

6. ПРОБЛЕМЫ ИНВЕСТИРОВАНИЯ

6.1. ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Абубакиров Т.А., аспирант кафедры «Математические методы в экономике» Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова; Мищенко А.В., д.э.н., профессор кафедры логистики НИУ Высшая школа экономики

[Перейти на Главное МЕНЮ](#)
[Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ](#)

В условиях неопределенности и повышенных рисков относительно развития экономики в целом становится актуальным вопрос управления портфелем инвестиционных проектов с целью управления рисками портфеля. В работе описан ряд моделей оптимизации портфеля инвестиционных проектов, предназначенных для повышения дохода от портфеля либо снижения риска портфеля.

ВВЕДЕНИЕ

Для правильного выбора инвестиционного проекта инвестору необходим специальный инструментарий, который позволит количественно оценить эффективность каждой из альтернатив. Задача усложняется, когда инвестору необходимо составить портфель инвестиционных проектов. В условиях нестабильной ситуации в экономике важным критерием оптимальности инвестиционного портфеля является управление рисками портфеля.

В данной работе представлены основные методы оптимизации портфеля инвестиционных проектов. В их числе рассмотрен случай, когда у инвестора есть возможность привлечения кредита, а также рассмотрена задача поиска максимальной процентной ставки, которая обеспечивает целесообразность привлечения кредита. Также в работе уделено внимание моделям, учитывающим риск. Риск проявляется в виде неопределенности будущих потоков платежей, заданных вероятностным распределением.

1. Детерминированные портфели инвестиционных проектов

При принятии решений о выборе объекта инвестирования перед инвестором стоит задача наиболее эффективного использования финансовых средств, которые могут быть направлены на реализацию различных проектов (портфелей проектов), каждый из которых может быть охарактеризован с использованием ряда параметров, например, ожидаемых денежных потоков, *NPV* проекта, длительности реализации, риска проекта, объема требуемых инвестиций и т. д. При этом при оптимизации портфеля проектов следует принимать во внимание ограниченность финансовых ресурсов у инвестора, а также его требования по доходности сформированного портфеля инвестиционных проектов.

Таким образом, в рамках данной работы будет представлен ряд моделей, позволяющих инвестору принимать решение о выборе оптимальной структуры портфеля инвестиционных проектов, который удовлетворяет требованиям, выдвигаемым к нему инвестором. Помимо этого, будут рассмотрены две

ситуации, которые предполагают финансирование проектов либо полностью за счет собственных средств, либо при условии привлечения кредита.

Ниже в работе будут рассмотрены следующие ситуации:

- формирование портфеля инвестиционных проектов без учета риска;
- формирование портфеля инвестиционных проектов без возможности привлечения кредитных ресурсов;
- формирование портфеля инвестиционных проектов с учетом возможности привлечения кредитных ресурсов;
- определение максимальной ставки по кредиту, которая обеспечивает целесообразность привлечения кредита;
- формирование портфеля инвестиционных проектов при интервальном задании *NPV* проектов;
- формирование портфеля инвестиционных проектов с учетом риска;
- также будут представлены расчетные примеры по каждой из представленных моделей.

2. Формирование портфеля инвестиционных проектов без учета риска

При решении вопроса о формировании портфеля инвестиционных проектов может учитываться значительное число факторов, например, доходность или риск проекта. В детерминированной постановке задачи учитывается только финансовый результат, который приносит реализация того или иного проекта, которая выражается через чистый приведенный доход, определение которого приведено в [2, с. 274]:

$$NPV = \sum_{t=0}^T \frac{a_t - b_t}{(1+k)^t}, \tag{1}$$

где a_t – входящий денежный поток (доход), который приносит реализация проекта на временном интервале от $t = 0$ до T ;

b_t – исходящий денежный поток, который обеспечивает реализацию проекта и связан с вложением материальных, финансовых, человеческих и других ресурсов в реализацию проекта;

k – ставка дисконтирования.

Результирующий финансовый поток может быть представлен как $c_t = a_t - b_t$, в дальнейшем именно данное обозначение и будет использовано для формализации модели.

Таким образом, данная модель предполагает выбор таких инвестиционных проектов, входящих в портфель, которые бы обеспечивали максимальный суммарный *NPV* по всем проектам. Основным ограничением в рамках рассматриваемого случая является размер финансовых ресурсов на каждом этапе реализации проекта. Также стоит отметить, что в данном случае у инвестора нет возможности привлечения кредита для финансирования проектов, и их реализация полностью происходит за счет использования собственных средств.

В соответствии с [3, с. 117-147], математическая формализация данной модели выглядит следующим образом.

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^n NPV_i x_i \rightarrow \max, \quad (2)$$

где n – общее число рассматриваемых проектов.

Данное выражение предполагает формирование такого портфеля инвестиционных проектов, который бы обеспечивал максимальный суммарный NPV по входящим в него проектам.

Ограничения модели:

$$\sum_{i=1}^n c_t^i x_i \leq S_t, t = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (3)$$

где $t = \overline{0, T}$, c_t^i – объем потребляемых инвестиционных ресурсов на реализацию проекта i на каждом интервале от 0 до T ;

S_t – объем ресурсов, которыми располагает инвестор на каждом интервале от 0 до T .

Данное ограничение демонстрирует, что объем суммарных потребляемых финансовых ресурсов на каждом временном интервале t не превышает объем ресурсов инвестора.

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (4)$$

Данное ограничение означает, что проекты могут финансироваться частично, другими словами являются делимыми.

$$x_i \in \{0; 1\} \quad (5)$$

Данное ограничение означает, что проекты являются неделимыми: инвестор может либо принять, либо отказаться от реализации проекта i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$).

3. Модели портфелей инвестиционных проектов с возможностью привлечения кредита

Представленная выше модель не предполагает привлечение кредитных ресурсов для обеспечения реализации проектов. В случае же, когда возможно использование заемных средств, дополнительно учитываются следующие факторы.

1. Вводится дополнительная информация об объеме доступных кредитных ресурсов на каждом этапе реализации проектов, а также процентная ставка по каждому из них и срок привлечения.
2. Рассчитываются финансовые потоки по каждому проекту (кредиту) в каждый из рассматриваемых периодов.
3. Входящий поток – размер привлеченного кредита.
4. Исходящий поток – выплата по процентам и основному долгу.

Рассчитывается NPV_k по каждому из кредитов в соответствии с рассчитанными ранее потоками ($k = 1, 2, \dots, m$). Каждый кредит рассматривается как отдельный инвестиционный проект, и задача принимает следующий вид.

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^n NPV_i \cdot x_i + \sum_{k=1}^m NPV_k \cdot x_k \rightarrow \max, \quad (6)$$

где n – общее число рассматриваемых проектов;
 m – общее число доступных кредитов.

Ограничение на объем доступных финансовых ресурсов:

$$\sum_{i=1}^n c_t^i \cdot x_i + \sum_{k=1}^m c_t^k \cdot x_k \leq s_t + \sum_{k=1}^m s_t^k \cdot x_k, t = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (7)$$

где s_t^k, c_t^k – входящие и исходящие потоки по кредиту k в период t .

$$0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Данное ограничение демонстрирует то, что проекты могут финансироваться частично, а кредит может привлекаться только в необходимом размере.

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

При вводе данного ограничения считаем, что проекты являются неделимыми и инвестор может либо принять, либо отказаться от реализации проекта.

Решение данной задачи показывает не только то, какие проекты стоит финансировать и в каком объеме (в непрерывном случае), но и какие кредиты и какого размера необходимо привлечь.

4. Определение максимально допустимой кредитной ставки

При постановке задачи с возможностью привлечения кредитных ресурсов возможна оценка максимальной кредитной ставки, при которой целесообразно использование кредита в качестве дополнительного источника финансирования проектов. В этом случае еще на начальном этапе формирования портфеля проектов подобная оценка дает возможность понять приемлемость привлечения кредитов путем сравнения существующих предложений по кредитным ставкам на рынке с полученным значением.

При определении максимально допустимой кредитной ставки необходимо проделать следующие шаги.

1. Рассчитать x_i для ситуации, когда привлечение кредита невозможно, другими словами, выбрать проекты, которые станут объектом финансирования.
2. Найти значение целевой функции для выбранного множества инвестиционных проектов.
3. Найти максимальное значение кредитной ставки путем решения следующей задачи:

$$y \rightarrow \max, \quad (10)$$

где y – искомая процентная ставка (в долях).

Ограничение на доступные финансовые ресурсы по кредитам должны быть выражены через y :

$$\sum_{i=1}^n c_t^i \cdot x_i + \sum_{k=1}^m c_t^k(y) \cdot x_k \leq s_t + \sum_{k=1}^m s_t^k \cdot x_k, t = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (11)$$

где c_t^i – объем потребляемых финансовых ресурсов по проекту i в момент времени t ;

$c_t^k(y)$ – размер выплат по кредиту k в момент времени t , выраженный через размер кредитной ставки y ;

s_t^k – размер финансовых поступлений по кредиту k в момент времени t ;
 m – число кредитов.

Ограничение на доходность формируемого портфеля проектов:

$$\sum_{i=1}^n NPV_i \cdot x_i + \sum_{k=1}^m NPV_k(y) / - \dots x_k \geq \sum_{i=1}^n NPV_i \cdot x_i^* \quad (12)$$

где x_i^* – значение, найденное при решении задачи при отсутствии возможности привлечения кредита, а $\sum_{i=1}^n NPV_i \cdot x_i^*$ – значение целевой функции при данном решении.

$$0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Данное ограничение демонстрирует, что проекты могут финансироваться частично, а кредит может привлекаться только в необходимом размере:

$$x_i \in \{0; 1\}. \quad (14)$$

При вводе данного ограничения указывается на то, что проекты являются неделимыми, инвестор может либо принять, либо отказаться от реализации проекта.

Таким образом при решении данной задачи определяется максимальное значение процентной ставки, при которой целесообразно финансирование сформированного портфеля инвестиционных проектов за счет заемного капитала.

Расчетные примеры

Далее рассмотрим расчетные примеры по приведенным выше моделям.

Предположим, что у инвестора имеется четыре альтернативных варианта инвестиционных проектов, денежные потоки по которым представлены ниже, NPV рассчитаны при ставке дисконтирования 10% (табл. 1).

Таблица 1

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Номер проекта	Период				NPV
	0	1	2	3	
Проект 1	-20	-15	10	40	4,26
Проект 2	-30	10	-5	50	11,39
Проект 3	-35	25	10	30	16,85
Проект 4	-50	10	40	30	13,35

Что касается средств инвестора, то только на нулевом этапе в его распоряжении имеется 100 единиц, на всех остальных этапах реализации проектов в его распоряжении нет никаких средств, только лишь поступления от уже реализуемых проектов.

В общем виде данная задача выглядит следующим образом:

$$4,26x_1 + 11,39x_2 + 16,85x_3 + 13,35x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 50x_4 \leq 100 \\ 15x_1 - 10x_2 - 25x_3 - 10x_4 \leq 0 \\ -10x_1 + 5x_2 - 10x_3 - 40x_4 \leq 0 \\ -40x_1 - 50x_2 - 30x_3 - 30x_4 \leq 0 \\ 0 \leq x_i \leq 1 \text{ или } x_i \in \{0; 1\}, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (15)$$

В результате расчетов при отсутствии ограничения на неделимость проектов были получены следующие значения (табл. 2).

Таблица 2

ПОЛУЧЕННОЕ РЕШЕНИЕ (НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАЙ)

Номер проекта	Период				NPV	x
	0	1	2	3		
Проект 1	-20	-15	10	40	4,26	0
Проект 2	-30	10	-5	50	11,39	1
Проект 3	-35	25	10	30	16,85	1
Проект 4	-50	10	40	30	13,35	0,7
Средства инвестора	100	0	0	0	-	-
Потребность	100	-42	-33	-101	-	-

При значении целевой функции, равном 37,58, отображающей NPV портфеля.

Если же вводить дополнительное ограничение на неделимость проектов, то получаем следующие ответы (табл. 3).

Таблица 3

ПОЛУЧЕННОЕ РЕШЕНИЕ (ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЙ СЛУЧАЙ)

Номер проекта	Период				NPV	x
	0	1	2	3		
Проект 1	-20	-15	10	40	4,26	1
Проект 2	-30	10	-5	50	11,39	1
Проект 3	-35	25	10	30	16,85	1
Проект 4	-50	10	40	30	13,35	0
Средства инвестора	100	0	0	0	-	-
Потребность	85	-20	-15	-120	-	-

При значении целевой функции, равном 32,49.

Таким образом, при вводе дополнительного ограничения на неделимость мы получаем меньшее значение NPV всего портфеля. Это достигается за счет того, что в первом случае мы полностью расходует имеющиеся средства и финансируем наиболее прибыльные проекты. При неделимости же проектов, на этапе 1 у инвестора недостаточно средств на выбор наиболее доходного проекта, и он вынужден выбирать проект 1 с меньшей доходностью, но и меньшим размером первоначальных инвестиций. В этом случае часть располагаемых средств у инвестора так и остаются неиспользованными.

Теперь предположим, что у инвестора появилась возможность привлечения кредита на 1 год под 20% годовых. При этом в период $t = 0$ он может привлечь кредит размером 40 у.е., а в период $t = 1 - 5$ у.е.

В итоге данные кредиты будут характеризоваться следующими потоками (табл. 4).

Таблица 4

ФИНАНСОВЫЕ ПОТОКИ ПО КРЕДИТУ

Номер проекта	Период				NPV
	0	1	2	3	
Кредит 1	40	-48	-	-	-3,64
Кредит 2	-	5	-6	-	-0,41

И вид задачи несколько преобразуется:

$$\begin{aligned}
 & 4,26x_1 + 11,39x_2 + 16,85x_3 + \\
 & + 13,35x_4 - 3,64x_{k_1} - 0,41x_{k_2} \rightarrow \max \\
 & \begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 50x_4 - 40x_{k_1} \leq 100 \\ 15x_1 - 10x_2 - 25x_3 - 10x_4 + 48x_{k_1} - 5x_{k_2} \leq 0 \\ -10x_1 + 5x_2 - 10x_3 - 40x_4 + 6x_{k_2} \leq 0 \\ -40x_1 - 50x_2 - 30x_3 - 30x_4 \leq 0 \\ x_i \in \{0; 1\}, i = 1, 2, 3, 4, k_1, k_2 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{16}$$

В результате решения данной задачи изменилась структура формируемого портфеля – в него вошел проект 4 и исключен проект 1. При этом были привлечены оба кредита для финансирования реализации выбранных инвестиционных проектов.

Значение целевой функции превысило аналогичный показатель для рассматриваемой задачи, которая решалась в целочисленном формате, и составило 37,54 д.е.

Если говорить о поиске максимальной кредитной ставки, при которой целесообразно привлечение кредита, то она будет определена в ходе решения следующей задачи:

$$\begin{aligned}
 & y \rightarrow \max \\
 & \begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 50x_4 - 40x_{k_1} \leq 100 \\ 15x_1 - 10x_2 - 25x_3 - 10x_4 + 40(1+y)x_{k_1} - 5x_{k_2} \leq 0 \\ -10x_1 + 5x_2 - 10x_3 - 40x_4 + 5(1+y)x_{k_2} \leq 0 \\ -40x_1 - 50x_2 - 30x_3 - 30x_4 \leq 0 \\ 4,26x_1 + 11,39x_2 + 16,85x_3 + 13,35x_4 - \\ - \left(40 - \frac{40}{1,1}(1+y) \right) x_{k_1} + \left(\frac{5}{1,1} - \frac{5}{1,21}(1+y) \right) x_{k_2} \geq 32,49 \\ x_i \in \{0; 1\}, i = 1, 2, 3, 4, k_1, k_2 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{17}$$

В ходе решения данной задачи было получено граничное значение процентной ставки по кредиту 32,46%, при достижении которой привлечение кредита теряет смысл и не обеспечивает роста доходов от реализации портфеля проектов.

5. Формирование портфеля инвестиционных проектов при интервальном задании NPV

Таким образом, были рассмотрены примеры задач, когда мы имеем дело с четко детерминированными параметрами каждого из проектов. Но в реальности NPV проекта не всегда может быть однозначно определен, в большинстве случаев NPV проектов задан интервальной оценкой и может при-

нимать любое значение из заданного интервала $NPV_i \in [NPV_i^1; NPV_i^2]$.

Также стоит отметить, что если речь идет об интервальной оценке NPV по каждому проекту, то, следовательно, можно утверждать и о том, что NPV всего портфеля также будет иметь интервальную оценку:

$$NPV_{портфеля} \in \left[\sum_{i=1}^n x_i NPV_i^1; \sum_{i=1}^n x_i NPV_i^2 \right], \tag{18}$$

где n – число проектов, входящих в рассматриваемый портфель.

В случае интервально заданных NPV усложняется процесс выбора наилучшего портфеля, и в подобных ситуациях применяется метод выделения множества потенциально оптимальных проектов.

Предположим, имеется множество P всех располагаемых портфелей. Выделим из него $P_{opt} \subseteq P$.

При этом можно сформулировать ряд правил, на основании которых будет происходить выделение множества потенциально оптимальных портфелей.

1. Выбрать портфель с максимальной правой границей портфельного NPV и включить его в P_{opt} .
2. Выбрать портфель с максимальной левой границей портфельного NPV и включить его в P_{opt} .
3. Исключить из множества P те портфели, у которых правая граница портфельного NPV меньше максимальной левой границы портфельного NPV из п. 2 и остальные портфели включить в P_{opt} .

Далее на множестве потенциально оптимальных портфелей производится сравнение выделенных портфелей для определения области изменения NPV_i, на которой данный портфель оптимален.

Данный метод решения задачи формирования портфеля инвестиционных проектов соответствует приведенному в [4, с. 179-182].

Расчетные примеры

Имеется три инвестиционных проекта с интервально заданными NPV:

$$\begin{aligned}
 & NPV_1 \in [30; 40]; \\
 & NPV_2 \in [50; 70]; \\
 & NPV_3 \in [10; 25].
 \end{aligned}$$

Из данных проектов может быть сформировано три инвестиционных портфеля:

$$\begin{aligned}
 & NPV_{12} \in [80; 110]; \\
 & NPV_{23} \in [60; 95]; \\
 & NPV_{13} \in [40; 65].
 \end{aligned}$$

Из данного множества необходимо выбрать потенциально оптимальные портфели. В данное множество войдет портфель 12, так как он обладает максимальной левой и правой границами, и будет исключен портфель 13, имеющий правую границу (65) меньше, чем максимально левая у портфеля 12 (80).

Таким образом, в множество потенциально оптимальных портфелей входят портфели 12 и 23:

$$\begin{aligned}
 & NPV_{12} \in [80; 110]; \\
 & NPV_{23} \in [60; 95].
 \end{aligned}$$

Построим систему неравенств, которая позволит определить наилучший портфель в рассматриваемом множестве:

$$\begin{cases} NPV_{12} \geq NPV_{23} \\ 80 \leq NPV_{12} \leq 110 \\ 60 \leq NPV_{23} \leq 95 \end{cases} \quad (19)$$

Изобразим полученное множество значений портфелей NPV_{12} и NPV_{23} графически с помощью рис. 1:

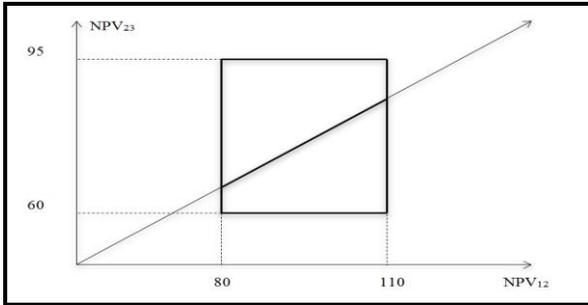


Рис. 1. Графическое отображение решения примера для ситуации, когда в портфель входят проекты 1 и 2

На полученном графике видно, что в большем числе случаев, если значения NPV_1 распределены равномерно, доходность по портфелю 12 выше, чем по портфелю 23. Таким образом, в данной ситуации выбор будет сделан в пользу портфеля 12.

Но также возможна ситуация, в которой необходимо определить границы изменения NPV по каждому проекту в портфеле, при которых выбор осуществляется в пользу определенного портфеля.

Так, например, изменим несколько условия предыдущей задачи, в частности, поменяем NPV проекта 3:

$$\begin{aligned} NPV_1 &\in [30; 40]; \\ NPV_2 &\in [40; 70]; \\ NPV_3 &\in [20; 50]. \end{aligned}$$

Из данных проектов может быть сформировано три инвестиционных портфеля:

$$\begin{aligned} NPV_{12} &\in [70; 110]; \\ NPV_{23} &\in [60; 120]; \\ NPV_{13} &\in [50; 90]. \end{aligned}$$

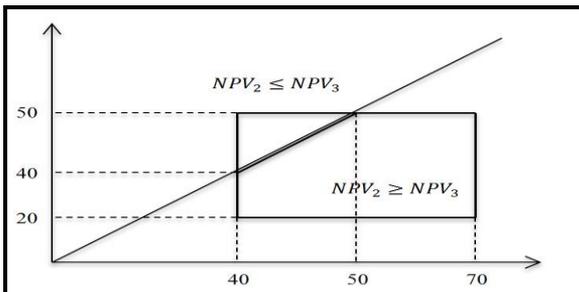


Рис. 2. Графическое отображение решения примера для ситуации, когда в портфель входят проекты 2 и 3

В соответствии с процедурой выбора множества потенциально оптимальных портфелей получаем, что все три портфеля входят в него. Теперь сформулируем задачу таким образом – необходимо определить границы изменения NPV отдельных проектов, при которых наилучшим является портфель, сформированный из проектов 1 и 2. Для этого будет построена следующая система неравенств:

$$\begin{cases} 30 \leq NPV_1 \leq 40 \\ 50 \leq NPV_2 \leq 70 \\ 20 \leq NPV_3 \leq 50 \\ NPV_{12} \leq NPV_{13} \\ NPV_{12} \leq NPV_{23} \\ 30 \leq NPV_1 \leq 40 \\ 50 \leq NPV_2 \leq 70 \\ 20 \leq NPV_3 \leq 50 \\ NPV_1 + NPV_2 \leq NPV_1 + NPV_3 \\ NPV_1 + NPV_2 \leq NPV_2 + NPV_3 \\ 30 \leq NPV_1 \leq 40 \\ 50 \leq NPV_2 \leq 70 \\ 20 \leq NPV_3 \leq 50 \\ NPV_2 \leq NPV_3 \\ NPV_1 \leq NPV_3 \end{cases} \quad (20)$$

Рассмотрим сначала данные неравенства в двумерном пространстве, а потом перенесем полученные результаты в трехмерное (рис. 2, 3).

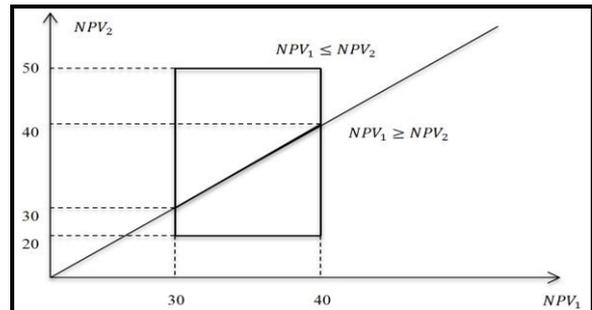


Рис. 3. Графическое отображение решения примера для ситуации, когда в портфель входят проекты 1 и 3

Если совместить данные два графика, то в трехмерном пространстве останется лишь следующая фигура, которая демонстрирует, что для обеспечения выбора портфеля из проектов 1 и 2 необходимо, чтобы NPV проектов варьировались в следующих пределах:

$$\begin{aligned} NPV_1 &\in [30; 40]; \\ NPV_2 &\in [40; 50]; \\ NPV_3 &\in [40; 50]. \end{aligned}$$

Таким образом, в данной части работы было показано, как происходит выбор инвестиционных проектов в составе портфеля и какие факторы могут определять выбор в пользу того или иного проекта. Но в основном данные модели дают возможность выбора, только лишь основываясь на доходе, кото-

рый обеспечивает тот или иной проект, не давая оценки его риска, который в свою очередь может быть определен как отклонение от заданной доходности (рис. 4).

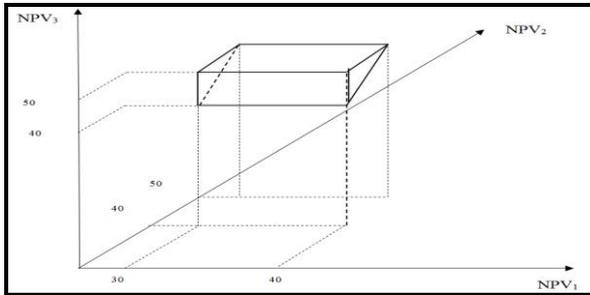


Рис. 4. Графическое отображение в трехмерном пространстве области, на которой лучшим будет портфель, состоящий из проектов 1 и 2

6. Формирование портфеля инвестиционных проектов с учетом риска

Ниже будет приведена модель, которая дает возможность учета риска проекта, оценивая его как одну из составляющих эффективности, а именно определяя целевую функцию как минимизацию риска портфеля, а одним из ограничений является требуемая доходность портфеля проектов.

Пусть существует n инвестиционных проектов, при этом по каждому из них детерминированы только начальные инвестиции (другими словами, потоки в момент времени $t = 0$). Финансовые потоки во все остальные периоды времени от 0 до T представляют собой случайные величины с известным законом распределения.

Таким образом, на основе данной информации может быть восстановлен закон распределения NPV по каждому проекту и определено его математическое ожидание и дисперсия. Это позволяет нам привести задачу к виду, описанному в [1, с. 135-142]. Формализация модели выглядит следующим образом. Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \cdot x_i^2 \cdot d_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n cov_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \cdot d_i \cdot d_j \rightarrow \min \tag{21}$$

где σ_i^2 – дисперсия NPV для проекта с номером i ; cov_{ij} – ковариация NPV по проектам i и j ; $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$.

Пусть объем инвестиций в проект в момент времени $t = 0$ равен $b_i^0 (i = 1, \dots, n)$. Обозначим $d_i = b_i^0 / S_0$. Очевидно, что d_i – это доля средств, инвестируемых в проект с номером i в том случае, если проект выполняется в полном объеме.

Ограничение на объем доступных финансовых ресурсов:

$$-\sum_{i=1}^n c_i^t x_i \leq S_t, t = 0, 1, 2, \dots, T, \tag{22}$$

где c_i^t – минимальное из возможных значений финансового потока по проекту i в момент времени t , т.е. $c_i^t = \min_{e=1,m} c_{ie}^t$.

Ограничение на доходность портфеля:

$$\sum_{i=1}^n NPV_i x_i \geq D_{sp}, \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i d_i \leq 1, \tag{24}$$

где D_{sp} – требуемая доходность портфеля.

$0 \leq x_i \leq 1$ – данное ограничение показывает то, что проекты могут финансироваться частично;

NPV_i – математическое ожидание NPV по проекту i .

В результате решения данной задачи находится оптимальная доля, в которой необходимо финансировать проекты в рамках сформированного портфеля.

7. Расчетный пример

В табл. 5, приведенной ниже, представлено распределение финансовых потоков по каждому из проектов, а также итоговые значения совместных вероятностей и соответствующие NPV (ставка дисконтирования 10%).

Таблица 5

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Наименование	Период 0	Период 1		Период 2		Совместная вероятность	NPV
		Вероятность	Финансовый поток	Вероятность	Финансовый поток		
Проект 1	-300	0,4	100	0,3	250	0,12	-2,48
	-	-	-	0,7	300	0,28	38,841
	-	-0,6	200	0,3	300	0,18	129,75
	-	-	-	0,7	150	0,42	5,79
Проект 2	-200	0,4	150	0,3	100	0,12	119,01
	-	-	-	0,7	150	0,28	60,33
	-	0,6	100	0,3	150	0,18	14,88
	-	-	-	0,7	200	0,42	56,20

Числовые характеристики случайных величин, представляющих собой NPV каждого из проектов, найдем в соответствии с [5, с. 94-100]. Математическое ожидание по первому проекту составляет $NPV_1 = 36,36$, а по второму $NPV_2 = 45,45$, соответствующие значения дисперсий по проектам $\sigma_1^2 = 2145,35$, $\sigma_2^2 = 362,68$. Ковариация же в рассматриваемом случае равняется $cov_{12} = -518,41$.

В нулевом периоде у инвестора имеется 400 у.е. финансовых ресурсов, которые могут быть направлены на реализацию проектов. Таким образом, сразу очевидно, что невозможно полное финансирование обоих проектов, поэтому при реализации данной модели будут определены доли финансирования проектов.

Целевая функция:

$$2145,35 x_1^2 d_1^2 + 362,68 x_2^2 d_2^2 - 2 \cdot 518,41 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot d_1 \cdot d_2 \rightarrow \min \quad (25)$$

Ограничения на финансовые ресурсы:

$$\begin{cases} 300 x_1 + 200 x_2 \leq 400 \\ -100 x_1 - 100 x_2 \leq 0 \\ -150 x_1 - 100 x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (26)$$

Ограничение на требуемую доходность портфеля (40 у.е.):

$$\begin{aligned} 36,36 x_1 + 45,45 x_2 &\geq \\ \geq 40, 0 \leq x_i &\leq 1, i = 1, 2 \end{aligned} \quad (27)$$

При решении данной задачи были получены следующие доли финансирования проектов (табл. 6).

Таблица 6

ФИНАНСИРОВАНИЕ ПРОЕКТОВ

Проект	Доля участия
Проект 1	0,22
Проект 2	0,70

При этом дисперсия данного портфеля составила 122,99, а соответствующее стандартное отклонение – 11,09 у.е. Доходность портфеля осталась на граничном значении в 40 у.е., при этом лимит по имеющимся финансовым ресурсам не был полностью исчерпан, и остались свободные ресурсы.

Таким образом, в рамках данной работы был представлен ряд моделей, которые предлагают различные подходы к оптимизации портфелей инвестиционных проектов в условиях ограниченности финансовых ресурсов, а также неполноты информации и невозможности точно оценить те финансовые потоки, которые будут связаны с реализацией того или иного проекта.

8. Применение модели формирования портфеля инвестиционных проектов

В связи с расширением компании перед ней встала необходимость расширения клиентской базы. Это в свою очередь требует инвестиций в продвижение компании. В данной работе вопрос управления этими инвестициями был рассмотрен с точки зрения формирования портфеля инвестиционных проектов. В качестве проектов выступают возможные альтернативы продвижения компании в обществе.

Построение портфеля было рассмотрено на примере формирования объема инвестиций в такие способы продвижения, как создание колл-центра и реклама в специализированных средствах массовой информации. Таким образом, были сформированы следующие проекты. Проект 1 – создание колл-центра и финансирование его работы на год вперед. Требуемые инвестиции составляют 6 000 тыс. руб. на покупку оборудования, а так же 800 тыс. руб. ежемесячно в течение года в виде заработной платы сотрудникам колл-центра. Проект 2 – заключение договора с существующим колл-центром на оказание услуг. Требуемые инвестиции составляют 1 000 тыс. руб. в месяц, но качество оказываемых услуг ниже, чем у собственного колл-центра, так как при создании собственного колл-центра у компании больше возможностей контролировать ка-

чество работы и в случае необходимости корректировать его работу «на ходу».

Проект 3 – реклама в специализированном журнале в течение года. Требуемые инвестиции составляют 900 тыс. руб. ежемесячно в течение одного года.

Входящие потоки для данных трех проектов будут включать в себя выручку от новых привлеченных клиентов. Необходимо учитывать, что по прошествии рассматриваемого периода в первом случае у компании остается оборудование для колл-центра, и в случае, если опыт использования своего колл-центра окажется успешным, компания может продолжить его, в противном случае оборудование может быть реализовано по остаточной стоимости 4 800 тыс. руб.

В рассматриваемом примере был рассмотрен временной диапазон, состоящий из 12 периодов ($t = 0, 1, 2, \dots, 11$).

Таблица 7

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Наименование	Период 0	Периоды 1-10		Период 11			
	Стоимость CF-	Стоимость CF-	Вероятность Доход CF+	Стоимость CF-	Вероятность Доход CF+		
Проект 1	-6 800	-800	0,6	1 600	-800	0,6	6 400
			0,3	1 400		0,3	6 200
			0,1	900		0,1	5 700
Проект 2	-1 000	-1 000	0,6	1 300	-1 000	0,6	1 300
			0,3	1 150		0,3	1 150
			0,1	800		0,1	800
Проект 3	-900	-900	0,6	1 100	-900	0,6	1 100
			0,3	1 000		0,3	1 000
			0,1	850		0,1	850

Предполагается стохастичность денежных потоков с определенной вероятностью. В каждом периоде существуют определенные риски, в частности, риск отсутствия отклика на рекламу, что влечет за собой риск недополучения прибыли. Все распределения размеров денежных потоков и вероятностей наступления тех или иных событий были составлены на основании экспертных оценок сотрудников компании. Таким образом, последовательность событий, размер денежных потоков, а также вероятности, с которыми эти денежные потоки будут получены, можно представить в виде схемы, приведенной в табл. 7.

На следующем шаге были формализованы данные, посчитаны суммарные денежные потоки по каждому проекту как сумма входящего и исходящего, рассчитан чистый приведенный денежный доход по формуле:

$$NPV = \sum_{t=0}^T \frac{a_t - b_t}{(1+k)^t}, \quad (28)$$

где a_t – входящий денежный поток, который приносит реализация проекта на временном интервале от $t = 0$ до T ; b_t – исходящий денежный поток, который обеспечивает реализацию проекта и связан с вложением материальных, финансовых, человеческих и прочих ресурсов в реализацию проекта.

Ставка дисконтирования k рассчитывается по формуле:

$$K = (1+n_1)(1+n_2)(1+n_3) - 1, \quad (29)$$

где p_1 – реальная ставка ссудного процента;
 p_2 – темп инфляции;
 p_3 – вероятность риска.

В данной модели p_3 не включаем в расчет. Таким образом, была получена ставка дисконтирования денежных потоков $k=12\%$ (в годовом выражении для удобства расчета ставка была округлена до целых). Были рассчитаны совместные вероятности событий и получены следующие числовые характеристики для распределений денежных потоков, представленные в табл. 8.

Ранее была описана модель построения оптимального портфеля инвестиций. Используя ее и преобразованные данные, была построена следующая модель (все данные в тыс. руб.):

$$\begin{aligned}
 & 658,71^2 x_1^2 + 472,85^2 x_2^2 + 247,48^2 x_3^2 + \\
 & + 2 \cdot 191859,67 x_1 x_2 + 2 \cdot 103309,05 x_1 x_3 + \\
 & + 2 \cdot 115853,72 x_2 x_3 \rightarrow \min
 \end{aligned} \quad (30)$$

Ограничения на финансы :

$$\begin{cases}
 6800 x_1 + 1000 x_2 + 900 x_3 \leq 7000 \\
 -700 x_1 - 205 x_2 - 145 x_3 \leq 0, t = 1, \dots, 10 \\
 -55000 x_1 - 205 x_2 - 145 x_3 \leq 0, t = 11
 \end{cases}$$

Ограничения на доходность :

$$\begin{cases}
 4493,48 x_1 + 1131,73 x_2 + 607,81 x_3 \geq 0 \\
 \sum_{i=1}^3 x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3
 \end{cases}$$

Решением задачи является вектор $X=(x_1, x_2, x_3)$, характеризующий долю средств, инвестируемых в каждый проект для получения наилучшего результата при минимальном риске.

Таблица 8

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ NPV

Проект	Мат. ожидание NPV	Стандартное отклонение NPV
1	4493,48	658,71
2	1131,73	472,85
3	607,81	247,48

Изложенная задача была решена с помощью методов линейного программирования в среде Excel. Было получено следующее решение (табл. 9).

Таблица 9

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Доля средств, инвестируемых в проекты			Доходность инвестиций
x1	x2	x3	
0	0	1	607,81

При этом оптимальной суммой для вложения является 900 тыс. руб. ежемесячно. Инвестируя столько средств, NPV будет положительным – а именно 607,81 руб. – проект будет доходным, а риск минимальным.

Таким образом, для достижения положительного финансового результата на ближайшие два месяца и поддержания нормального функционирования предприятия, а также исполнения обязательств организацией в условиях минимального риска свободные средства следует все средства вложить в рекламу в

тематических СМИ. Этот результат предсказуем, так как проект 3 обладает наименьшим стандартным отклонением, а ковариации между всеми проектами положительны, что означает, что нельзя составить портфель, дисперсия которого была бы меньше, чем минимальная из дисперсий проектов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены основные методы оптимизации портфеля инвестиционных проектов. Были рассмотрены модели как без учета риска, так и с учетом. В первой группе моделей описаны различные случаи в зависимости от возможности инвестора привлечь кредит. Так же было уделено внимание задаче поиска максимальной процентной ставки, обеспечивающей целесообразность привлечения кредита.

Недостатком рассмотренных случаев является то, что параметры распределения финансовых потоков определяются на основе экспертных оценок. Это означает наличие вероятности человеческой ошибки, а также риск субъективности таких оценок. Но, к сожалению, для поиска параметров распределения статистическими методами почти невозможно собрать достаточного объема статистику.

Литература

1. Барбаумов В.Е. и др. Финансовые инвестиции [Текст] : учеб. / Барбаумов В.Е., Гладких И.М., Чуйко А.С. – М. : Финансы и статистика, 2003. – 352 с.
2. Виленский П.Л. и др. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика [Текст] / Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. – М. : Дело, 2002. – 888 с.
3. Массе П. Критерии и методы оптимального определения капиталовложений [Текст] : пер. с франц. / Массе П. – М. : Статистика, 1971. – 505 с.
4. Царев В.В. Оценка экономической эффективности инвестиций [Текст] / Царев В.В. – СПб. : Питер, 2004. – 464 с.
5. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей [Текст] : учеб. / В.П. Чистяков. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1987. – 240 с.

Ключевые слова

Вероятность; дисперсия; инвестиционный портфель; инвестиционный проект; кредитный ресурс; оптимальный портфель; процентная ставка; риск; финансовый поток; NPV.

*Абубакиров Тимур Айдарович
 Мищенко Александр Владимирович*

РЕЦЕНЗИЯ

Изучение вопросов, связанных с определением оптимального портфеля инвестиционных проектов с учетом риска, является актуальным направлением исследовательской деятельности на современном этапе развития экономики и в текущей политико-экономической ситуации, характеризующейся отчетливо выраженной нестабильностью.

Автором рассмотрен ряд наиболее часто применяемых моделей формирования инвестиционных портфелей. Рассмотренные модели подразделяются на две группы: без учета риска и с учетом риска. Среди первых были рассмотрены модели как с возможностью привлечения кредита, так и без этой возможности. Также была рассмотрена методика определения максимальной процентной ставки, которая обеспечивает целесообразность привлечения кредита и реализации проекта. Критерием оптимизации в моделях первой группы является максимизация дохода от портфеля инвестиционных проектов. В рамках каждой из рассмотренных моделей автор уделяет внимание случаям делимости и неделимости инвестиционных проектов. Для моделей с учетом риска критерием является минимизация риска портфеля инвестиционных проектов.

Автор справедливо отмечает, что недостатком подобных моделей является то, что оценки будущих доходов от проектов, а также вероятности тех или иных исходов оцениваются экспертами, что несет в себе риск субъективности этих оценок. Частично эта субъективность может быть нивелирована применением непрерывных законов распределения для описания будущих потоков от реализации инвестиционных проектов.

К недостаткам работы можно отнести отсутствие решения задачи оптимизации портфеля инвестиционных проектов в случае, когда критерием оптимальности является максимизация некоторого соотношения риска и доходности проекта.

Тихомиров Н.П., д.э.н., проф., зав. кафедрой «Математические методы в экономике» ФГБОУ ВПО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова».