b^0 \rangle}, \tag{34}$$

в (33) можно интерпретировать, как доходность на собственный капитал компании, определенный затратным подходом [8, 11]. Поэтому (33) представляет собой обычное условие неотрицательности финансового рычага компании:

$$i_0 \geq g. \tag{35}$$

(в ф-х (33,34) добавлен индекс нуль у i , поскольку это другая величина, в остальных формулах сохранено прежнее обозначение без индекса – А.Г.)

На самом деле это условие монотонности функции $x = x(z)$ из которого и следует условие (23) неубывания стоимости собственного капитала компании, использующей заемные средства на долгосрочной основе для инвестирования в основные средства.

4. ПОЛИЛИНЕЙНОСТЬ И ОБОБЩЕННАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ МЕНЕДЖЕРА

Вначале получим представление функции $q(v)$ в виде минимума от конечного числа линейных по v функций, анонсированного в п. 2. Проблема была в том, чтобы доказать, что функция доходности:

$$\begin{aligned} q(v) &= \max_y q(y); \\ \langle e, y \rangle &\leq v, y \geq 0, \end{aligned} \tag{36}$$

кусочно-линейна. Здесь

$$q(y) = F(b^0 + y) = \max_x \langle c, x \rangle, \quad (37)$$

$$Ax \leq b^0 + y, x \geq 0.$$

Для функции (37) можно использовать двойственное представление:

$$q(y) = F(b^0 + y) = \min_p \langle b^0 + y, p \rangle; \quad (38)$$

$$A^*p \geq c, p \geq 0.$$

Переходя к минимуму по конечному множеству P^* всех крайних точек p^* допустимого множества P задачи (38), получаем представление функции (37) в виде минимума конечного числа линейных:

$$q(y) = F(b^0 + y) = \min_{p^*} \langle b^0 + y, p^* \rangle. \quad (39)$$

Отсюда и выводится ее линейность. Для доказательства линейности функции (36) представим ее теперь с использованием (39) в виде задачи ЛП:

$$Q(V) = \max v, \quad (40)$$

$$v \leq \langle b^0 + y, p^* \rangle, p^* \in P^*,$$

$$\langle e, y \rangle \leq V, y \geq 0,$$

Или в каноническом виде:

$$Q(V) = \max v; \quad (41)$$

$$v - \langle p^*, y \rangle \leq \langle b^0, p^* \rangle, p^* \in P^*;$$

$$\langle e, y \rangle \leq V, y \geq 0.$$

Для доказательства полилинейности функции $Q(V)$ остается записать задачу (41) в двойственном виде, которая сводится к конечному минимуму линейных функций от v . Отсюда же получается точная формула для ее обобщенного дифференциала. Из полилинейности и обобщенной дифференцируемости функции $Q(V)$ будет следовать полилинейность и обобщенная дифференцируемость функции менеджера $x(V)$.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ МЕНЕДЖЕРА

Вначале получим выражение для обобщенного дифференциала функции $Q(V)$. Для этого запишем задачу (41) в скалярном виде:

$$\langle c, \bar{y} \rangle = 1^* y + 0^* y_1 + \dots + 0^* y_n \rightarrow \max$$

$$\begin{pmatrix} 1 - p_1^* & \dots & -p_n^* \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 - p_1^k & \dots & -p_n^k \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{(k+1) \times (n+1)} \cdot \begin{pmatrix} v \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}_{n+1} \leq \quad (42)$$

$$\leq \begin{pmatrix} \langle y^0, p^1 \rangle \\ \dots & \dots \\ \langle y^0, p^k \rangle \\ \dots & V \end{pmatrix}_{k+1}, \bar{y} = (v, y^t)', \bar{y} \geq 0.$$

Здесь $\{p^1, p^2, \dots, p^k\}$ – множество крайних точек выпуклого многогранного множества P^0 оптимальных решений двойственной задачи (38).

Двойственной к (41) будет задача:

$$\langle s, \bar{r} \rangle = \langle y^0, r_1 \rangle r_1 + \dots$$

$$\dots + \langle y^0, r_k \rangle r_k + V^* r_{k+1} \rightarrow \min;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ -p_1^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -p_1^k & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_n^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -p_n^k & \dots & 1 \end{pmatrix}_{(n+1) \times (k+1)} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_{k+1} \end{pmatrix}_{k+1} \geq \quad (43)$$

$$\geq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}_{n+1}, \bar{r} = (r^1, r_{k+1})', \bar{r} \geq 0.$$

В векторной форме двойственная задача (43) имеет вид:

$$Q(Z) = \min(r^t P^* y^0 + V r_{k+1}); \quad (44)$$

$$\langle e, r \rangle \geq 1, r \geq 0;$$

$$r_{k+1} \geq \langle p^j, r \rangle, j = 1, 2, \dots, k.$$

Или в эквивалентной форме:

$$Q(Z) = \min(\langle r, P^* y^0 \rangle + V r_{k+1}); \quad (45)$$

$$\langle e, r \rangle \geq 1, r \geq 0;$$

$$r_{k+1} \geq \max_{j=1, \dots, k} \langle p^j, r \rangle.$$

Здесь $P^* = (p^1, \dots, p^k)_{n \times k}$. С учетом минимизации по r неравенства в ограничениях задачи (45) можно заменить на равенства:

$$Q(Z) = \min(\langle r, P^* y^0 \rangle + V r_{k+1}); \quad (46)$$

$$\langle e, r \rangle = 1, r \geq 0;$$

$$r_{k+1} = \max_{j=1, \dots, k} \langle p^j, r \rangle.$$

Исключая переменную r_{k+1} приходим к задаче:

$$Q(Z) = \min(\langle r, P^* y^0 \rangle + V \max_{j=1, \dots, k} \langle p^j, r \rangle); \quad (47)$$

$$\langle e, r \rangle = 1, r \geq 0.$$

Окончательно задаче (47) можно придать минимаксную форму:

$$Q(Z) = \min, \max_j (\langle r, P^* y^0 \rangle + V \langle p^j, r \rangle);$$

$$\langle e, r \rangle = 1, r \geq 0.$$

Однако для вычисления обобщенного дифференциала нужно использовать все-таки задачу (44), поскольку для этого нам потребуются все крайние точки $\{r^1, \dots, r^l\}$ множества R^0 ее решений, которые можно найти симплекс-методом. При этом обобщенный дифференциал функции $Q(V)$ будет иметь вид:

$$DQ(V) = \min_{m=1, \dots, l} \Delta V^* r_{k+1}^m = \min_{m=1, \dots, l} \Delta V^* \max_{j=1, \dots, k} \langle p^j, r^m \rangle = \quad (48)$$

$$= \Delta V \min_{m=1, \dots, l} \max_{j=1, \dots, k} \langle p^j, r^m \rangle, \Delta V \geq 0.$$

В силу (22) обобщенный дифференциал функции $x(v)$ будет иметь вид:

$$DX(v) = \frac{DQ(v) - g\Delta V}{i} = \frac{\Delta V}{i} \left(\min_{m=1, \dots, l} \max_{j=1, \dots, k} \langle p^j, r^k \rangle - g \right), \Delta V \geq 0. \quad (49)$$

Имея дифференциал функции $x(v)$ можно приближенно вычислить ее значение в точке $v + \Delta v$:

$$x(v + \Delta v) \approx x(v) + DX(v). \quad (50)$$

Используя приближенное равенство (50), можно аппроксимировать линию менеджера от известного начального значения $x(0)$ с выбранным достаточно малым шагом Δv , что позволяет практически построить линию менеджера с любой точностью.

6. АППРОКСИМАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА НА ОСНОВЕ МЕТОДА НАИБЫСТРЕЙШЕГО ПОДЪЕМА

Вначале рассмотрим случай дифференцируемости функции доходности $q(v)$, когда двойственная задача (39) имеет единственное решение:

$$p^* = p^*(y^*),$$

где y^* – какое-то решение задачи (37) в определении (36) функции $q(v)$.

Пусть ресурс v получил приращение $\Delta v > 0$ и $y^* + \Delta y^*$ – какое-то соответствующее решение задачи (37) в определении (36) функции $q(v + \Delta v)$. Тогда приращение y^* можно аппроксимировать приращением:

$$\Delta y^* \approx \lambda p^*(y^*) \quad (51)$$

вдоль направления наибоыстрейшего подъема p^* функции $q(y^*)$, определенной в (37). Поскольку единственный вектор $p^* = p^*(y^*)$ является в этом случае ее градиентом и справедливо приближенное равенство:

$$q(y^* + \Delta y^*) \approx q(y^*) + Dq(y^*) = q(y^*) + \langle p^*, \Delta y^* \rangle. \quad (52)$$

Величину шага λ в (51) вдоль направления наибоыстрейшего возрастания функции $q(y^*)$ следует определить из ресурсного ограничения:

$$\Delta v = \langle \Delta y^*, p^* \rangle = \lambda \langle e, p^* \rangle, \quad (52)^*$$

откуда следует равенство:

$$\lambda = \frac{\Delta v}{\langle e, p^* \rangle}. \quad (53)$$

Отсюда с учетом (52) получим цепочку равенств:

$$Q(v + \Delta v) = q(y^* + \Delta y^*) \approx q(y^*) + \frac{\langle p^*, p^* \rangle}{\langle e, p^* \rangle} \Delta v = Q(z) + \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle} \Delta v. \quad (54)$$

Откуда получаем приближенное выражение для дифференциала функции доходности:

$$DQ(v) \approx \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle} \Delta v, \Delta v \geq 0 \quad (55)$$

Рассмотрим теперь случай, когда двойственная задача (39) имеет несколько решений $\{p^1, p^2, \dots, p^k\}$. Тогда направление наискорейшего подъема r^* функции $q(y^*)$, определенной в (37), определяется из условия максимума ее производной по направлению:

$$\frac{\partial q(y^*)}{\partial r} = \min_{j=1, \dots, k} \langle r, p^j \rangle \rightarrow \max_{r, \|r\|=1}. \quad (56)$$

В частности, если $k = 1$, т.е. решение двойственной задачи (39) единственно, то мы имеем предыдущий случай:

$$r = p^1 = p^*(y^*). \quad (57)$$

В общем случае аналог формула (55) будет иметь вид:

$$DQ(v) \approx \frac{\Delta v}{\langle e, r^* \rangle} \min_{j=1, \dots, k} \langle r^*, p^j \rangle = \frac{\Delta v}{\langle e, r^* \rangle} \max_{r, \|r\|=1} \min_{j=1, \dots, k} \langle r, p^j \rangle, \Delta v \geq 0. \quad (58)$$

и доказываться из цепочки равенств аналогичной (54). Любопытно сравнить полученное приближенное выражение дифференциала функции доходности (58) с точным выражением (48):

$$DQ(v) = \Delta v \min_{m=1, \dots, l} \max_{j=1, \dots, k} \langle p^j, r^m \rangle. \quad (59)$$

По крайней мере, в дифференцируемом случае, когда $k = 1$, справедливо неравенство:

$$DQ(v) \approx \frac{\Delta v}{\langle e, r^* \rangle} \max_{r, \|r\|=1} \min_{j=1, \dots, k} \langle r, p^j \rangle \geq \Delta v \min_{m=1, \dots, l} \max_{j=1, \dots, k} \langle p^j, r^m \rangle, \Delta v \geq 0. \quad (60)$$

Действительно, в этом случае неравенство (60) будет иметь вид:

$$DQ(v) \approx \frac{\Delta v}{\langle e, r^* \rangle} \max_{r, \|r\|=1} \langle r, p^1 \rangle \geq \Delta v \min_{m=1, \dots, l} \langle p^1, r^m \rangle, \Delta v \geq 0. \quad (61)$$

Минимум в правой части достигается на каком-то r^m для которого $\langle e, r^m \rangle = 1$. Поскольку это угловая точка множества допустимых решений задачи (44), то все координаты вектора r^m , кроме одной равны нулю. Из условия $\langle e, r^m \rangle = 1$ следует, что эта единственная координата равна единице, откуда, в частности, следует, что $\|r^m\| = 1$, что вместе с предыдущим условием дает:

$$DQ(z) \approx \frac{\Delta v}{\langle e, r^* \rangle} \max_{r, \|r\|=1} \langle r, p^1 \rangle \geq \frac{\Delta v}{\langle e, r^m \rangle} \langle r^m, p^1 \rangle = \Delta v \langle r^m, p^1 \rangle = \Delta v \min_{m=1, \dots, l} \langle p^1, r^m \rangle, \Delta v \geq 0, \quad (62)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, в дифференцируемом случае приближенная формула для дифференциала дает не меньшее приращение, чем точная. Поскольку точное значение дифференциала представляет собой главную часть приращения функции доходности $q(v)$ за счет положительного приращения ресурса $\Delta v > 0$, то оно представляет собой как бы изменение максимума по значению в задаче (36) в линейном приближении. Поэтому никакое другое изменение этого значения в

линейном приближении не может дать большее значение. Отсюда следует, что должно выполняться обратное к (61) неравенство, т.е. (61) выполняется как равенство:

$$DQ(V) = \frac{\Delta V}{\langle e, r^* \rangle} \max_{r, \|r\|_1=1} \langle r, p^1 \rangle = \Delta V \min_{m=1, \dots, l} \langle p^1, r^m \rangle, \Delta V \geq 0. \tag{62}^*$$

Таким образом, по крайней мере, в дифференцируемом случае приближенное выражение для дифференциала совпадает с точным. Поскольку функция доходности $Q(V)$ является полилинейной, то она дифференцируема везде кроме, быть может, конечного числа точек. Аппроксимация обобщенного дифференциала для функции менеджера $x(V)$ из аппроксимации обобщенного дифференциала функция доходности $Q(V)$ получается по формуле аналогичной (49):

$$DX(V) \approx \frac{DQ(V) - g \Delta V}{i} = \frac{\Delta V}{i} \left(\max_{r, \|r\|_1=1} \min_{j=1, \dots, k} \langle p^j, r \rangle - g \right), \Delta V \geq 0. \tag{63}$$

Поэтому аппроксимация функции менеджера $x(V)$ по формуле (50) может быть получена и с использованием приближенной формулы для обобщенного дифференциала, если мы будем двигаться по точкам ее дифференцируемости. Это возможно сделать, если условия принадлежности к кускам ее линейности задаются явно в виде линейных неравенств, которые можно будет проверить. Для корректности этой схемы нужно рандомизировать уравнение (50) по схеме, предложенной в [7]:

$$X(V_{s+1}) \approx X(V_s) + DX(V_s + h\rho^s); V_{s+1} = V_s + \Delta V; s = 1, 2, \dots; V_0 = 0. \tag{64}$$

Здесь $DX(V) = X'(V) \Delta V, \tag{65}$

$X'(V) = (Q'(V) - g) / i$ – производная полилинейной функции $x(V)$ в точке V , которая существует для всех V кроме, быть может, конечного множества точек в силу аналогичного свойства функции $Q(V)$ в (22).

Величина $h > 0$ задает точность аппроксимации функции менеджера $x(V)$ ее осредненной функцией:

$$X_h(V) = \int_{E_1} X(V + h\rho) \omega(\|\rho\|_0). \tag{66}$$

Ядро осреднения здесь определяется, например, по формуле [9]:

$$\omega(\|\rho\|_0) = \begin{cases} 2^{-1}, & \rho \in O \\ 0, & \rho \notin O \end{cases}. \tag{67}$$

Здесь $\|\rho\|_0 = |\rho|; O = \{\rho \in E_n, \|\rho\|_0 \leq 1\}. \tag{68}$

Известно [9], что осредненная функция от липшицевой функции будет дифференцируемой и

$$|X_h(V) - X(V)| \leq Lh, \tag{69}$$

где L – соответствующая константа Липшица.

Пусть величина ρ^s в (64) есть s -ю независимую реализацию случайной величины (с.в.) ρ , равномерно

распределенной (р.р.) на O . Тогда случайный процесс [13] почти наверное (п.н.) определен и в среднем совпадает с осредненной функцией $\{X_h(V_s)\}$ [9], которая аппроксимирует исходную функцию менеджера на дискретной решетке $\{V_s\}$ с точностью $O(h)$ в силу (69).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что линия финансового менеджера является графиком неубывающей, вогнутой и кусочно-линейной функции. Последнее при естественном условии неотрицательности финансового рычага компании. И получена формула для ее обобщенного дифференциала в смысле [4, 5]. Это позволяет использовать численный метод для ее построения в общем случае.

Литература

1. Ашманов С.А. Линейное программирование [Текст] / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1981.
2. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2011. – №3. – С. 76-84.
3. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в однопараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2011. – №2. – С. 242-247.
4. Брейли Р. Принципы корпоративных финансов [Текст] / Р. Брейли, С. Майерс. – М.: ИНФРА-М, 1999.
5. Ван Хорн Дж. К. Основы финансового менеджмента [Текст] / Дж. К. Ван Хорн. – М.: Финансы и статистика, 2004.
6. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс [Текст] / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М.: Наука, 1972.
7. Завриев С.К. Стохастический конечно-разностный алгоритм минимизации функции максимина [Текст] / С.К. Завриев, А.Г. Перевозчиков // Ж-л вычислительной математики и математической физики. – 1991. – Т. 30; №4. – С. 629-633.
8. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст] / Deloitte&Touche. Декабрь 2003 – март 2005.
9. Михалевич В.С. и др. Методы невыпуклой оптимизации [Текст] / В.С. Михалевич, А.М. Гупал, В.И. Норкин. – М.: Наука, 1987.
10. Мищенко А.В. Модели управления производственно-финансовой деятельностью предприятия в условиях привлечения заемного капитала [Текст] / А.В. Мищенко, О.А. Артеменко // Финансовая аналитика. – 2012. – №42. – С. 2-13.
11. Оценка бизнеса [Текст]: учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М.: Финансы и статистика, 2002.
12. Федоров В.В. Численные методы максимина [Текст] / В.В. Федоров. – М.: Наука, 1979.
13. Шарп У. и др. Инвестиции [Текст] / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли; пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1998. – XII, 1028 с.

Перевозчиков Александр Геннадьевич

Лесик Илья Александрович,

Ключевые слова

Собственный капитал компании; стоимость собственного капитала компании; доходный подход; метод прямой капитализации прибыли; инвестиции в основные средства компании; заемные средства компании на долгосрочной основе; зависимость стоимости от объема инвестиций; линия финансового менеджера; монотонность; вогнутость и кусочная линейность линии финансового менеджера.

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается простейшая модель инвестиций в основные средства компании с использованием заемного капитала. В качестве критерия предлагается использовать прямой критерий стоимости собственного капитала компании. Стоимость собственного капитала может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода, что позволяет поставить задачу исследования стоимости компании от объема заемных средств. Эту зависимость можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности роста стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов.

Показано, что линия финансового менеджера является графиком возрастающей, вогнутой и кусочно-линейной функции и получена формула для ее обобщенного дифференциала. Это позволяет использовать численный метод для ее построения и решает в определенном смысле поставленную задачу в общем случае.

Вот основные идеи, заложенные в нашей новой работе. Она предназначена для аспирантов и докторантов, специализирующихся в области финансового менеджмента предприятия, а также для действующих профессиональных оценщиков инвестиций и бизнеса.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.Г.Перевозчикова, Лесика И.А. может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н, проф., зав. кафедрой бухгалтерского учета и аудита, проректор по научной работе Тверской государственной сельскохозяйственной академии

[Перейти на Главное МЕНЮ](#)
[Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ](#)