8.3. МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР ИНВЕСТИЦИЙ В ОСНОВНЫЕ СРЕДСТВА КОМПАНИИ

Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., проф., академик РАЕН, проф. кафедры математики и информатики Тверской государственной сельскохозяйственной академии;
Лесик И.А., программист отдела инновационных ИТ в обучении Центра разработки и внедрения технологий управления ОАО «НПО Русбитех», г. Тверь

Перейти на Главное МЕНЮ
Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ

Рассматривается простейшая модель инвестиций в основные средства компании с использованием заемного капитала. В качестве критерия предлагается использовать прямой критерий стоимости собственного капитала компании. Стоимость собственного капитала может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода, что позволяет поставить задачу исследования стоимости компании от объема заемных средств. Эту зависимость можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности роста стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов. Рассматривается модельный пример построения линии финансового менеджера, который позволяет оценить точность аппроксимации с помощью предложенных нами конструкций и служить тестом для отладки соответствующих программ.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается общая модель инвестиций в основные средства компании с использованием заемного капитала на долгосрочной основе. Эта модель представляет собой частный случай моделей предложенных в [10] для изучения влияния заемного капитала на рост ее стоимости в процессе инвестиций в основные и оборотные средства компании. Целью финансового менеджмента компании в долгосрочной перспективе, как известно [4, 5], является обеспечение роста ее стоимости за счет инвестиции собственных и заемных средств в основные и оборотные средства компании.

В отличие [10], где используется косвенный критерий валовой прибыли, в качестве критерия предлагается использовать прямой критерий стоимости собственного капитала компании. Эта стоимость в простейшем случае может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода [11, 8, 14], что позволяет поставить задачу исследования стоимости компании от объема заемных средств. Эту зависимость можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности по росту стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов.

В предыдущей работе авторов на эту тему было показано, что линия финансового менеджера является графиком возрастающей, вогнутой и кусочно-линейной функции и получена формула для ее обобщенного дифференциала в смысле [3, 4]. Это позволяет использовать численный метод для ее построения и решает в определенном смысле поставленную задачу в общем случае. В настоящей работе рассматривается модельный пример построения кривой доходности, который позволяет оценить точность аппроксимации с помощью предложенных нами конструкций и служить тестом для отладки соответствующих программ. Вот основные идеи, заложенные в нашей новой работе. Она предназначена для аспирантов и докторантов, специализирующихся в области финансового менеджмента предприятия, а также для действующих профессиональных оценщиков инвестиций и бизнеса.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Начнем с классической производственной задачи [2], которую мы возьмем за основу нашей простейшей модели инвестиций в основные средства компании. Мы приводим классические результаты исключительно с целью разъяснения сути предлагаемых инноваций. Мы воспользуемся более привычными для нас обозначениями, введенными в работах [3, 4].

1.1. Производственная задача

При производстве n видов продукции предприятия используется m видов ресурсов. Известно:

$b_1, b_2, \dots, b_m$ – запасы ресурсов;

$a_{ij}\,(i = 1,2,\dots, m;\ j = 1,2,\dots, n)$ – расход i-го вида ресурса на изготовление единицы j-й продукции;

$c_j\,(j = 1,2,\dots, n)$ – цена единицы j-й продукции.

Требуется составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

Обозначим через $x_j\,(j = 1,2,\dots, n)$ – объем выпуска j-й продукции. Вектор $x = (x_1, x_2,\dots, x_n)$ называется фазовым вектором системы и характеризует ее состояние. Учитывая, что $c_j x_j$ – прибыль от реализации всего объема j-й продукции, а $a_{ij} x_j$ затраты i-го вида ресурса на весь объем выпуска j-й продукции, запишем математическую модель задачи. С учетом не отрицательности выпуска продукции получим:

$$z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \to max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \quad (1)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots, n.$$

Или в векторной форме:

$$z(x) = \langle c, x\rangle \to max; \qquad (2)$$

$$Ax \le b,\ x \ge 0.$$

Здесь

$c = (c_1, c_2,\dots, c_n)'$, $b = (b_1, b_2,\dots, b_m)'$ – векторы-столбцы;

$\langle c, x\rangle$ – скалярное произведение векторов c, x в евклидовом пространстве E_n;

$A = \|a_{ij}\|$ – матрица $m * n$.

Задача 1.1

При производстве двух видов продукции используются три вида ресурсов. Составить математическую модель и найти план выпуска продукции, обеспечивающий максимум дохода. Исходные данные вынесены в табл. 1.

Таблица 1

Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции 1	Расход сырья на единицу продукции 2
20	2	1
12	1	1
30	1	3
Цена	40	50

Решение.

$$z(x) = 40x_1 + 50x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20; \\ x_1 + x_2 \le 12; \\ x_1 + 3x_2 \le 30; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0.$$

Решая эту задачу графическим методом, поскольку в ней только две переменных, получим единственное оптимальное решение:

$$x_1^* = 3, x_2^* = 9, z^* = z(x^*) = 40 * 3 + 50 * 9 = 570.$$

1.2. Двойственные оценки и устойчивость задачи

Обозначим через $\Phi(b,c)$ оптимальное значение критерия в задаче (2), при фиксированном b – через $f(c)$, а при фиксированном c − через $F(b)$. Тогда, как показано в [1], функция $\Phi(b,c)$ − вогнута по b и выпукла по c, и значит, непрерывна по этим переменным.

Задачей двойственной к (2) называется задача:

$$\langle b, p\rangle \to min; \quad A'p \ge c, p \ge 0. \qquad (3)$$

Здесь

$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – вектор двойственных переменных (оценок);

A' – транспонированная матрица A.

Оказывается, что если двойственная задача (3) имеет единственное решение p^*, то функция $F(b)$ для задачи (2) дифференцируема, и $\partial F(b)/\partial b_i = p_i^*, \quad i = 1,2,\ldots, m$ [9], т.е. ее дифференциал равен:

$$dF(b) = \langle p^*, db\rangle. \qquad (4)$$

Здесь $db = (db_1, db_2, \ldots, db_m)$ – вектор возможных приращений вектора запасов $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)'$. Это позволяет исследовать устойчивость результата задачи (2) относительно малых изменений вектора параметров $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)'$ и представляет простейшую модель изучения устойчивости системы.

Задача 1.2

Для производственной задачи 1 составить математическую модель двойственной задачи и найти соответствующий вектор оценок.

Решение. Строго говоря, нужно рассмотреть варианты, когда одно из неравенств будет строгим, но в данном случае минимум критерия достигается, когда оба они выполняются как равенства. С учетом этого замечания получим задачу:

$$z(p) = 20p_1 + 12p_2 + 30p_3 \to min;$$

$$\begin{cases} 2p_1 + p_2 + p_3 = 40; \\ p_1 + p_2 + 3p_3 = 50; \end{cases}$$

$$p_j \ge 0.$$

Решая эту задачу методом исключения переменных, поскольку в ней только одна небазисная переменная, получим единственное оптимальное решение, соответствующее случаю, когда оба ограничения активны:

$$p_1^* = 0, p_2^* = 35, p_3^* = 5, z^* = z(p^*) =$$
$$= 20 * 0 + 12 * 35 + 30 * 5 = 570.$$

Заметим, что оптимальное значение прямой и двойственной задачи совпадает, как известно из теории двойственности. Это обстоятельство может служить для взаимного контроля правильности полученных решений.

Если двойственная задача (3) имеет не единственное решение, то функция $F(b)$ будет только дифференцируемой по направлениям, как показано в [1].

Пусть $\{p^1, p^2, \ldots, p^k\}$ – множество крайних точек выпуклого многогранного множества P^0 оптимальных решений двойственной задачи (3), тогда производную функции $F(b)$ по направлению $s, \|s\| = 1,$ можно найти по формуле [1]:

$$\frac{\partial F(b)}{\partial s} = lim \frac{F(b + \lambda s) - F(b)}{\lambda} = \min_{1\le r\le k} \langle s, p^r\rangle. \qquad (5)$$

Это позволяет исследовать устойчивость результата задачи (2) относительно малых изменений вектора параметров $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ в произвольном направлении $s, \|s\| = 1.$ Здесь $\|s\|$ – длина вектора $s.$

В частности, имеет место формула:

$$\Delta F(b) = F(b + \lambda s) - F(b) = \min_{1\le r\le k} \langle s, p^k\rangle * \lambda + o(\lambda). \qquad (6)$$

Пусть $\{p^1, p^2, \ldots, p^l\}, l \ge k,$ – объемлющее множество крайних точек выпуклого многогранного множества $P(P^0 \subseteq P)$ всех допустимых решений двойственной задачи (3).

Тогда функция $F(b)$ является функцией минимума конечного числа дифференцируемых функций и, в частности, кусочно-линейна:

$$F(b) = \min_{1\le r\le l} \langle b, p^k\rangle. \qquad (7)$$

В этом случае $o(\lambda)/\lambda \to 0, \lambda \to 0,$ равномерно по направлению $s, \|s\| = 1$ [6]. Полагая для любого приращения Δb:

$$s = \Delta b / \|\Delta b\|, \lambda = \|\Delta b\|, \qquad (8)$$

Получим из (6), что

$$\Delta F(b) = F(b + \Delta b) - F(b) = \min_{1\le r\le k} \langle \Delta b, p^k\rangle + o(\|\Delta b\|). \qquad (9)$$

Это позволяет определить обобщенный дифференциал в смысле [3, 4] функции минимума формулой:

$$dF(b) = \min_{1\le r\le k} \langle \Delta b, p^k\rangle. \qquad (10)$$

Этот обобщенный дифференциал имеет все свойства обычного (кроме линейности по Δb) и может быть использован для приближенного вычисления приращения функции минимума:

$$\Delta F(b) = F(b + \Delta b) - F(b) \approx dF(b) = \min_{1\le r\le k} \langle \Delta b, p^k\rangle. \qquad (11)$$

Таким образом, обобщенный дифференциал представляет из себя минимум дифференциала критерия в (3) по параметру b, для тех крайних значений переменной p, которые доставляют минимум в (3).

Пример 1.1

В задаче 2 решение оказалось единственным, поэтому ее значение (совпадающее со значением задачи 1) дифференцируемо по b, причем:

$$dF(b) = \langle p^*, db \rangle = p_1 * \Delta b_1 + p_2 * \Delta b_2 + p_3 * \Delta b_3 .$$

Пусть, например, требуется определить приближенно, на сколько процентов измениться результат, если первый и третий запасы уменьшаться на 1%, а второй увеличиться на 2%. В этом случае

$$\Delta b_1 = -0{,}01\, b_1 = -0{,}01 * 20 = -0{,}2;$$

$$\Delta b_2 = 0{,}02\, b_2 = 0{,}02 * 12 = 0{,}24;$$

$$\Delta b_3 = -0{,}01\, b_3 = -0{,}01 * 30 = -0{,}3.$$

И по формуле (14), в частности, получаем:

$$\Delta F(b) = F(b + \Delta b) - F(b) \approx dF(b) =$$

$$= 0 * (-0{,}2) + 35 * 0{,}24 + 5 * (-0{,}3) = 6{,}9.$$

Это составит $\Delta F(b) / z^* * 100 = 6{,}9 / 570 * 100 = 1{,}2\%$ от оптимального значения задачи z^*.

Аналогично в задаче (2) ввести множество $\{x^1, x^2, ..., x^p\}$ крайних точек выпуклого многогранного множества X^0 оптимальных решений задачи (2). Пусть $\{x^1, x^2, ..., x^r\}, r \ge p,$ – объемлющее множество крайних точек выпуклого многогранного множества $X\,(X^0 \subseteq P)$ всех допустимых решений двойственной задачи (2).

Тогда функция $f(c)$ оптимального значения задачи (2) является функцией максимума конечного числа дифференцируемых функций:

$$f(c) = \max_{1 \le t \le r} \langle c, x^t \rangle. \qquad (12)$$

Это позволяет определить обобщенный дифференциал в смысле [3, 4] функции минимума формулой:

$$df(c) = \max_{1 \le t \le p} \langle \Delta c, x^t \rangle. \qquad (13)$$

Этот обобщенный дифференциал имеет все свойства обычного (кроме линейности по Δb) и может быть использован для приближенного вычисления приращения функции минимума:

$$\Delta f(c) = f(c + \Delta c) - f(c) \approx df(c) = \max_{1 \le t \le p} \langle \Delta c, x^t \rangle. \qquad (14)$$

Пример 1.2

В задаче 1 решение оказалось единственным, поэтому ее значение (совпадающее со значением задачи 1) дифференцируемо по b, причем:

$$df(c) = \langle x^*, dc \rangle = x_1 * \Delta c_1 + x_2 * \Delta c_2 .$$

Пусть, например, требуется определить приближенно, на сколько процентов изменится результат, если первая цена уменьшаться на 2%, а вторая увеличивается на 1%.

В этом случае

$$\Delta c_1 = -0{,}02\, c_1 = -0{,}02 * 40 = -0{,}8;$$

$$\Delta c_2 = 0{,}01\, c_2 = 0{,}01 * 50 = 0{,}5.$$

И по формуле (17), в частности, получаем:

$$\Delta f(c) = f(c + \Delta c) - f(c) \approx df(c) =$$

$$= 3 * (-0{,}8) + 9 * 0{,}5 = 2{,}1.$$

Это составит $\Delta f(c) / z^* * 100 = 2{,}1 / 570 * 100 = 0{,}4\%$ от оптимального значения задачи z^*.

2. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИЙ

В предыдущей работе нами был обоснована нормированная форма задачи (1) инвестиций в основные средства компании:

$$q(y) = \max_x \langle c, x \rangle; \quad Ax \le b + y,\ x \ge 0. \qquad (15)$$

Эта форма наиболее удобна для изучения непосредственного влияния инвестиций в основные средства на валовую прибыль предприятия, которая отличается от избранного критерия на постоянные расходы c_0 предприятия.

Задачей, двойственной к (15), будет задача:

$$\langle b + y, p \rangle \to \min; \quad A'p \ge c,\ p \ge 0. \qquad (16)$$

Сравнивая функцию (15) с функцией $F(b)$, введенной в п. 1.2, убеждаемся, что

$$q(y) = F(b + y). \qquad (17)$$

В силу вогнутости и кусочно-линейности (полилинейности) $F(b)$ отсюда следует вогнутость и кусочная линейность функции $q(y)$ в (15).

Следуя предыдущей работе, введем функцию доходности:

$$Q(V) = \max_y q(y); \quad \langle e, y \rangle = V,\ y \ge 0. \qquad (18)$$

Здесь $e = (1, ..., 1)' \in E_m$ – вектор-столбец. Эта функция показывает как валовая прибыль, отличающаяся от избранного критерия на постоянные расходы c_0 предприятия, зависит от объема заемного капитала z, доступного компании для финансирования инвестиций в основные средства.

Было показано, что функция $Q(V)$ будет также вогнутой и кусочно-линейной (полилинейной).

Следуя предыдущей работе, мы можем определить стоимость собственного капитала $X = X(V)$ компании в результате инвестиции заемного капитала V на долгосрочной основе в основные средства. Эта стоимость в простейшем случае может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода [11, 8, 14]:

$$X(V) = \frac{Q(V) - C_0 - gV}{i}. \qquad (19)$$

Здесь

g – средняя стоимость капитала на долгосрочной основе;

i – подходящая ставка капитализации валовой прибыли компании.

Из вогнутости и полилинейности функции доходности $Q(V)$ следует вогнутость и полилинейность функции менеджера $X(V)$.

Зависимость (19) можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности по росту стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА НА ОСНОВЕ МЕТОДА НАИБЫСТРЕЙШЕГО ПОДЪЕМА

Вначале рассмотрим случай дифференцируемости функции доходности $Q(V)$, когда двойственная задача (16) имеет единственное решение $p^* = p^*(y^*)$, где y^* – какое-то решение задачи (15) в определении (18) функции $Q(V)$. Пусть ресурс V получил приращение $\Delta V > 0$ и $y^* + \Delta y^*$ – какое-то соответствующее решение задачи (15) в определении (18) функции $Q(V + \Delta V)$. Тогда приращение y^* можно аппроксимировать приращением

$$\Delta y^* \approx \lambda p^*(y^*) \qquad (20)$$

вдоль направления наибыстрейшего подъема p^* функции $q(y^*)$, определенной в (15). Поскольку единственный вектор $p^* = p^*(y^*)$ является в этом случае ее градиентом и справедливо приближенное равенство:

$$q(y^* + \Delta y) \approx q(y^*) + Dq(y^*) = q(y^*) + \langle p^*, \Delta y^* \rangle. \qquad (21)$$

Величину шага λ в (20) вдоль направления наибыстрейшего возрастания функции $q(y^*)$ следует определить из ресурсного ограничения:

$$\Delta V = \langle \Delta y^*, p^* \rangle = \lambda \langle e, p^* \rangle, \qquad (22)$$

откуда следует равенство:

$$\lambda = \frac{\Delta V}{\langle e, p^* \rangle}. \qquad (23)$$

Отсюда с учетом (22) получим цепочку равенств:

$$Q(V + \Delta V) = q(y^* + \Delta y^*) \approx$$
$$\approx q(y^*) + \frac{\langle p^*, p^* \rangle}{\langle e, p^* \rangle}\Delta V = Q(Z) + \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle}\Delta V. \qquad (24)$$

Откуда получаем приближенное выражение для дифференциала функции доходности:

$$DQ(V) \approx \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle}\Delta V, \Delta V \geq 0 \qquad (25)$$

Рассмотрим теперь случай, когда двойственная задача (16) имеет несколько решений $\{p^1, p^2, ..., p^k\}$. Тогда направление наискорейшего подъема r^* функции $q(y^*)$, определенной в (15), определяется из условия максимума ее производной по направлению:

$$\frac{\partial q(y^*)}{\partial r} = \min_{j=1,...,k} \langle r, p^j \rangle \to \max_{r, \|r\|=1}. \qquad (26)$$

В частности, если $k = 1$, т.е. решение двойственной задачи (16) единственно, то мы имеем предыдущий случай:

$$r = p^1 = p^*(y^*). \qquad (27)$$

В общем случае аналог формулы (25) будет иметь вид:

$$DQ(V) \approx \frac{\Delta V}{\langle e, r^* \rangle} \min_{j=1,...,k} \langle r^*, p^j \rangle =$$
$$= \frac{\Delta V}{\langle e, r^* \rangle} \max_{r, \|r\|=1} \min_{j=1,...,k} \langle r, p^j \rangle, \Delta V \geq 0. \qquad (28)$$

и доказывается из цепочки равенств аналогичной (24).

В предыдущей работе авторов было показано, что по крайней мере в дифференцируемом случае приближенное выражение для дифференциала совпадает с точным. Поскольку функция доходности $Q(V)$ является полилинейной, то она дифференцируема везде кроме, быть может, конечного числа точек. Аппроксимация обобщенного дифференциала для функции менеджера $X(V)$ из аппроксимации обобщенного дифференциала функция доходности $Q(V)$ получается по формуле:

$$DX(V) \approx \frac{DQ(V) - g\Delta V}{i} =$$
$$= \frac{\Delta V}{i}\left(\max_{r, \|r\|=1} \min_{j=1,...,k} \langle p^j, r \rangle - g \right), \Delta V \geq 0. \qquad (29)$$

Поэтому аппроксимация функции менеджера $X(V)$ может быть получена и с использованием приближенной формулы для обобщенного дифференциала, если мы будем двигаться по точкам ее дифференцируемости. Это возможно сделать, если условия принадлежности к кускам ее линейности задаются явно в виде линейных неравенств, которые можно будет проверить. Для корректности этой схемы нужно рандомизировать соответствующее разностное уравнение по схеме, предложенной в [7]:

$$X(V_{s+1}) \approx X(V_s) + DX(V_s + h\rho^s);$$
$$V_{s+1} = V_s + \Delta V; s = 1, 2, ...; V_0 = 0. \qquad (30)$$

Здесь

$$DX(V) = X'(V)\Delta V, \qquad (31)$$

$X'(V) = (Q'(V) - g)/i)$ – производная полилинейной функции $X(V)$ в точке V, которая существует для всех V кроме, быть может, конечного множества точек в силу аналогичного свойства функции $Q(V)$ в (29).

Величина $h > 0$ задает точность аппроксимации функции менеджера $X(V)$ ее осредненной функцией:

$$X_h(V) = \int_{E_1} X(V + h\rho)\omega_1(\|\rho\|_0). \qquad (32)$$

Ядро осреднения здесь определяется, например, по формуле [9]:

$$\omega_1(\|\rho\|_0) = \begin{cases} 2^{-1}, \rho \in O; \\ 0, \upsilon \notin O. \end{cases} \qquad (33)$$

Здесь

$$\|\rho\|_0 = |\rho|; O = \{\rho \in E_n \| \|\rho\|_0 \leq 1\}. \qquad (34)$$

Известно [9], что осредненная функция от липшицевой функции будет дифференцируемой и

$$|X_h(V) - X(V)| \leq Lh, \qquad (35)$$

где L – соответствующая константа Липшица.

Пусть величина ρ^s в (30) есть s-ю независимую реализацию случайной величины (с.в.) ρ, равномерно распределенной (***р.р.***) на O. Тогда случайный процесс

[13] почти наверное (п.н.) определен и в среднем совпадает с осредненной функцией $\{x_h(v_s)\}$ [9], которая аппроксимирует исходную функцию менеджера на дискретной решетке $\{v_s\}$ с точностью $O(h)$ в силу (35).

4. МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ КРИВОЙ ДОХОДНОСТИ

Покажем, как точно построить кривую доходности в задаче 1.1, которая в форме (15) будет иметь вид:

$$z(x) = 40x_1 + 50x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20 + y_1; \\ x_1 + x_2 \le 12 + y_2; \\ x_1 + 3x_2 \le 30 + y_3; \end{cases} \quad (36)$$

$$x_j \ge 0.$$

Переменные $y_1, y_2, y_3 \ge 0$ подчиним условию:

$$60y_1 + 40y_2 + 50y_3 = V, \quad (37)$$

где V – общий объем инвестиций в основные средства в форме долгосрочного займа.

Таким образом, правые части (36) интерпретируются уже как количества соответствующих основных средств, а вектор e цен на соответствующие основные средства в отличие от (18) будет иметь вид:

$$e' = (60, 40, 50). \quad (38)$$

Решая задачу (36) графическим методом при $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, получим единственное оптимальное решение:

$$x_1^* = 3, x_2^* = 9, z^* = z(x^*) = 40*3 + 50*9 = 570.$$

При этом активными являются второе и третье ограничение в (36). Это означает, что второе и третье неравенство в (36) выполняются как равенства, а первое – как строгое неравенство.

По логике вещей при последовательном увеличении общего объема инвестиций V от нуля сначала все они будут направляться в узкое место производства, определяемое недостаточным количеством основных средств вида 2 и 3. Однако с некоторого значения V дойдет очередь и до основных средств вида 1, и тогда уже все три ограничения в (36) будут активными, т.е. будут выполняться равенства:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 + y_1; \\ x_1 + x_2 = 12 + y_2; \\ x_1 + 3x_2 = 30 + y_3; \end{cases} \quad (39)$$

$$x_j \ge 0.$$

Из первых двух уравнений системы (39) получим вычитанием:

$$x_1 = 8 + y_1 - y_2, \quad (40)$$

откуда из второго уравнения (39) имеем:

$$x_2 = 12 + y_2 - x_1 = 4 - y_1 + 2y_2. \quad (41)$$

Аналогично, вычитая из третьего уравнения в (39), умноженного на два, первое уравнение, получим:

$$5x_2 = 40 - y_1 + 2y_3,$$

откуда следует:

$$x_2 = 8 - \frac{1}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_3. \quad (42)$$

Теперь из третьего уравнения в (39) в силу (42) получим:

$$x_1 = 30 + y_3 - 3x_2 = 6 - \frac{3}{5}y_1 + \frac{11}{5}y_3. \quad (43)$$

Приравнивая правые части (40) и (43), (41) и (42), и добавляя уравнение (37), деленное на 100, получим систему:

$$\begin{cases} 8 + y_1 - y_2 = 6 - \frac{3}{5}y_1 + \frac{11}{5}y_3; \\ 4 - y_1 + 2y_2 = 8 - \frac{1}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_3; \\ 0{,}6y_1 + 0{,}4y_2 + 0{,}5y_3 = v. \end{cases} \quad (44)$$

Здесь $v = V/100$ – нормированная величина общего объема инвестиций.

Или после преобразования:

$$\begin{cases} -1{,}6y_1 + y_2 + 2{,}2y_3 = 2; \\ -0{,}8y_1 + 2y_2 - 0{,}4y_3 = 4; \\ 0{,}6y_1 + 0{,}4y_2 + 0{,}5y_3 = v. \end{cases} \quad (45)$$

Из первого уравнения в (44) получим:

$$y_2 = 2 + 1{,}6y_1 + 2{,}2y_3. \quad (46)$$

Подставляя во второе уравнение в (44), имеем:

$$-0{,}8y_1 + 2(2 + 1{,}6y_1 - 2{,}2y_3) - 0{,}4y_3 = 4,$$

откуда получим:

$$y_1 = 2y_3. \quad (47)$$

С учетом (46) получим отсюда:

$$y_2 = 2 + 1{,}6 \cdot 2y_3 - 2{,}2y_3 = 2 + y_3. \quad (48)$$

Подставляя (47, 48) в третье уравнение (44), получим:

$$0{,}6*2y_3 + 0{,}4(2 + y_3) + 0{,}5y_3 = v,$$

или

$$y_3(0{,}6*2 + 0{,}4 + 0{,}5) + 0{,}8 = v,$$

откуда следует:

$$y_3 = \frac{v - 0{,}8}{2{,}1} \approx 0{,}48(v - 0{,}8). \quad (49)$$

С учетом условия неотрицательности переменных получается, что все полученные формулы справедливы только при $v \ge 0{,}8$. При этом $v = 0{,}8$ является наименьшим значением нормированного ресурса, начиная с которого все ограничения являются активными.

Подставляя в (43, 42) выражения (47-49), получим последовательно:

$$x_1 = 6 - 0{,}6y_1 + 2{,}2y_3 = 6 - 0{,}6\frac{2}{2{,}1}(v - 0{,}8) + \\ + 2{,}2\frac{1}{2{,}1}(v - 0{,}8) = 6 + \frac{2{,}2 - 1{,}2}{2{,}1}(v - 0{,}8) = \\ = 6 + \frac{1}{2{,}1}(v - 0{,}8) \approx 6 + 0{,}48(v - 0{,}8). \quad (50)$$

$$x_2 = 8 - 0{,}2y_1 + 0{,}4y_3 = 8 - 0{,}2\frac{2}{2{,}1}(v - 0{,}8) + \\ + 0{,}4\frac{1}{2{,}1}(v - 0{,}8) = 8 + \frac{0{,}4 - 0{,}4}{2{,}1}(v - 0{,}8) = 8.$$

Значение критерия (36) при этом составит:

$$Q^*(v) = Q(100v) = z(x(v)) = 40x_1 + 50x_2 =$$

$$= 40\left(6 + \frac{v-0,8}{2,1}\right) + 50*8 = 640 + \frac{40}{2,1}(v-0,8) \approx \quad (51)$$

$$\approx 640 + 19,05(v-0,8) = 624,76 + 19,05v, v \geq 0,8.$$

При $0 \leq v \leq 0,8$ функция доходности $Q^*(v) = Q(100v) = z(x(v))$ будет линейной и восстанавливается по крайним значениям $z(x(0)) = 570$; $z(x(0,8)) = 640$:

$$Q^*(v) = z(x(v)) = 570 + \frac{70}{0,8}v \approx \quad (52)$$

$$\approx 570 + 87,5v, 0 \leq v \leq 0,8.$$

Стоимость собственного капитала компании получается теперь по формуле:

$$X^*(v) = X(100v) = \frac{Q^*(v) - 0,12*100v}{0,186} =$$

$$= \frac{Q^*(v) - 12v}{0,186} \approx \begin{cases} \dfrac{570 + 75,5v}{0,186}, 0 \leq v \leq 0,8, \\ \dfrac{624,76 + 7,05v}{0,186}, v \geq 0,8, \end{cases} \approx \quad (53)$$

$$\approx \begin{cases} 3064,52 + 405,38v, 0 \leq v \leq 0,8, \\ 3358,93 + 37,90v, v \geq 0,8. \end{cases}$$

Мы полагаем для простоты, что постоянные расходы в формуле (19) равны нулю: $C_0 = 0$.

Видно, что функция менеджера (53) действительно является возрастающей, вогнутой и кусочно-линейной, как было доказано в предыдущей работе.

5. АППРОКСИМАЦИЯ КРИВОЙ ДОХОДНОСТИ (ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ)

Покажем, как работает алгоритм аппроксимации кривой доходности типа наискорейшего спуска на нашем примере, считая, что дискрет изменения общего объема инвестиций составляет $\Delta V = 100$.

Шаг 1

Решая задачу (36) графическим методом при $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, получим единственное оптимальное решение:

$$x_1^* = 3, x_2^* = 9, z^* = z(x^*) = 40*3 + 50*9 = 570.$$

Решая соответствующую двойственную задачу методом исключения переменных получим единственное решение $p^* = (0,35,5)$.

Пусть ресурс $V = 0$ получил приращение $\Delta V = 100$ и $y^* + \Delta y^*$ – какое-то соответствующее решение задачи (15) в определении (18) функции $Q(V + \Delta V)$. Тогда приращение вектора $y^* = (0,0,0)$ можно аппроксимировать приращением (20): $\Delta y^* \approx \lambda p^*(y^*)$ вдоль направления наибыстрейшего подъема $p^* = (0,35,5)$ функции $q(y^*) = 570$, определенной в (15). Поскольку единственный вектор $p^* = p^*(y^*)$ является в этом случае ее градиентом и справедливо приближенное равенство (21):

$$q(y^* + \Delta y) \approx q(y^*) + Dq(y^*) = q(y^*) + \langle p^*, \Delta y^* \rangle.$$

Величину шага λ в (20) вдоль направления наибыстрейшего возрастания функции $q(y^*)$ следует определить из ресурсного ограничения (22):

$$\Delta V = \langle \Delta y^*, p^* \rangle = \lambda \langle e, p^* \rangle, e = (60,40,50),$$

откуда следует равенство (23):

$$\lambda = \frac{\Delta V}{\langle e, p^* \rangle} = \frac{100}{1650} \approx 0,06;$$

$$\Delta y^* = \lambda p^* = \frac{\Delta V p^*}{\langle e, p^* \rangle} \approx (0;2,1;0,3);$$

$$y^* + \Delta y^* \approx (0;2,1;0,3).$$

Отсюда приближенное значение для дифференциала функции доходности по формуле (25) составляет:

$$DQ(V) \approx \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle}\Delta V = \frac{1250}{1650}*100 \approx$$

$$\approx 76, Q(V + \Delta V) \approx Q(V) + DQ(V) \approx 570 + 76 = 646.$$

Заметим, что точное значение:

$$Q(V + \Delta V) = Q(100) = Q^*(1)$$

при этом составит:

$$Q^*(v) = Q(100v) = 640 + \frac{40}{2,1}(v - 0,8) \approx$$

$$\approx 640 + 19,05(v - 0,8) = 624,76 + 19,05v =$$

$$= 624,76 + 19,05 = 643,8 \approx 644, v = 1 \geq 0,8.$$

При этом относительная погрешность вычисления функции $Q(V)$ в точке $V = 100$ составляет 0,31%.

Шаг 2

Решая задачу (36) графическим методом при $y_1 = 0$; $y_2 = 2,1; y_3 = 0,3$, получим единственное оптимальное решение:

$$x_1^* = 5,94; x_2^* = 8,12; z^* = z(x^*) =$$

$$= 40*5,94 + 50*8,12 \approx 644.$$

Решая соответствующую двойственную задачу методом исключения переменных получим единственное решение $p^* = (14;0;12)$.

Пусть ресурс $V = 100$ получил приращение $\Delta V = 100$ и $y^* + \Delta y^*$ – какое-то соответствующее решение задачи (15) в определении (18) функции $Q(V + \Delta V)$. Тогда приращение вектора $y^* = (0;2,1;0,3)$ можно аппроксимировать приращением (20): $\Delta y^* \approx \lambda p^*(y^*)$ вдоль направления наибыстрейшего подъема $p^* = (14,0,12)$ функции $q(y^*) = 644$, определенной в (15). Поскольку единственный вектор $p^* = p^*(y^*)$ является в этом случае ее градиентом и справедливо приближенное равенство (21):

$$q(y^* + \Delta y) \approx q(y^*) + Dq(y^*) = q(y^*) + \langle p^*, \Delta y^* \rangle.$$

Величину шага λ в (20) вдоль направления наибыстрейшего возрастания функции $q(y^*)$ следует определить из ресурсного ограничения (22):

$$\Delta V = \langle \Delta y^*, p^* \rangle = \lambda \langle e, p^* \rangle, e = (60,40,50),$$

откуда следует равенство (23):

$$\lambda = \frac{\Delta V}{\langle e, p^* \rangle} = \frac{100}{1440} \approx 0{,}07;$$

$$\Delta y^* = \lambda p^* = \frac{\Delta V p^*}{\langle e, p^* \rangle} \approx (0{,}97; 0; 0{,}83);$$

$$y^* + \Delta y^* \approx (0{,}97; 2{,}1; 1{,}13).$$

Отсюда приближенное значение для дифференциала функции доходности по формуле (25) составляет:

$$DQ(V) \approx \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle} \Delta V = \frac{340}{1440} * 100 \approx 24, Q(V + \Delta V) \approx Q(v) + DQ(V) \approx 644 + 24 = 668.$$

Заметим, что точное значение $Q(V + \Delta V) = Q(200) = Q^*(2)$ при этом составит:

$$Q^*(v) = Q(100v) = 640 + \frac{40}{2{,}1}(v - 0{,}8) \approx$$
$$\approx 640 + 19{,}05(v - 0{,}8) = 624{,}76 + 19{,}05v =$$
$$= 624{,}76 + 22{,}86 = 647{,}62 \approx 648, v = 2 \geq 0{,}8.$$

При этом относительная погрешность вычисления функции $Q(V)$ в точке $V = 200$ составляет 2,99%.

Шаг 3

Решая задачу (36) графическим методом при $y_1 = 0{,}97;\ y_2 = 2{,}1;\ y_3 = 1{,}13$, получим единственное оптимальное решение:

$$x_1^* = 5{,}58;\ x_2^* = 8{,}52;\ z^* = z(x^*) =$$
$$= 40 * 5{,}58 + 50 * 8{,}52 \approx 650.$$

Решая соответствующую двойственную задачу методом исключения переменных получим единственное решение $p^* = (0; 35; 5)$.

Пусть ресурс $V = 100$ получил приращение $\Delta V = 100$ и $y^* + \Delta y^*$ – какое-то соответствующее решение задачи (15) в определении (18) функции $Q(V + \Delta V)$. Тогда приращение вектора $y^* = (0{,}97; 2{,}1; 1{,}13)$ можно аппроксимировать приращением (20): $\Delta y^* \approx \lambda p^*(y^*)$ вдоль направления наибыстрейшего подъема $p^* = (0{,}35{,}5)$ функции $q(y^*) = 650$, определенной в (15). Поскольку единственный вектор $p^* = p^*(y^*)$ является в этом случае ее градиентом и справедливо приближенное равенство (21):

$$q(y^* + \Delta y) \approx q(y^*) + Dq(y^*) = q(y^*) + \langle p^*, \Delta y^* \rangle.$$

Величину шага λ в (20) вдоль направления наибыстрейшего возрастания функции $q(y^*)$ следует определить из ресурсного ограничения (22):

$$\Delta V = \langle \Delta y^*, p^* \rangle = \lambda \langle e, p^* \rangle, e = (60, 40, 50),$$

откуда следует равенство (23):

$$\lambda = \frac{\Delta V}{\langle e, p^* \rangle} = \frac{100}{1650} \approx 0{,}06;$$

$$\Delta y^* = \lambda p^* = \frac{\Delta V p^*}{\langle e, p^* \rangle} \approx (0; 2{,}1; 0{,}3);$$

$$y^* + \Delta y^* \approx (0{,}97; 4{,}2; 1{,}43).$$

Отсюда приближенное значение для дифференциала функции доходности по формуле (25) составляет:

$$DQ(V) \approx \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle} \Delta V = \frac{1250}{1650} * 100 \approx$$
$$\approx 76, Q(V + \Delta V) \approx Q(v) + DQ(V) \approx 650 + 76 = 726.$$

Заметим, что точное значение $Q(V + \Delta V) = Q(300) = Q^*(3)$ при этом составит:

$$Q^*(v) = Q(100v) = 640 + \frac{40}{2{,}1}(v - 0{,}8) \approx$$
$$\approx 640 + 19{,}05(v - 0{,}8) = 624{,}76 + 19{,}05v =$$
$$= 624{,}76 + 41{,}91 = 666{,}67 \approx 667, v = 3 \geq 0{,}8.$$

При этом относительная погрешность вычисления функции $Q(V)$ в точке $V = 300$ составляет 8,85%.

Шаг 4

Решая задачу (36) графическим методом при $y_1 = 0{,}97;\ y_2 = 4{,}2;\ y_3 = 1{,}43$, получим единственное оптимальное решение:

$$x_1^* = 6{,}30;\ x_2^* = 8{,}39;$$
$$z^* = z(x^*) = 40 * 6{,}30 + 50 * 8{,}39 \approx 671.$$

Решая соответствующую двойственную задачу методом исключения переменных получим единственное решение $p^* = (14; 0; 12)$.

Пусть ресурс $V = 100$ получил приращение $\Delta V = 100$ и $y^* + \Delta y^*$ – какое-то соответствующее решение задачи (15) в определении (18) функции $Q(V + \Delta V)$. Тогда приращение вектора $y^* = (0{,}97; 4{,}2; 1{,}43)$ можно аппроксимировать приращением (20): $\Delta y^* \approx \lambda p^*(y^*)$ вдоль направления наибыстрейшего подъема $p^* = (14{,}0{,}12)$ функции $q(y^*) = 644$, определенной в (15). Поскольку единственный вектор $p^* = p^*(y^*)$ является в этом случае ее градиентом и справедливо приближенное равенство (21):

$$q(y^* + \Delta y) \approx q(y^*) + Dq(y^*) = q(y^*) + \langle p^*, \Delta y^* \rangle.$$

Величину шага λ в (20) вдоль направления наибыстрейшего возрастания функции $q(y^*)$ следует определить из ресурсного ограничения (22):

$$\Delta V = \langle \Delta y^*, p^* \rangle = \lambda \langle e, p^* \rangle, e = (60, 40, 50),$$

откуда следует равенство (23):

$$\lambda = \frac{\Delta V}{\langle e, p^* \rangle} = \frac{100}{1440} \approx 0{,}07;$$

$$\Delta y^* = \lambda p^* = \frac{\Delta V p^*}{\langle e, p^* \rangle} \approx (0{,}97; 0; 0{,}83);$$

$$y^* + \Delta y^* \approx (1{,}94; 4{,}2; 2{,}26).$$

Отсюда приближенное значение для дифференциала функции доходности по формуле (25) составляет:

$$DQ(V) \approx \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle} \Delta V = \frac{340}{1440} * 100 \approx$$
$$\approx 24, Q(V + \Delta V) \approx Q(v) + DQ(V) \approx 671 + 24 = 695.$$

Заметим, что точное значение $Q(V + \Delta V) = Q(400) = Q^*(4)$ при этом составит:

$$Q^*(v) = Q(100v) = 640 + \frac{40}{2,1}(v - 0,8) \approx$$

$$\approx 640 + 19,05(v - 0,8) = 624,76 + 19,05v =$$

$$= 624,76 + 60,96 = 685,72 \approx 686, v = 4 \geq 0,8.$$

При этом относительная погрешность вычисления функции $Q(V)$ в точке $V = 400$ составляет 1,31%.

Относительная точность оценки кривой доходности, получаемой из функции доходности по формуле (19), имеет такой же порядок и не выходит в данном примере за 10%.

6. АППРОКСИМАЦИЯ КРИВОЙ ДОХОДНОСТИ (НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ)

Если продолжить работу алгоритма аппроксимации дальше, то вектор $p_1^* = (0;35;5)$ будет периодически меняться на вектор $p_2^* = (14;0;12)$, поскольку это две крайние точки допустимого множества решений двойственной задачи, представляющего собой отрезок. Это в случае, когда оба ограничения двойственной задачи являются активными, что в данном примере и имеет место. Поскольку точка насыщения обоих ограничений прямой задачи оказывается пройденной уже при первом значении $v = 1 \geq 0,8$, то лучшие результаты будет давать схема, где со второго шага в качестве направления p^* будет выбираться ближайшая к нулю точка указанного отрезка, представляющего собой решение двойственной задачи. Это соответствует недифференцируемому случаю в алгоритме аппроксимации на основе метода наискорейшего спуска при $v \geq 0,8$.

Вначале найдем направление $p^* = p(t^*)$, как решение задачи:

$$\|p(t)\|^2 = \|tp_1^* + (1-t)p_2^*\|^2 \to \min_{t\in[0,1]}.$$

Эта задача эквивалентна задаче:

$$\|p(t)\|^2 = \|t(p_1^* - p_2^*) + p_2^*\|^2 \to \min_{t\in[0,1]}.$$

В данном случае минимум будет достигаться во внутренней точке отрезка, производная в которой обращается в ноль:

$$2\langle (p_1^* - p_2^*)t + p_2^*, p_1^* - p_2^* \rangle = 0,$$

откуда следует равенство:

$$t^* = -\frac{\langle p_2^*, p_1^* - p_2^* \rangle}{\|p_1^* - p_2^*\|^2} = \frac{\|p_2^*\|^2 - \langle p_1^*, p_2^* \rangle}{\|p_1^* - p_2^*\|^2}.$$

Вычислим отдельно величины, входящие в полученную формулу:

$$\|p_1^*\| = (0^2 + 35^5 + 5^2)^{1/2} = \sqrt{1250} \approx 35,36;$$

$$\|p_2^*\| = (14^2 + 0^2 + 12^2)^{1/2} = \sqrt{340} \approx 18,44;$$

$$\langle p_1^*, p_2^* \rangle = 0 \cdot 14 + 35 \cdot 0 + 5 \cdot 12 = 60;$$

$$\|p_1^* - p_2^*\| = ((-14)^2 + 35^2 + (-7)^2)^{1/2} = \sqrt{1470} \approx 38,34.$$

Подставляя в предыдущую формулу, получим:

$$t^* = \frac{\|p_2^*\|^2 - \langle p_1^*, p_2^* \rangle}{\|p_1^* - p_2^*\|^2} = \frac{340 - 60}{1470} \approx 0,19,$$

откуда следует:

$$p^* = p(t^*) = t^*(p_1^* - p_2^*) + p_2^* \approx$$

$$\approx 0,19 * (-14,35,-7) + (14,0,12) = (11,34;6,65;10,67).$$

Норма полученного вектора p^* равна:

$$\|p^*\| \approx (11,34^2 + 6.65^2 + 10,67^2)^{1/2} \approx$$

$$\approx (128,60 + 44,22 + 113,85)^{1/2} = \sqrt{286,67} \approx 16,93,$$

что меньше нормы векторов p_1^*, p_2^*. Это подтверждает, что минимум нормы достигается во внутренней точке отрезка $[0,1]$.

Теперь можно продолжить работу алгоритма аппроксимации с шага 1.

Шаг 1

Решая задачу (36) графическим методом при $y_1 = 0; y_2 = 2,1; y_3 = 0,3$, получим единственное оптимальное решение:

$$x_1^* = 5,94; x_2^* = 8,12;$$

$$z^* = z(x^*) = 40 * 5,94 + 50 * 8,12 \approx 644.$$

В качестве направления изменения вектора y^* выберем найденное направление $p^* = (11,34;6,65;10,67)$.

Пусть ресурс $V = 100$ получил приращение $\Delta V = 100$ и $y^* + \Delta y^*$ – какое-то соответствующее решение задачи (15) в определении (18) функции $Q(V + \Delta V)$. Тогда приращение вектора $y^* = (0;2,1;0,3)$ можно аппроксимировать приращением (20): $\Delta y^* \approx \lambda p^*$ вдоль направления наибыстрейшего подъема $p^* = (11,34;6,65;10,67)$ функции $q(y^*) = 644$, определенной в (15).

Величину шага λ в (20) вдоль направления наибыстрейшего возрастания функции $q(y^*)$ следует определить из ресурсного ограничения (22):

$$\Delta V = \langle \Delta y^*, p^* \rangle = \lambda \langle e, p^* \rangle, e = (60,40,50),$$

откуда следует равенство (23):

$$\lambda = \frac{\Delta V}{\langle e, p^* \rangle} = \frac{100}{1480} \approx 0,07;$$

$$\Delta y^* = \lambda p^* = \frac{\Delta V p^*}{\langle e, p^* \rangle} \approx (0,77;0,45;0,72);$$

$$y^* + \Delta y^* \approx (0,77;2,55;1,02).$$

Отсюда приближенное значение для дифференциала функции доходности по формуле (25) составляет:

$$DQ(V) \approx \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle} \Delta V = \frac{287}{1480} * 100 \approx$$

$$\approx 19, Q(V + \Delta V) \approx Q(v) + DQ(V) \approx 644 + 19 = 663.$$

Заметим, что точное значение $Q(V + \Delta V) = Q(200) = Q^*(2)$ при этом составит:

$$Q^*(v) = Q(100v) = 640 + \frac{40}{2,1}(v - 0,8) \approx$$

$$\approx 640 + 19,05(v - 0,8) = 624,76 + 19,05v =$$

$$= 624,76 + 22,86 = 647,62 \approx 648, v = 2 \geq 0,8.$$

При этом относительная погрешность вычисления функции $Q(V)$ в точке $V = 200$ составляет 2,31%, а не 2,99%, как в дифференцируемом варианте алгоритма.

Шаг 2

Решая задачу (36) графическим методом при $y_1 = 0,77 ; y_2 = 2,55 ; y_3 = 1,02$, получим единственное оптимальное решение:

$$x_1^* = 6,31 ; x_2^* = 8,24 ; z^* =$$
$$= z(x^*) = 40 * 6,31 + 50 * 8,24 \approx 664 .$$

В качестве направления изменения вектора y^* выберем найденное направление $p^* = (11,34 ;6,65 ;10,67)$.

Пусть ресурс $V = 100$ получил приращение $\Delta V = 100$ и $y^* + \Delta y^*$ – какое-то соответствующее решение задачи (15) в определении (18) функции $Q(V + \Delta V)$. Тогда приращение вектора $y^* = (0,77 ;2,55 ;1,02)$ можно аппроксимировать приращением (20): $\Delta y^* \approx \lambda p^*$ вдоль направления наибыстрейшего подъема $p^* = (11,34 ;6,65 ;10,67)$ функции $q(y^*) = 664$, определенной в (15).

Величину шага λ в (20) вдоль направления наибыстрейшего возрастания функции $q(y^*)$ следует определить из ресурсного ограничения (22):

$$\Delta V = \langle \Delta y^*, p^* \rangle = \lambda \langle e, p^* \rangle, e = (60 ,40 ,50),$$

откуда следует равенство (23):

$$\lambda = \frac{\Delta V}{\langle e, p^* \rangle} = \frac{100}{1480} \approx 0,07 ;$$

$$\Delta y^* = \lambda p^* = \frac{\Delta V p^*}{\langle e, p^* \rangle} \approx (0,77 ;0,45 ;0,72);$$

$$y^* + \Delta y^* \approx (1,54 ;3,00 ;1,74).$$

Отсюда приближенное значение для дифференциала функции доходности по формуле (25) составляет:

$$DQ(V) \approx \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle} \Delta V = \frac{287}{1480} * 100 \approx$$
$$\approx 19 , Q(V + \Delta V) \approx Q(v) + DQ(V) \approx 664 + 19 = 683 .$$

Заметим, что точное значение $Q(V + \Delta V) = Q(200) = Q^*(3)$ при этом составит:

$$Q^*(v) = Q(100 v) = 640 + \frac{40}{2,1}(v - 0,8) \approx$$
$$\approx 640 + 19,05 (v - 0,8) = 624,76 + 19,05 v =$$
$$= 624,76 + 41,91 = 666,67 \approx 667 , v = 3 \geq 0,8 .$$

При этом относительная погрешность вычисления функции $Q(V)$ в точке $V = 300$ составляет 2,39%, а не 8,85% как в дифференцируемом варианте алгоритма.

Шаг 3

Решая задачу (36) графическим методом при

$$y_1 = 1,54 ; y_2 = 3,00 ; y_3 = 1,74 ,$$

получим единственное оптимальное решение

$$x_1^* = 6,58 ; x_2^* = 8,39 ;$$
$$z^* = z(x^*) = 40 * 6,58 + 50 * 8,39 \approx 683 .$$

В качестве направления изменения вектора y^* выберем найденное направление $p^* = (11,34 ;6,65 ;10,67)$.

Пусть ресурс $V = 100$ получил приращение $\Delta V = 100$ и $y^* + \Delta y^*$ – какое-то соответствующее решение задачи (15) в определении (18) функции $Q(V + \Delta V)$. Тогда приращение вектора $y^* = (1,54 ;3,00 ;1,74)$ можно аппроксимировать приращением (20): $\Delta y^* \approx \lambda p^*$ вдоль направления наибыстрейшего подъема $p^* = (11,34 ;6,65 ;10,67)$ функции $q(y^*) = 664$, определенной в (15).

Величину шага λ в (20) вдоль направления наибыстрейшего возрастания функции $q(y^*)$ следует определить из ресурсного ограничения (22):

$$\Delta V = \langle \Delta y^*, p^* \rangle = \lambda \langle e, p^* \rangle, e = (60 ,40 ,50),$$

откуда следует равенство (23):

$$\lambda = \frac{\Delta V}{\langle e, p^* \rangle} = \frac{100}{1480} \approx 0,07 ;$$

$$\Delta y^* = \lambda p^* = \frac{\Delta V p^*}{\langle e, p^* \rangle} \approx (0,77 ;0,45 ;0,72);$$

$$y^* + \Delta y^* \approx (2,31 ;3,45 ;2,46).$$

Отсюда приближенное значение для дифференциала функции доходности по формуле (25) составляет:

$$DQ(V) \approx \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle} \Delta V = \frac{287}{1480} * 100 \approx$$
$$\approx 19 , Q(V + \Delta V) \approx Q(v) + DQ(V) \approx 683 + 19 = 702 .$$

Заметим, что точное значение $Q(V + \Delta V) = Q(400) = Q^*(4)$ при этом составит:

$$Q^*(v) = Q(100 v) = 640 + \frac{40}{2,1}(v - 0,8) \approx$$
$$\approx 640 + 19,05 (v - 0,8) = 624,76 + 19,05 v =$$
$$= 624,76 + 60,96 = 685,72 \approx 686 , v = 4 \geq 0,8 .$$

При этом относительная погрешность вычисления функции $Q(V)$ в точке $V = 400$ составляет 2,33%, а не 1,31% как в дифференцируемом варианте алгоритма, что несколько хуже. Тем не менее, относительная точность аппроксимации функции доходности не превышает 2,4%, что примерно в четыре раза лучше. При этом относительная точность вычисления функции менеджера составит не более 2,6% и получается из точности аппроксимации доходности, умноженной на величину:

$$Q(v) / (Q(v) - 12 v) \leq 686 / (686 - 12 * 4) \approx 1,08 .$$

7. МИНИМАКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДОХОДНОСТИ

В заключение приведем минимаксную форму определения функции доходности в нашем модельном примере, основанную на двойственном представлении производственной задачи, которая позволяет непосредственно исследовать ее свойства:

$$Q(V) = \max_{y : \langle e, y \rangle = V, y \geq 0} \min_{i = 1,2} \langle p_i^*, b + y \rangle . \qquad (54)$$

Здесь векторы $p_1^* = (0;35;5)$, $p_2^* = (14;0;12)$ это две крайние точки допустимого множества решений двойственной задачи, представляющего собой отрезок. Это вытекает из того, что оба ограничения двойственной задачи являются активными, что в данном примере и имеет место.

Функция внутреннего минимума в (54) имеет вид:

$$q(y) = \min\begin{Bmatrix}(12 + y_2)*35 + (30 + y_3)*5; \\ (20 + y_1)*14 + (30 + y_3)*12\end{Bmatrix} = \qquad (55)$$

$$= \min\{570 + 35y_2 + 5y_3; 640 + 14y_1 + 12y_3\}.$$

Для решения задачи (54, 55) можно исключить переменную $y_3 \ge 0$ из условия:

$$\langle e, y\rangle = 60y_1 + 40y_2 + 50y_3 = V = 100v,$$

или, после нормировки:

$$0{,}6y_1 + 0{,}4y_2 + 0{,}5y_3 = v.$$

Откуда получим:

$$y_3 = 2v - 1{,}2y_1 - 0{,}8y_2 \ge 0,$$

или

$$0{,}6y_1 + 0{,}4y_2 \le v;\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0. \qquad (56)$$

Критерий (55) будет иметь вид:

$$q(y) =$$

$$= \min\begin{Bmatrix}570 + 35y_2 + 5(2v - 1{,}2y_1 - 0{,}8y_2); \\ 640 + 14y_1 + 12(2v - 1{,}2y_1 - 0{,}8y_2)\end{Bmatrix} = \qquad (57)$$

$$= \min\begin{Bmatrix}10v + 570 - 6y_1 + 31y_2; \\ 24v + 640 - 0{,}4y_1 - 9{,}6y_2\end{Bmatrix}.$$

Задача недифференцируемой максимизации критерия (57) при ограничениях (56) может быть решена приближенно методом обобщенного градиентного спуска типа метода Поляка [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается модельный пример построения кривой доходности, который позволяет оценить точность аппроксимации с помощью предложенных нами конструкций и служить тестом для отладки соответствующих программ.

Литература

1. Ашманов С.А. Линейное программирование [Текст] / С.А. Ашманов. – М. : Наука, 1981.
2. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2011. − №3. − С. 76-84.
3. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в однопараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2011. − №2. − С. 242-247.
4. Брейли Р. Принципы корпоративных финансов [Текст] / Р. Брейли, С. Майерс. − М. : ИНФРА-М, 1999.
5. Ван Хорн Дж. К. Основы финансового менеджмента [Текст] / Дж. К. Ван Хорн. − М. : Финансы и статистика, 2004.
6. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс [Текст] / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972.
7. Завриев С.К. Стохастический конечно-разностный алгоритм минимизации функции максимина [Текст] / С.К. Завриев, А.Г. Перевозчиков // Ж-л вычислительной математики и математической физики. – 1991. − Т. 30 ; №4. − С. 629-633.
8. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» / Deloitte&Touche. Декабрь 2003 − март 2005.
9. Михалевич В.С. и др. Методы невыпуклой оптимизации [Текст] / В.С. Михалевич, А.М. Гупал, В.И. Норкин. − М. : Наука, 1987.
10. Мищенко А.В. Модели управления производственно-финансовой деятельностью предприятия в условиях привлечения заемного капитала [Текст] / А.В. Мищенко, О.А. Артеменко // Финансовая аналитика. – 2012. − №42. − С. 2-13.
11. Оценка бизнеса [Текст] : учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. − М. : Финансы и статистика, 2002.
12. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию [Текст] / Б.Т. Поляк. − М. : Наука, 1983.
13. Федоров В.В. Численные методы максимина [Текст] / В.В. Федоров. – М. : Наука, 1979.
14. Шарп У. и др. Инвестиции [Текст] : пер. с англ. / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли. − М. : ИНФРА-М, 1998. − 1028 с.

Ключевые слова

Собственный капитал компании, стоимость собственного капитала компании, доходный подход, метод прямой капитализации прибыли, инвестиции в основные средства компании, заемные средства компании на долгосрочной основе, зависимость стоимости от объема инвестиций, линия финансового менеджера, модельный пример построения линии финансового менеджера.

Перевозчиков Александр Геннадьевич

Лесик Илья Александрович

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается простейшая модель инвестиций в основные средства компании с использованием заемного капитала. В качестве критерия предлагается использовать прямой критерий стоимости собственного капитала компании. Стоимость собственного капитала может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода, что позволяет поставить задачу исследования стоимости компании от объема заемных средств. Эту зависимость можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах. Она наглядно показывает потенциальные возможности роста стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов.

В предыдущей работе авторов было показано, что линия финансового менеджера является графиком возрастающей, вогнутой и кусочно-линейной функции и получена формула для ее обобщенного дифференциала. Это позволяет использовать численный метод для ее построения и решает в определенном смысле поставленную задачу в общем случае. В настоящей работе рассматривается модельный пример построения кривой доходности, который позволяет оценить точность аппроксимации с помощью предложенных авторами конструкций и служить тестом для отладки соответствующих программ.

Вот основные идеи, заложенные в новой работе авторов. Она предназначена для аспирантов и докторантов, специализирующихся в области финансового менеджмента предприятия, а также для действующих профессиональных оценщиков инвестиций и бизнеса.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.Г. Перевозчикова, И.А. Лесика может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н, проф., зав. кафедрой бухгалтерского учета и аудита, проректор по научной работе Тверской государственной сельскохозяйственной академии

[Перейти на Главное МЕНЮ]
[Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ]