# 6.3. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ

Светлов К.В., аспирант, кафедра экономической кибернетики

*Санкт-Петербургский государственный университет*

[Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ](#)
[Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ](#)

Статья посвящена обобщению модели управления инвестиционным портфелем в рамках подхода, альтернативного стратегии самофинансирования, на случай, когда цена актива является непрерывным семимартингалом.

## ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается обобщение подхода к управлению инвестиционным портфелем, изложенного в работе С.А. Вавилова и К.Ю. Ермоленко [1]. В рамках дан-ного подхода допускается привлечение дополнительных средств в портфель в процессе его управления. Приобре-тение ценных бумаг осуществляется не только за счет продажи части других активов, как происходит при управлении в рамках сретегии самофинансирования, а в том числе и за счет дополнительного внешнего финансирования. В представленной работе делается предполо-жение о том, что цена $X$ актива, содержащегося в порт-феле, является непрерывным, положительным семи-мартингалом, квадратическая вариация [4] которого удовлетворяет следующему соотношению:

$$d[X]_t = \sigma_t^2(\omega)\delta^2(X_t)dt,\ [X]_0 = 0, \qquad (1)$$

где $\sigma_t(\omega)$ – положительная случайная функция времени;

$\delta(x)$ – функция, зависящая от цены рассматриваемого актива.

Научная новизна данной статьи заключается в том, что сделанные предположения позволяют перенести подход, изложенный в статьях [1, 5], на более широкий класс моделей активов, в том числе допускающих зависимость волатильности цены актива от его стоимости. К таковым относятся модели локальной волатильности, в частности, ***cev***-модель, рассмотренная в монографии [3].

## Построение управления портфелем

Рассмотрим инвестиционный портфель, содержащий указанный актив и денежные средства. Стоимость такого портфеля определяется формулой:

$$f_t = a_t X_t + m_t, \qquad (2)$$

где $a_t$ – количество актива в портфеле,

$m_t$ – количество денежных средств, содержащихся в портфеле.

Случайные функции $a_t = a(t,\omega)$, $m_t = m(t,\omega)$ будем считать измеримыми относительно сигма-алгебры $\sigma(X_s, 0 \le s \le t)$. При этом будем рассматривать управление, при котором не допускается занятие короткой позиции, т.е. $a_t \ge 0$. Издержки при создании такого портфеля определим как:

$$c_t = f_t - \int_0^t a_s dX_s \qquad (3)$$

В случае, когда издержки постоянны, т.е. $c_t \equiv c_0$, стратегия управления портфелем является самофинансируемой. Мы же будем рассматривать альтернативный подход, при котором:

$$c_t = \int_0^t I(s, X_s)ds, \qquad (4)$$

где $I(s, X_s)$ играет роль управляющей функции и соответствует объему средств, осваиваемых системой управления за промежуток времени $ds$.

Величина прибыли будет равняться разнице между стоимостью портфеля и издержками его формирования, т.е. $p_t = f_t - c_t$, что можно переписать эквивалентными способами:

$$p_t = \int_0^t a_s dX_s = f_t - \int_0^t I(s, X_s)ds. \qquad (5)$$

Сравнивая (3) и (4), получим выражение для дифференциала стоимости портфеля:

$$df_t = a_t dX_t + I(t, X_t)dt. \qquad (6)$$

С другой стороны, пользуясь формулой интегрирования по частям для выражения (2) в предположении, что дифференциалы $da_t$ и $dm_t$ существуют, имеем:

$$df_t = a_t dX_t + X_t da_t + d[a, X]_t + dm_t. \qquad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), получим выражение для величины $m_t$:

$$m_t = \int_0^t I(s, X_s)ds - \left(\int_0^t X_s da_s + [a, X]_t\right) = \int_0^t I(s, X_s)ds - \int_0^t X_{s+ds} da_s. \qquad (8)$$

Первая его часть соответствует объему средств, поступившему в распоряжение системы управления, а вторая – стоимости приобретенных активов с учетом проделанных спекуляций.

Далее зададим границы ценового коридора симметричного относительно цены первой сделки, совершенной системой управления. Предполагается, что на всем промежутке времени $[0, T]$, когда происходит управление портфелем, реализация цены $\tilde{X}_t$ не выходит за пределы данного коридора. Для удобства будем нормировать цены сделок относительно нижней границы ценового коридора и будем полагать, что он представляет собой интервал $(1, \beta)$, где фиксированное число $\beta > 1$.

При сделанных выше предположениях можно сформулировать следующий аналог теоремы об управлении портфелем на основе подхода, альтернативного стратегии самофинансирования [5].

*Теорема.* Пусть на промежутке времени $[0, T]$, где $T > 0$, выполнены следующие условия:

1. Цена $X_t$ является положительным, непрерывным семимартингалом с квадратической вариацией, удовлетворяющей соотношению (1).
2. Наблюдаемое значение цены $\tilde{X}_t$ не выходит за пределы ценового коридора $(1, \beta)$, где $\beta > 1$ – фиксированное, произвольно выбранное число.

3. Для функции $\sigma_t$ имеет место соотношение $\int_\tau^T \sigma_s^2 ds \geq \gamma(T-\tau)$ для любого $\tau \in [0,T]$ и некоторого $\gamma > 0$. Функция $\delta(x)$ непрерывна и $\delta(x) > 0$ для всех $x \in [1,\beta]$.

Тогда, если заданным $T$ и $\beta$ отвечает достаточно большое $\gamma$, то существует управление инвестиционным портфелем, обеспечивающее его прибыльность на временном промежутке $[0,T]$.

*Доказательство.* Будем искать функцию $f_t$ среди функций двух переменных $f(t,x)$, так что $f_t = f(t,X_t)$. Применим к функции $f_t$ формулу Ито [4] и воспользуемся формулой (1):

$$df_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)d[X]_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2\delta^2(X_t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dX_t. \quad (9)$$

Сравнивая в полученном выражении множители при дифференциалах с (6), приходим к соотношениям:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2\delta^2(X_t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t) = I(t,X_t), \quad (10)$$

$$a_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t). \quad (11)$$

Функцию управления $I(t,X_t)$ положим равной

$$I(t,X_t) = r(t)\varphi(X_t), \quad (12)$$

где $r(t)$ – вспомогательная функция времени;

$\varphi$ – собственная функция, отвечающая первому собственному числу $\lambda_1$ следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \varphi'' + \dfrac{\lambda_1^2}{\delta^2(x)}\varphi = 0 \\ \varphi(1) = \varphi'(\beta) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Поскольку функция $\varphi$ определяется с точностью до постоянного множителя, то ее всегда можно выбрать так, чтобы $\varphi(\beta) > 0$. Данный выбор обеспечивает следующие ее характеристики.

1. $\varphi(x) > 0$ и является строго возрастающей на $(1,\beta)$.
2. $\varphi'(x) > 0$ и является строго убывающей на $(1,\beta)$.

На начальный момент времени $t = 0$ будем считать портфель пустым:

$$f(0,X_0) = 0. \quad (14)$$

Кроме того, введем следующие граничные условия

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t) \to 0, \quad X_t \to \beta, \quad (15)$$

$$f(t,X_t) \to 0, \quad X_t \to 1. \quad (16)$$

Поясним смысл данных условий: в силу (11) выполнение (15) означает, что система будет избавляться от бумаг при приближении цены актива к верхней границе полосы чувствительности; второе условие означает, что при приближении цены к нижней границе полосы чувствительности все имеющиеся средства будут направлены на покупку актива:

$$a_t \to -\frac{m_t}{X_t}. \quad (17)$$

Решая смешанную задачу (14, 15, 16) для уравнения (10) с учетом (12), приходим к соотношению:

$$f(t,X_t) = \int_0^t r(\tau)e^{\frac{1}{2}\lambda_1^2\int_\tau^t \sigma_s^2 ds} d\tau \cdot \varphi(X_t). \quad (18)$$

Для количества актива в портфеле и полученной прибыли имеют место следующие зависимости соответственно:

$$a_t = \int_0^t r(\tau)e^{\frac{1}{2}\lambda_1^2\int_\tau^t \sigma_s^2 ds} d\tau \cdot \varphi'(X_t), \quad (19)$$

$$\tilde{p}_T = \int_0^T r(\tau)e^{\frac{1}{2}\lambda_1^2\int_\tau^t \sigma_s^2 ds} d\tau \cdot \varphi(X_T) - \int_0^T r(\tau)\varphi(X_\tau)d\tau. \quad (20)$$

Далее, пользуясь подходом, описанным в [5], разобьем временной интервал $[0,T]$ на $n$ непересекающихся отрезков $[T_{i-1},T_i]$, $i = 1,\dots,n$: $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$ и определим функцию $r(\tau)$ как предел поточечно сходящейся последовательности функций $r_n(\tau)$, задаваемых соотношением:

$$r_n(\tau) = \frac{u_n(\tau)}{\varphi(X_\tau)}e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2\int_\tau^{T_i} \sigma_s^2 ds}, \quad (21)$$

для $\tau \in (T_{i-1},T_i]$, где $u_n(\tau)$ – заданные функции, при этом последовательность $u_n(\tau)$ при $n \to +\infty$ предполагается сходящейся поточечно к функции $u(\tau)$ при условии равномерного дробления указанного временного интервала. Подставляя в (14) вместо $r(\tau)$ последовательность (16), приходим к соотношению:

$$a_{T_j}^n = \sum_{i=1}^{j}\int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{u_n(\tau)}{\varphi(\tilde{X}_\tau)}d\tau \cdot \varphi'(X_{T_j}), \quad (22)$$

$$a_{T_j}^n = \int_0^{T_j} \frac{u_n(\tau)}{\varphi(\tilde{X}_\tau)}d\tau \cdot \varphi'(X_t). \quad (23)$$

Окончательно, осуществляя предельный переход при $n \to +\infty$ и одновременном условии равномерного дробления временного промежутка, получим соотношение для числа актива в портфеле:

$$a_t = \int_0^t \frac{u(\tau)}{\varphi(X_\tau)}d\tau \cdot \varphi'(X_t), \quad (24)$$

Аналогично соотношение (20) для полученной прибыли можно преобразовать к виду:

$$\tilde{p}_T = \int_0^T \frac{u(\tau)}{\varphi(X_\tau)} d\tau \cdot \varphi(X_T) - \int_0^T u(\tau) e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 \int_\tau^T \sigma_S^2 ds} d\tau. \qquad (25)$$

Здесь функция $u(\tau)$ играет роль управления и задается, исходя из доступного объема денежных средств, которые могут быть инвестированы в портфель. Если $u(\tau)$ представляет собой, например, ограниченную, положительную кусочно-постоянную функцию, то первое слагаемое в соотношении (25) является положительным числом, в то время как второе слагаемое по модулю может быть выбрано сколь угодно малым в силу условия 3 теоремы 1. Таким образом, построенное управление обеспечивает положительную прибыль на временном отрезке $[0,T]$, что и завершает доказательство.

Заметим, что в случае, когда для интеграла $\int_0^t \tilde{\sigma}_s^2 ds$ верным является следующее приближение $\int_0^t \tilde{\sigma}_s^2 ds \approx \alpha t$ для некоторого $\alpha > 0$, мы можем построить простейший пример функции управления $u(\tau) \equiv u_0$, где $u_0$ – некоторая постоянная. Предположим, что $V$ – доступный для инвестирования объем средств. Поскольку в соответствии с изложенным подходом объем освоенных системой управления средств равен:

$$\int_0^T u(\tau) e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 \int_\tau^T \sigma_S^2 ds} d\tau, \qquad (26)$$

то из равенства:

$$\int_0^T u_0 e^{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 \alpha (T-\tau)} d\tau = V \qquad (27)$$

находим, что:

$$u_0 = \frac{V \lambda_1^2 \alpha}{2\left(1 - \exp\left\{-\lambda_1^2 \alpha T / 2\right\}\right)}. \qquad (28)$$

## Зависимость управления портфелем от модели цены актива

Как видно из проделанных вычислений, управление портфелем определяется выбранной моделью динамики цены актива. Данный выбор задает вид уравнения (13) и ставит перед нами задачу нахождения собственных значений и функций.

В качестве первого примера можно рассмотреть стандартную модель геометрического броуновского движения для описания цены актива. Стоимость $X_t$ определяется как решение следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$dX_t = \mu(t,\omega) X_t dt + \sigma(t,\omega) X_t dW_t, \; X_0 = x_0, \qquad (29)$$

где $W_t$ – стандартный винеровский процесс, а $\mu(t,\omega)$ и $\sigma(t,\omega)$ – случайные функции времени.

Квадратическая вариация цены равна :

$$[X]_t = \int_0^t \sigma_\tau^2 X_\tau^2 d\tau. \qquad (30)$$

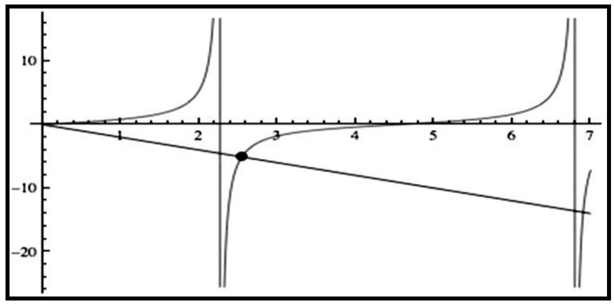

**Рис. 1. Графическое решение (31), $b = 2.545$, $\lambda_1 = 2.594$**

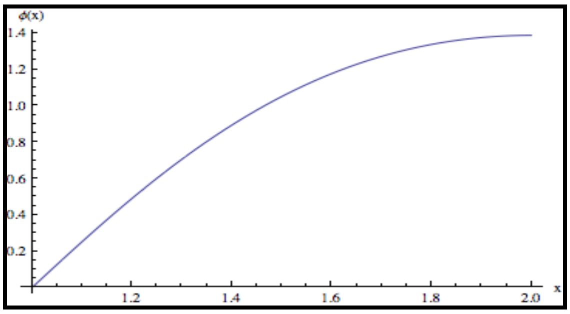

**Рис. 2. Функция $\varphi$ для модели цены (29)**

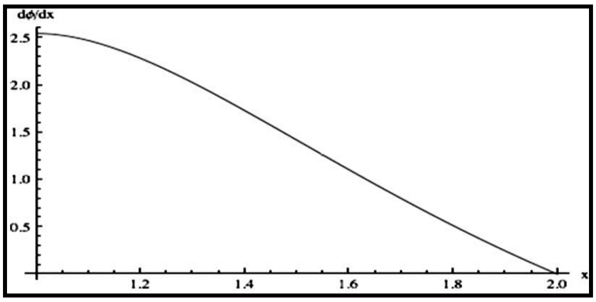

**Рис. 3. Функция $\varphi'$ для модели цены (29)**

Соответственно функция $\delta(x) = x$. Для нее задача Штурма-Лиувилля (13) имеет минимальное собственное значение $\lambda_1^2 = b^2 + \frac{1}{4}$ и собственную функцию $\varphi(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(b \cdot \ln x)$, отвечающую этому собственному значению, где $b$ – минимальный положительный корень уравнения:

$$tg(b \cdot \ln \beta) = -2b. \qquad (31)$$

Для примера рассмотрим вычисления при выборе верхнего порога чувствительности $\beta = 2$. Результат нахождения первого собственного числа и соответствующая ему функция $\varphi$ изображены на рис. 1,2.

Другим примером может быть ***cev***-модель (constant elasticity of variance) [3]. В рамках этой модели цена актива определяется как решение уравнения:

$$dX_t = \mu(t,\omega) X_t dt + \sigma(t,\omega) X_t^{\varepsilon} dW_t, \; X_0 = x_0, \qquad (32)$$

где параметр $\varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

Подобная зависимость отражает тот факт, что с ростом цены актива волатильность может уменьшаться. В этом случае квадратическая вариация цены равна:

$$[X]_t = \int_0^t \sigma_\tau^2 X_\tau^{2\varepsilon} d\tau \tag{33}$$

и функция $\delta(x) = x^\varepsilon$ соответственно. Подробнее остановимся на проблеме собственных значений и функций для задачи Штурма-Лиувилля (13). Для этого сделаем замену $\nu = 1 - \varepsilon$ и перепишем ее как

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda_1^2 x^{2\nu-2}\varphi = 0 \\ \varphi(1) = \varphi'(\beta) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

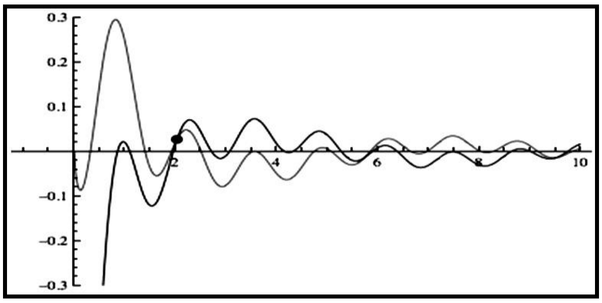


**Рис 4. Графическое решение (36), $\lambda_1 = 2.030$**

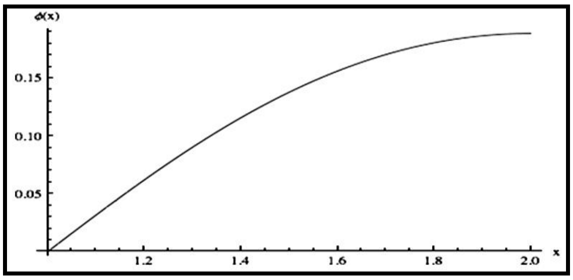


**Рис. 5. Функция $\varphi$ для модели цены (32)**

Решением (22) является [2] функция:

$$\varphi(x) = C \cdot \sqrt{x} \cdot \left( Y_{\frac{1}{2\nu}}\left(\frac{\lambda_1}{\nu}\right) J_{\frac{1}{2\nu}}\left(\frac{\lambda_1}{\nu} x^\nu\right) - J_{\frac{1}{2\nu}}\left(\frac{\lambda_1}{\nu}\right) Y_{\frac{1}{2\nu}}\left(\frac{\lambda_1}{\nu} x^\nu\right) \right), \tag{35}$$

где $C = \pm 1$, так, чтобы $\varphi(\beta) > 0$;

$J$ и $Y$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Собственное значение $\lambda_1$ равняется минимальному положительному решению уравнения

$$J_{\frac{1}{2\nu}}\left(\frac{\lambda_1}{\nu}\right) Y_{\frac{1}{2\nu}-1}\left(\frac{\lambda_1}{\nu}\beta^\nu\right) = J_{\frac{1}{2\nu}-1}\left(\frac{\lambda_1}{\nu}\beta^\nu\right) Y_{\frac{1}{2\nu}}\left(\frac{\lambda_1}{\nu}\right). \tag{36}$$

Также рассмотрим вычисления при выборе верхнего порога чувствительности $\beta = 2$ и параметре $\varepsilon = 0.5$. Для ***cev***-модели результат нахождения первого собственного числа задачи (34) и соответствующая ему функция $\varphi$ изображены на рис. 4, 5.

Таким образом, для построения управления портфелем необходима спецификация ценовой модели актива, а именно отыскание формы зависимости (1). Существенным моментом при этом является требование о разделимости переменной цены и времени.

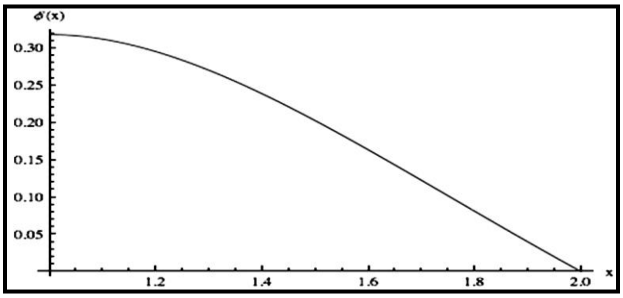


**Рис. 6. Функция $\varphi'$ для модели цены (32)**

Далее, при сделанных предположения о квадратической вариации цены, для соответствующей функции $\delta(x)$ ищется собственная функция, отвечающая наименьшему собственному значению задачи Штурма-Лиувилля (13). Проделанные шаги вместе с заданием функции управления $u(\tau)$, характеризующей скорость поступления денежных средств в портфель, позволяют определить требуемое количество (24) актива в портфеле, а также оценить теоретическую величину полученной прибыли (25).

## Литература


1. Вавилов С.А., Ермоленко К.Ю. Обобщенная задача стохастического управления инвестиционным портфелем [Текст] / С.А. Вавилов, К.Ю. Ермоленко // Вестн. СПбГУ ; Сер. 5 : Экономика. – 2007. – Вып. 3. – С. 36-46.
2. Kamke E. Differentialgleichungen: losungsmethoden und losungen, i, gewohnliche differentialgleichungen [Text] / E. Kamke. – B. G. Teubner, Leipzig. 1977.
3. Musiela M. Martingale methods in financial modelling [Text] / M. Musiela, M. Rutkowski // Springer Science & Business Media. – 2006. – Vol. 36.
4. Protter P.E. Stochastic Integration and differential equations [Text] / P.E. Protter. – Springer, 2005. – 415 p.
5. Vavilov S.A. On the new stochastic approach to control the investment portfolio [Text] / S.A. Vavilov, K.Yu. Ermolenko // IAENG international journal of applied mathematics. – 2008. – Vol 38. – Pp. 54-62.



## Ключевые слова

Управление портфелем; случайный процесс; интегральная волатильность.



*Светлов Кирилл Владимирович*


## РЕЦЕНЗИЯ

Статья Светлова К.В. посвящена обобщению подхода к управлению инвестиционным портфелем, предложенного С.А. Вавиловым и развитого в статьях С.А. Вавилова и К.Ю. Ермоленко. Суть обобщения заключается в адаптации подхода к управлению активом, цена которого представляет собой непрерывный семимартингал с квадратической вариацией специального вида. Актуальность данной работы связана с развитием аппарата стохастической финансовой математики и появлением моделей цен с волатильностями, зависящими в том числе от уровня цен. Изложенный в статье подход позволяет управлять подобными активами, что демонстрируется на отдельно разобранном примере – так называемой ***cev***-модели. При этом сохраняются основные оценки, связанные с прибыльностью торговли при реализации указанного подхода.

На основании вышеуказанного считаю, что статья отвечает всем предъявляемым требованиям и может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

*Вавилов С.А., д.ф.-м.н., профессор кафедры экономической кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета*


Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ
Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ