8.2. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИЙ В ОСНОВНЫЕ СРЕДСТВА КОМПАНИИ

Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., проф., академик РАЕН, проф. кафедры математики и информатики Тверской государственной сельскохозяйственной академии;
Лесик И.А., программист отдела инновационных ИТ в обучении, Центр разработки и внедрения технологий управления ОАО «НПО Русбитех», г. Тверь

Перейти на Главное МЕНЮ
Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ

Рассматривается простейшая модель инвестиций в основные средства компании с использованием заемного капитала. В качестве критерия предлагается использовать прямой критерий стоимости собственного капитала компании. Стоимость собственного капитала может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода, что позволяет поставить задачу исследования стоимости компании от объема заемных средств. Эту зависимость можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности роста стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов. Показано, что линия финансового менеджера является графиком возрастающей, вогнутой и кусочно-линейной функции и получена формула для ее обобщенного дифференциала. Это позволяет использовать численный метод для ее построения и решает в определенном смысле поставленную задачу в общем случае.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается простейшая модель инвестиций в основные средства компании с использованием заемного капитала. Эта модель представляет собой частный случай моделей предложенных в [10] для изучения влияния заемного капитала на рост ее стоимости в процессе инвестиций в основные и оборотные средства компании. Целью финансового менеджмента компании в долгосрочной перспективе, как известно [4, 5], является обеспечение роста ее стоимости за счет инвестиции собственных и заемных средств в основные и оборотные средства компании.

В отличие от [10], где используется косвенный критерий валовой прибыли, в качестве критерия предлагается использовать прямой критерий стоимости собственного капитала компании. Эта стоимость в простейшем случае может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода [8, 11, 13], что позволяет поставить задачу исследования стоимости компании от объема заемных средств. Эту зависимость можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности по росту стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов.

В настоящей работе показано, что линия финансового менеджера является графиком возрастающей, вогнутой и кусочно-линейной функции и получена формула для ее обобщенного дифференциала в смысле [2, 3]. Это позволяет использовать численный метод для ее построения и решает в определенном смысле поставленную задачу в общем случае.

Вот основные идеи, заложенные в нашей новой работе. Она предназначена для аспирантов и докторантов, специализирующихся в области финансового менеджмента предприятия, а также для действующих профессиональных оценщиков инвестиций и бизнеса.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Начнем с классической производственной задачи [3], которую мы возьмем за основу нашей простейшей модели инвестиций в основные средства компании. Мы приводим классические результаты исключительно с целью разъяснения сути предлагаемых инноваций. Мы воспользуемся более привычными для нас обозначениями, введенными в работах [2, 3].

1.1. Производственная задача

При производстве n видов продукции предприятия используется m видов ресурсов. Известно:

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ – запасы ресурсов;

$a_{ij}\ (i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots, n)$ – расход i-го вида ресурса на изготовление единицы j-й продукции;

$c_j\ (j = 1,2,\ldots, n)$ – цена единицы j-й продукции.

Требуется составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

Обозначим через $x_j\ (j = 1,2,\ldots, n)$ – объем выпуска j-й продукции. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется фазовым вектором системы и характеризует ее состояние. Учитывая, что $c_j x_j$ – прибыль от реализации всего объема j-й продукции, а $a_{ij} x_j$ – затраты i-го вида ресурса на весь объем выпуска j-й продукции, запишем математическую модель задачи. С учетом не отрицательности выпуска продукции получим:

$$z(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots c_n x_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m; \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots, n.$$

Или в векторной форме:

$$z(x) = \langle c, x \rangle \to \max, \qquad (2)$$
$$Ax \le b,\ x \ge 0.$$

Здесь

$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)'$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)'$ – векторы-столбцы;

$\langle c, x \rangle$ – скалярное произведение векторов c, x в евклидовом пространстве E_n;

$A = \|a_{ij}\|$ – матрица $m * n$.

Задача 1.1

При производстве двух видов продукции используются три вида ресурсов. Составить математическую модель и найти план выпуска продукции, обеспечивающий максимум дохода (табл. 1).

Таблица 1

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции 1	Расход сырья на единицу продукции 2
20	2	1
12	1	1
30	1	3
Цена	40	50

Решение.

$$z(x) = 40x_1 + 50x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20; \\ x_1 + x_2 \le 12; \\ x_1 + 3x_2 \le 30; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0.$$

Решая эту задачу графическим методом, поскольку в ней только две переменных, получим единственное оптимальное решение:

$$x_1^* = 3, x_2^* = 9, z^* = z(x^*) = 40 \cdot 3 + 50 \cdot 9 = 570 .$$

1.2. Двойственные оценки и устойчивость задачи

Обозначим через $\Phi(b,c)$ оптимальное значение критерия в задаче (2), при фиксированном b – через $f(c)$, а при фиксированном c – через $F(b)$. Тогда, как показано в [1], функция $\Phi(b,c)$ – вогнута по b и выпукла по c, и значит, непрерывна по этим переменным.

Задачей двойственной к (2) называется задача:

$$\begin{aligned} &\langle b, p \rangle \to \min, \\ &A'p \ge c, p \ge 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь

$p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – вектор двойственных переменных (оценок);

A' – транспонированная матрица A.

Оказывается, что если двойственная задача (3) имеет единственное решение p^*, то функция $F(b)$ для задачи (2) дифференцируема и

$$\partial F(b) / \partial b_i = p_i^*, i = 1,2,..., m$$

[1], т.е. ее дифференциал равен:

$$dF(b) = \langle p^*, db \rangle . \qquad (4)$$

Здесь

$db = (db_1, db_2, ..., db_m)$ – вектор возможных приращений вектора запасов $b = (b_1, b_2, ..., b_m)'$.

Это позволяет исследовать устойчивость результата задачи (2) относительно малых изменений вектора параметров $b = (b_1, b_2, ..., b_m)'$ и представляет простейшую модель изучения устойчивости системы.

Задача 1.2

Для производственной задачи 1 составить математическую модель двойственной задачи и найти соответствующий вектор оценок.

Решение. Строго говоря, нужно рассмотреть варианты, когда одно из неравенств будет строгим, но в данном случае минимум критерия достигается, когда оба они выполняются как равенства. С учетом этого замечания получим задачу:

$$z(p) = 20 p_1 + 12 p_2 + 30 p_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2p_1 + p_2 + p_3 = 40; \\ p_1 + p_2 + 3p_3 = 50; \end{cases}$$

$$p_j \ge 0.$$

Решая эту задачу методом исключения переменных, поскольку в ней только одна небазисная переменная, получим единственное оптимальное решение, соответствующее случаю, когда оба ограничения активны:

$$p_1^* = 0, p_2^* = 35, p_3^* = 5, z^* =$$
$$= z(p^*) = 20 * 0 + 12 * 35 + 30 * 5 = 570 .$$

Заметим, что оптимальное значение прямой и двойственной задачи совпадает, как известно из теории двойственности. Это обстоятельство может служить для взаимного контроля правильности полученных решений.

Если двойственная задача (3) имеет не единственное решение, то функция $F(b)$ будет только дифференцируемой по направлениям, как показано в [1].

Пусть $\{p^1, p^2, ..., p^k\}$ – множество крайних точек выпуклого многогранного множества P^0 оптимальных решений двойственной задачи (3), тогда производную функции $F(b)$ по направлению $s, \|s\| = 1$, можно найти по формуле [1]:

$$\frac{\partial F(b)}{\partial s} = \lim \frac{F(b + \lambda s) - F(b)}{\lambda} = \min_{1 \le r \le k} \langle s, p^r \rangle . \qquad (5)$$

Это позволяет исследовать устойчивость результата задачи (2) относительно малых изменений вектора параметров $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$ в произвольном направлении $s, \|s\| = 1$. Здесь $\|s\|$ – длина вектора s.

В частности, имеет место формула:

$$\begin{aligned} &\Delta F(b) = F(b + \lambda s) - F(b) = \\ &= \min_{1 \le r \le k} \langle s, p^k \rangle * \lambda + o(\lambda). \end{aligned} \qquad (6)$$

Пусть $\{p^1, p^2, ..., p^l\}, l \ge k$, – объемлющее множество крайних точек выпуклого многогранного множества $P (P^0 \subseteq P)$ всех допустимых решений двойственной задачи (3).

Тогда функция $F(b)$ является функцией минимума конечного числа дифференцируемых функций и в частности кусочно-линейна:

$$F(b) = \min_{1 \le r \le l} \langle b, p^k \rangle . \qquad (7)$$

В этом случае $o(\lambda)/\lambda \to 0, \lambda \to 0$, равномерно по направлению $s, \|s\| = 1$ [6]. Полагая для любого приращения Δb:

$$s = \Delta b / \|\Delta b\|, \lambda = \|\Delta b\|, \qquad (8)$$

Получим из (6), что

$$\begin{aligned} &\Delta F(b) = F(b + \Delta b) - F(b) = \\ &= \min_{1 \le r \le k} \langle \Delta b, p^k \rangle + o(\|\Delta b\|). \end{aligned} \qquad (9)$$

Это позволяет определить обобщенный дифференциал в смысле [2, 3] функции минимума формулой:

$$dF(b) = \min_{1 \le r \le k} \langle \Delta b, p^k \rangle . \qquad (10)$$

Этот обобщенный дифференциал имеет все свойства обычного (кроме линейности по Δb) и может быть использован для приближенного вычисления приращения функции минимума:

$$\begin{aligned} &\Delta F(b) = F(b + \Delta b) - F(b) \approx \\ &\approx dF(b) = \min_{1 \le r \le k} \langle \Delta b, p^k \rangle . \end{aligned} \qquad (11)$$

Таким образом, обобщенный дифференциал представляет из себя минимум дифференциала критерия в (3) по параметру b, для тех крайних значений переменной p которые доставляют минимум в (3).

Пример 1.1

В задаче 2 решение оказалось единственным, поэтому ее значение (совпадающее со значением задачи 1) дифференцируемо по b, причем

$$dF(b) = \langle p^*, db \rangle = p_1 * \Delta b_1 + p_2 * \Delta b_2 + p_3 * \Delta b_3 .$$

Пусть, например, требуется определить приближенно, на сколько процентов изменится результат, если первый и третий запасы уменьшатся на 1%, а второй увеличится на 2%. В этом случае

$$\Delta b_1 = -0{,}01\, b_1 = -0{,}01 * 20 = -0{,}2;$$

$$\Delta b_2 = 0{,}02\, b_2 = 0{,}02 * 12 = 0{,}24;$$

$$\Delta b_3 = -0{,}01\, b_3 = -0{,}01 * 30 = -0{,}3.$$

И по формуле (14), в частности, получаем:

$$\Delta F(b) = F(b + \Delta b) - F(b) \approx dF(b) =$$

$$= 0 * (-0{,}2) + 35 \cdot 0{,}24 + 5 * (-0{,}3) = 6{,}9.$$

Это составит $\Delta F(b)/z^{*} * 100 = 6{,}9/570 * 100 = 1{,}2\%$ от оптимального значения задачи z^{*}.

Аналогично в задаче (2) ввести множество:

$$\{x^1, x^2, \ldots, x^p\}$$

крайних точек выпуклого многогранного множества X^0 оптимальных решений задачи (2). Пусть:

$\{x^1, x^2, \ldots, x^r\}, r \ge p,$ – объемлющее множество крайних точек выпуклого многогранного множества $X\,(X^0 \subseteq P)$ всех допустимых решений двойственной задачи (2).

Тогда функция $f(c)$ оптимального значения задачи (2) является функцией максимума конечного числа дифференцируемых функций:

$$f(c) = \max_{1 \le t \le r} \langle c, x^t \rangle. \qquad (12)$$

Это позволяет определить обобщенный дифференциал в смысле [2, 3] функции минимума формулой:

$$df(c) = \max_{1 \le t \le p} \langle \Delta c, x^t \rangle. \qquad (13)$$

Этот обобщенный дифференциал имеет все свойства обычного (кроме линейности по Δb) и может быть использован для приближенного вычисления приращения функции минимума:

$$\Delta f(c) = f(c + \Delta c) - f(c) \approx df(c) = \max_{1 \le t \le p} \langle \Delta c, x^t \rangle. \qquad (14)$$

Пример 1.2

В задаче 1 решение оказалось единственным, поэтому ее значение (совпадающее со значением задачи 1) дифференцируемо по b, причем

$$df(c) = \langle x^{*}, dc \rangle = x_1 * \Delta c_1 + x_2 * \Delta c_2.$$

Пусть, например, требуется определить приближенно, на сколько процентов изменится результат, если первая цена уменьшится на 2%, а вторая увеличится на 1%.

В этом случае

$$\Delta c_1 = -0{,}02\, c_1 = -0{,}02 * 40 = -0{,}8;$$

$$\Delta c_2 = 0{,}01\, c_2 = 0{,}01 * 50 = 0{,}5.$$

И по формуле (17), в частности, получаем:

$$\Delta f(c) = f(c + \Delta c) - f(c) \approx$$

$$\approx df(c) = 3 * (-0{,}8) + 9 \cdot 0{,}5 = 2{,}1.$$

Это составит $\Delta f(c)/z^{*} * 100 = 2{,}1/570 * 100 = 0{,}4\%$ от оптимального значения задачи z^{*}.

2. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИЙ

Перейдем теперь к простейшей модели инвестиций в основные средства компании с использованием заемного капитала z, следуя [10] и сохранив введенные обозначения. Для этого рассмотрим классическую производственную задачу при условии, что вектор ресурсов b получил приращение y. Это приращение может возникнуть от инвестиций в основные и оборотные средства или перепрофилирования производства [10]. В этой работе мы рассмотрим случай инвестиций в основные средства предприятия с использованием заемного капитала на долгосрочной основе. Предположим в связи с этим, что все ограничения производственной задачи (1) являются ограничениями по производственной мощности [10]. Тогда величины $b_i, i = 1,2,\ldots, m$, в правых частях ограничений задачи (1) равны соответственно:

$$b_i = (k_i + l_i)\tau_i, i = 1,2,\ldots, m, \qquad (15)$$

где

k_i – число единиц оборудования вида i, которое имеется на предприятии;

l_i – число дополнительных единиц оборудования вида i, приобретаемых за счет заемных средств;

τ_i – время эффективного использования оборудования вида i за рассматриваемый период, обычно – год. В этом случае величины коэффициентов a_{ij} интерпретируются как время t_{ij} загрузки оборудования вида i при выпуске одной единицы продукции j [10].

Предположим, что стоимость одной единицы оборудования вида i составляет d_i и на его увеличение выделена сумма y_i из общей суммы инвестиций Z. Тогда без учета целочисленности переменных k_i, l_i получим:

$$k_i = b_i^0 / d_i, l_i = y_i / d_i, i = 1,2,\ldots, m. \qquad (16)$$

Здесь b_i^0 – стоимость единиц оборудования вида i, которое имеется на предприятии. Подставляя (16) в (15) получим:

$$b_i = (b_i^0 + y_i)\tau_i / d_i, i = 1,2,\ldots, m, \qquad (17)$$

Полагая:

$$a_{ij}^0 = t_{ij} d_i / \tau_i, \qquad (18)$$

приходим к нормированной задаче (1):

$$q(y) = \max_x \langle c, x \rangle;$$
$$A^0 x \le b^0 + y, x \ge 0. \qquad (19)$$

Эта форма наиболее удобна для изучения непосредственного влияния инвестиций в основные средства на валовую прибыль предприятия, которая отличается от избранного критерия на постоянные расходы C_0 предприятия.

Сравнивая функцию (19) с функцией $F(b)$, введенной в п. 1.2, убеждаемся, что

$$q(y) = F(b^0 + y). \qquad (20)$$

В силу вогнутости и кусочно-линейности (полилинейности) $F(b)$, следует вогнутость и кусочная линейность функции $q(y)$ в (19).

Введем функцию:

$$Q(V) = \max_y q(y);$$
$$\langle e, y \rangle = V, y \ge 0. \qquad (21)$$

Здесь $e = (1,...,1)' \in E_m$ – вектор столбец. Эта функция показывает, как валовая прибыль, отличающаяся от избранного критерия на постоянные расходы C_0 предприятия, зависит от объема заемного капитала V на долгосрочной основе, доступного компании для финансирования инвестиций в основные средства.

Из вогнутости функции $q(y)$ и линейности ограничений в (21) в силу леммы 1.8 в [12] функция $Q(V)$ будет также вогнутой. Из кусочно-линейности функции $q(y)$ следует кусочная линейность функции $Q(V)$ в (21), как будет показано далее при выводе формула для ее обобщенного дифференциала, поскольку и то и другое следует из представления этой функции в виде минимума от конечного числа линейных по V функций.

Теперь мы можем определить стоимость собственного капитала $X = X(V)$ компании в результате инвестиции заемного капитала V на долгосрочной основе в основные средства. Эта стоимость в простейшем случае может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода [8, 11, 13]:

$$X(V) = \frac{Q(V) - C_0 - gV}{i}. \tag{22}$$

Здесь

g – средняя стоимость капитала на долгосрочной основе;

i – подходящая ставка капитализации валовой прибыли компании. Из вогнутости и кусочно-линейности функции $Q(V)$ следует вогнутость и кусочная линейность функции $X(V)$.

Зависимость (22) можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности по росту стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов.

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РОСТА СТОИМОСТИ

Перейдем теперь к рассмотрению условий, при которых возможен рост стоимости собственного капитала компании в результате инвестиций в основные средства с использованием заемного капитала на долгосрочной основе, т.е. когда выполняется неравенство:

$$X(V) \ge X(0), \tag{23}$$

при всех $V > 0$.

Положим

$$y = \lambda b^0, \tag{24}$$

где $\lambda > 0$ определяется из ограничения (21):

$$\langle e, y \rangle = V. \tag{25}$$

Откуда получим:

$$\lambda = \frac{V}{\langle e, b^0 \rangle}. \tag{26}$$

Тогда вектор (24) является допустимым вектором в задаче (21) и следовательно справедливо неравенство:

$$Q(V) \ge q(y). \tag{27}$$

В силу (24) и линейности ограничений вектор $(1+\lambda)x$ будет допустимым для задачи (19) и справедливо неравенство:

$$q(y) \ge (1+\lambda)\langle c, x \rangle = (1+\lambda)q(0). \tag{28}$$

Отсюда в силу (27) следует неравенство:

$$Q(V) \ge (1+\lambda)q(0). \tag{29}$$

Далее, если $V = 0$, то из ограничения (25) следует, что $y = 0$ – единственное допустимое решение задачи (21) и следовательно:

$$Q(0) = q(0). \tag{30}$$

Поэтому в силу (29):

$$Q(V) \ge (1+\lambda)Q(0). \tag{31}$$

Используя полученное неравенство, имеем:

$$X(V) - X(0) = \frac{Q(V) - C_0 - gV}{i} - \frac{Q(0) - C_0}{i} = = \frac{Q(V) - Q(0) - gV}{i} \ge \frac{\lambda Q(0) - gV}{i} = = V\frac{Q(0)/\langle e, b^0 \rangle - g}{i}. \tag{32}$$

Теперь из (32) следует, что достаточным условием роста стоимости собственного капитала компании является условие:

$$\frac{Q(0)}{\langle e, b^0 \rangle} - g \ge 0. \tag{33}$$

Здесь $\langle e, b^0 \rangle$ – стоимость оборудования, которое имеется на предприятии. Величину

$$i_0 = \frac{Q(0)}{\langle e, b^0 \rangle}, \tag{34}$$

в (33) можно интерпретировать, как доходность на собственный капитал компании, определенный затратным подходом [8, 11]. Поэтому (33) представляет собой обычное условие неотрицательности финансового рычага компании:

$$i_0 \ge g. \tag{35}$$

(в ф-х (33,34) добавлен индекс нуль у i, поскольку это другая величина, в остальных формулах сохранено прежнее обозначение без индекса – А.Г.)

На самом деле это условие монотонности функции $X = X(Z)$ из которого и следует условие (23) неубывания стоимости собственного капитала компании, использующей заемные средства на долгосрочной основе для инвестирования в основные средства.

4. ПОЛИЛИНЕЙНОСТЬ И ОБОБЩЕННАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ МЕНЕДЖЕРА

Вначале получим представление функции $Q(V)$ в виде минимума от конечного числа линейных по V функций, анонсированного в п. 2. Проблема была в том, чтобы доказать, что функция доходности:

$$Q(V) = \max_y q(y); \quad \langle e, y \rangle \le V, y \ge 0, \tag{36}$$

кусочно-линейна. Здесь

$$q(y)=F(b^0+y)=\max_x \langle c,x\rangle,\quad Ax\le b^0+y,\ x\ge 0. \tag{37}$$

Для функции (37) можно использовать двойственное представление:

$$q(y)=F(b^0+y)=\min_p \langle b^0+y,p\rangle;\quad A'p\ge c,\ p\ge 0. \tag{38}$$

Переходя к минимуму по конечному множеству P^* всех крайних точек p^* допустимого множества P задачи (38), получаем представление функции (37) в виде минимума конечного числа линейных:

$$q(y)=F(b^0+y)=\min_{p^*}\langle b^0+y,p^*\rangle. \tag{39}$$

Отсюда и выводится ее линейность. Для доказательства линейности функции (36) представим ее теперь с использованием (39) в виде задачи ЛП:

$$Q(V)=\max v,\quad v\le\langle b^0+y,p^*\rangle,\ p^*\in P^*,\quad \langle e,y\rangle\le V,\ y\ge 0, \tag{40}$$

Или в каноническом виде:

$$Q(V)=\max v;\quad v-\langle p^*,y\rangle\le\langle b^0,p^*\rangle,\ p^*\in P^*;\quad \langle e,y\rangle\le V,\ y\ge 0. \tag{41}$$

Для доказательства полилинейности функции $Q(V)$ остается записать задачу (41) в двойственном виде, которая сводится к конечному минимуму линейных функций от V. Отсюда же получается точная формула для ее обобщенного дифференциала. Из полилинейности и обобщенной дифференцируемости функции $Q(V)$ будет следовать полилинейность и обобщенная дифференцируемость функции менеджера $X(V)$.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ МЕНЕДЖЕРА

Вначале получим выражение для обобщенного дифференциала функции $Q(V)$. Для этого запишем задачу (41) в скалярном виде:

$$\langle c,\bar y\rangle=1*y+0*y_1+\ldots+0*y_n\to\max$$

$$\begin{pmatrix}1 & -p_1^1* & \ldots & -p_n^1*\\ \ldots & \ldots & & \ldots\\ 1 & -p_1^k* & \ldots & -p_n^k*\\ 0 & 1 & \ldots & 1\end{pmatrix}_{(k+1)\times(n+1)} * \begin{pmatrix}v\\ y_1\\ \ldots\\ y_n\end{pmatrix}_{n+1}\le \begin{pmatrix}\langle y^0,p^1*\rangle\\ \ldots\\ \langle y^0,p^k*\rangle\\ V\end{pmatrix}_{k+1},\ \bar y=(v,y')',\ \bar y\ge 0. \tag{42}$$

Здесь $\{p^1,p^2,\ldots,p^k\}$ – множество крайних точек выпуклого многогранного множества P^0 оптимальных решений двойственной задачи (38).

Двойственной к (41) будет задача:

$$\langle s,\bar r\rangle=\langle y^0,r_1\rangle r_1+\ldots+\langle y^0,r_k\rangle r_k+V*r_{k+1n}\to\min;$$

$$\begin{pmatrix}1 & \ldots & 1 & \ldots & 1\ldots 0\\ -p_1^1* & \ldots & -p_1^k* & 1\\ \ldots & & \ldots & \ldots\\ -p_n^1* & \ldots & -p_n^k* & 1\end{pmatrix}_{(n+1)\times(k+1)}\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\\ \ldots\\ r_{k+1}\end{pmatrix}_{k+1}\ge\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \ldots\\ 0\end{pmatrix}_{n+1},\ \bar r=(r',r_{k+1})',\ \bar r\ge 0. \tag{43}$$

В векторной форме двойственная задача (43) имеет вид:

$$Q(Z)=\min(r'P'*y^0+Vr_{k+1});\quad \langle e,r\rangle\ge 1,\ r\ge 0;\quad r_{k+1}\ge\langle p^j,r\rangle,\ j=1,2,\ldots,k. \tag{44}$$

Или в эквивалентной форме:

$$Q(Z)=\min(\langle r,P'*y^0\rangle+Vr_{k+1});\quad \langle e,r\rangle\ge 1,\ r\ge 0;\quad r_{k+1}\ge\max_{j=1,\ldots,k}\langle p^j,r\rangle. \tag{45}$$

Здесь $P^*=(p^1*,\ldots,p^k*)_{n\times k}$. С учетом минимизации по r неравенства в ограничениях задачи (45) можно заменить на равенства:

$$Q(Z)=\min(\langle r,P'*y^0\rangle+Vr_{k+1});\quad \langle e,r\rangle=1,\ r\ge 0;\quad r_{k+1}=\max_{j=1,\ldots,k}\langle p^j,r\rangle. \tag{46}$$

Исключая переменную r_{k+1} приходим к задаче:

$$Q(Z)=\min(\langle r,P'*y^0\rangle+V\max_{j=1,\ldots,k}\langle p^j,r\rangle);\quad \langle e,r\rangle=1,\ r\ge 0. \tag{47}$$

Окончательно задаче (47) можно придать минимаксную форму:

$$Q(Z)=\min_r\max_j(\langle r,P'*y^0\rangle+V\langle p^j,r\rangle);\quad \langle e,r\rangle=1,\ r\ge 0.$$

Однако для вычисления обобщенного дифференциала нужно использовать все-таки задачу (44), поскольку для этого нам потребуются все крайние точки $\{r^1,\ldots,r^l\}$ множества R^0 ее решений, которые можно найти симплекс-методом. При этом обобщенный дифференциал функции $Q(V)$ будет иметь вид:

$$DQ(V)=\min_{m=1,\ldots,l}\Delta V*r^j_{k+1}=\min_{m=1,\ldots,l}\Delta V*\max_{j=1,\ldots,k}\langle p^j,r^m\rangle=\Delta V\min_{m=1,\ldots,l}\max_{j=1,\ldots,k}\langle p^j,r^m\rangle,\ \Delta V\ge 0. \tag{48}$$

В силу (22) обобщенный дифференциал функции $X(V)$ будет иметь вид:

$$DX(V)=\frac{DQ(V)-g\Delta V}{i}= \\ =\frac{\Delta V}{i}\left(\min_{m=1,\dots,l}\max_{j=1,\dots,k}\left\langle p^j,r^k\right\rangle-g\right),\Delta V\ge 0. \tag{49}$$

Имея дифференциал функции $X(V)$ можно приближенно вычислить ее значение в точке $V+\Delta V$:

$$X(V+\Delta V)\approx X(V)+DX(V). \tag{50}$$

Используя приближенное равенство (50), можно аппроксимировать линию менеджера от известного начального значения $X(0)$ с выбранным достаточно малым шагом ΔV, что позволяет практически построить линию менеджера с любой точностью.

6. АППРОКСИМАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА НА ОСНОВЕ МЕТОДА НАИБЫСТРЕЙШЕГО ПОДЪЕМА

Вначале рассмотрим случай дифференцируемости функции доходности $Q(V)$, когда двойственная задача (39) имеет единственное решение:

$p^*=p^*(y^*)$,

где y^* – какое-то решение задачи (37) в определении (36) функции $Q(V)$.

Пусть ресурс V получил приращение $\Delta V>0$ и $y^*+\Delta y^*$ – какое-то соответствующее решение задачи (37) в определении (36) функции $Q(V+\Delta V)$. Тогда приращение y^* можно аппроксимировать приращением:

$$\Delta y^*\approx\lambda p^*(y^*) \tag{51}$$

вдоль направления наибыстрейшего подъема p^* функции $q(y^*)$, определенной в (37). Поскольку единственный вектор $p^*=p^*(y^*)$ является в этом случае ее градиентом и справедливо приближенное равенство:

$$q(y^*+\Delta y)\approx q(y^*)+Dq(y^*)=q(y^*)+\left\langle p^*,\Delta y^*\right\rangle. \tag{52}$$

Величину шага λ в (51) вдоль направления наибыстрейшего возрастания функции $q(y^*)$ следует определить из ресурсного ограничения:

$$\Delta V=\left\langle\Delta y^*,p^*\right\rangle=\lambda\left\langle e,p^*\right\rangle, \tag{52*}$$

откуда следует равенство:

$$\lambda=\frac{\Delta V}{\left\langle e,p^*\right\rangle}. \tag{53}$$

Отсюда с учетом (52) получим цепочку равенств:

$$Q(V+\Delta V)=q(y^*+\Delta y^*)\approx q(y^*)+ \\ +\frac{\left\langle p^*,p^*\right\rangle}{\left\langle e,p^*\right\rangle}\Delta V=Q(Z)+\frac{\left\|p^*\right\|^2}{\left\langle e,p^*\right\rangle}\Delta V. \tag{54}$$

Откуда получаем приближенное выражение для дифференциала функции доходности:

$$DQ(V)\approx\frac{\left\|p^*\right\|^2}{\left\langle e,p^*\right\rangle}\Delta V.,\Delta V\ge 0 \tag{55}$$

Рассмотрим теперь случай, когда двойственная задача (39) имеет несколько решений $\{p^1,p^2,\dots,p^k\}$. Тогда направление наискорейшего подъема r^* функции $q(y^*)$, определенной в (37), определяется из условия максимума ее производной по направлению:

$$\frac{\partial q(y^*)}{\partial r}=\min_{j=1,\dots,k}\left\langle r,p^j\right\rangle\to\max_{r,\|r\|=1}. \tag{56}$$

В частности, если $k=1$, т.е. решение двойственной задачи (39) единственно, то мы имеем предыдущий случай:

$$r=p^1=p^*(y^*). \tag{57}$$

В общем случае аналог формула (55) будет иметь вид:

$$DQ(V)\approx\frac{\Delta V}{\left\langle e,r^*\right\rangle}\min_{j=1,\dots,k}\left\langle r^*,p^j\right\rangle= \\ =\frac{\Delta V}{\left\langle e,r^*\right\rangle}\max_{r,\|r\|=1}\min_{j=1,\dots,k}\left\langle r,p^j\right\rangle,\Delta V\ge 0. \tag{58}$$

и доказываться из цепочки равенств аналогичной (54).

Любопытно сравнить полученное приближенное выражение дифференциала функции доходности (58) с точным выражением (48):

$$DQ(V)=\Delta V\min_{m=1,\dots,l}\max_{j=1,\dots,k}\left\langle p^j,r^m\right\rangle. \tag{59}$$

По крайней мере, в дифференцируемом случае, когда $k=1$, справедливо неравенство:

$$DQ(V)\approx\frac{\Delta V}{\left\langle e,r^*\right\rangle}\max_{r,\|r\|=1}\min_{j=1,\dots,k}\left\langle r,p^j\right\rangle\ge \\ \ge\Delta V\min_{m=1,\dots,l}\max_{j=1,\dots,k}\left\langle p^j,r^m\right\rangle,\Delta V\ge 0. \tag{60}$$

Действительно, в этом случае неравенство (60) будет иметь вид:

$$DQ(V)\approx\frac{\Delta V}{\left\langle e,r^*\right\rangle}\max_{r,\|r\|=1}\left\langle r,p^1\right\rangle\ge \\ \ge\Delta V\min_{m=1,\dots,l}\left\langle p^1,r^m\right\rangle,\Delta V\ge 0. \tag{61}$$

Минимум в правой части достигается на каком-то r^m для которого $\left\langle e,r^m\right\rangle=1$. Поскольку это угловая точка множества допустимых решений задачи (44), то все координаты вектора r^m, кроме одной равны нулю. Из условия $\left\langle e,r^m\right\rangle=1$ следует, что эта единственная координата равна единице, откуда, в частности, следует, что $\left\|r^m\right\|=1$, что вместе с предыдущим условием дает:

$$DQ(Z)\approx\frac{\Delta V}{\left\langle e,r^*\right\rangle}\max_{r,\|r\|=1}\left\langle r,p^1\right\rangle\ge\frac{\Delta V}{\left\langle e,r^m\right\rangle}\left\langle r^m,p^1\right\rangle= \\ =\Delta V\left\langle r^m,p^1\right\rangle=\Delta V\min_{m=1,\dots,l}\left\langle p^1,r^m\right\rangle,\Delta V\ge 0, \tag{62}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, в дифференцируемом случае приближенная формула для дифференциала дает не меньшее приращение, чем точная. Поскольку точное значение дифференциала представляет собой главную часть приращения функции доходности $Q(V)$ за счет положительного приращения ресурса $\Delta V>0$, то оно представляет собой как бы изменение максимума по значению в задаче (36) в линейном приближении. Поэтому никакое другое изменение этого значения в линейном приближении не может дать большее значение. Отсюда следует, что должно выполняться обратное к (61) неравенство, т.е. (61) выполняется как равенство:

$$DQ(V)=\frac{\Delta V}{\langle e,r^*\rangle}\max_{r,\|r\|=1}\langle r,p^1\rangle = \\ =\Delta V\min_{m=1,\dots,l}\langle p^1,r^m\rangle,\ \Delta V\ge 0. \quad (62)^*$$

Таким образом, по крайней мере, в дифференцируемом случае приближенное выражение для дифференциала совпадает с точным. Поскольку функция доходности $Q(V)$ является полилинейной, то она дифференцируема везде кроме, быть может, конечного числа точек. Аппроксимация обобщенного дифференциала для функции менеджера $X(V)$ из аппроксимации обобщенного дифференциала функция доходности $Q(V)$ получается по формуле аналогичной (49):

$$DX(V)\approx\frac{DQ(V)-g\Delta V}{i}= \\ =\frac{\Delta V}{i}\left(\max_{r,\|r\|=1}\min_{j=1,\dots,k}\langle p^j,r\rangle-g\right),\ \Delta V\ge 0. \quad (63)$$

Поэтому аппроксимация функции менеджера $X(V)$ по формуле (50) может быть получена и с использованием приближенной формулы для обобщенного дифференциала, если мы будем двигаться по точкам ее дифференцируемости. Это возможно сделать, если условия принадлежности к кускам ее линейности задаются явно в виде линейных неравенств, которые можно будет проверить. Для корректности этой схемы нужно рандомизировать уравнение (50) по схеме, предложенной в [7]:

$$X(V_{s+1})\approx X(V_s)+DX(V_s+h\rho^s); \\ V_{s+1}=V_s+\Delta V;\ s=1,2,\dots;\ V_0=0. \quad (64)$$

Здесь

$$DX(V)=X'(V)\Delta V, \quad (65)$$

$X'(V)=(Q'(V)-g)/i)$ – производная полилинейной функции $X(V)$ в точке V, которая существует для всех V кроме, быть может, конечного множества точек в силу аналогичного свойства функции $Q(V)$ в (22).

Величина $h>0$ задает точность аппроксимации функции менеджера $X(V)$ ее осредненной функцией:

$$X_h(V)=\int_{E_1}X(V+h\rho)\omega_1(\|\rho\|_0). \quad (66)$$

Ядро осреднения здесь определяется, например, по формуле [9]:

$$\omega_1(\|\rho\|_0)=\begin{cases}2^{-1},\rho\in O\\ 0,\upsilon\notin O\end{cases}. \quad (67)$$

Здесь

$$\|\rho\|_0=|\rho|;\ O=\{\rho\in E_n\,\|\,\|\rho\|_0\le 1\}. \quad (68)$$

Известно [9], что осредненная функция от липшицевой функции будет дифференцируемой и

$$|X_h(V)-X(V)|\le Lh, \quad (69)$$

где L – соответствующая константа Липшица.

Пусть величина ρ^s в (64) есть s-ю независимую реализацию случайной величины (с.в.) ρ, равномерно распределенной (р.р.) на O. Тогда случайный процесс [13] почти наверное (п.н.) определен и в среднем совпадает с осредненной функцией $\{X_h(V_s)\}$ [9], которая аппроксимирует исходную функцию менеджера на дискретной решетке $\{V_s\}$ с точностью $O(h)$ в силу (69).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что линия финансового менеджера является графиком неубывающей, вогнутой и кусочно-линейной функции. Последнее при естественном условии неотрицательности финансового рычага компании. И получена формула для ее обобщенного дифференциала в смысле [4, 5]. Это позволяет использовать численный метод для ее построения в общем случае.

Литература

1. Ашманов С.А. Линейное программирование [Текст] / С.А. Ашманов. – М. : Наука, 1981.
2. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2011. − №3. − С. 76-84.
3. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в однопараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2011. − №2. − С. 242-247.
4. Брейли Р. Принципы корпоративных финансов [Текст] / Р. Брейли, С. Майерс. − М. : ИНФРА-М, 1999.
5. Ван Хорн Дж. К. Основы финансового менеджмента [Текст] / Дж. К. Ван Хорн. − М. : Финансы и статистика, 2004.
6. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс [Текст] / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972.
7. Завриев С.К. Стохастический конечно-разностный алгоритм минимизации функции максимина [Текст] / С.К. Завриев, А.Г. Перевозчиков // Ж-л вычислительной математики и математической физики. – 1991. − Т. 30 ; №4. − С. 629-633.
8. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст] / Deloitte&Touche. Декабрь 2003 − март 2005.
9. Михалевич В.С. и др. Методы невыпуклой оптимизации [Текст] / В.С. Михалевич, А.М. Гупал, В.И. Норкин. − М. : Наука, 1987.
10. Мищенко А.В. Модели управления производственно-финансовой деятельностью предприятия в условиях привлечения заемного капитала [Текст] / А.В. Мищенко, О.А. Артеменко // Финансовая аналитика. – 2012. − №42. − С. 2-13.
11. Оценка бизнеса [Текст] : учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. − М. : Финансы и статистика, 2002.
12. Федоров В.В. Численные методы максимина [Текст] / В.В. Федоров. – М. : Наука, 1979.
13. Шарп У. и др. Инвестиции [Текст] / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли ; пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 1998. – XII, 1028 с.

Перевозчиков Александр Геннадьевич

Лесик Илья Александрович,

Ключевые слова

Собственный капитал компании; стоимость собственного капитала компании; доходный подход; метод прямой капитализации прибыли; инвестиции в основные средства компании; заемные средства компании на долгосрочной основе; зависимость стоимости от объема инвестиций; линия финансового менеджера; монотонность; вогнутость и кусочная линейность линии финансового менеджера.

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается простейшая модель инвестиций в основные средства компании с использованием заемного капитала. В качестве критерия предлагается использовать прямой критерий стоимости собственного капитала компании. Стоимость собственного капитала может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода, что позволяет поставить задачу исследования стоимости компании от объема заемных средств. Эту зависимость можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности роста стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов.

Показано, что линия финансового менеджера является графиком возрастающей, вогнутой и кусочно-линейной функции и получена формула для ее обобщенного дифференциала. Это позволяет использовать численный метод для ее построения и решает в определенном смысле поставленную задачу в общем случае.

Вот основные идеи, заложенные в нашей новой работе. Она предназначена для аспирантов и докторантов, специализирующихся в области финансового менеджмента предприятия, а также для действующих профессиональных оценщиков инвестиций и бизнеса.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.Г.Перевозчикова, Лесика И.А. может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н, проф., зав. кафедрой бухгалтерского учета и аудита, проректор по научной работе Тверской государственной сельскохозяйственной академии

Перейти на Главное МЕНЮ
Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ