

### 3.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВРИСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕДУР

Егорова Н.Е., д.э.н., г.н.с., профессор, ФГБУН  
«Центральный экономико-математический институт  
Российской академии наук»;  
Иванов К.А., генеральный директор Общества с  
ограниченной ответственностью «АБСОЛЮТ-  
СИРИУС»

В статье рассматривается многокритериальная оптимальная задача с наличием идеальной (целевой) точки и приложение этой задачи к проблемам согласования экономических интересов различных уровней управления. Решение задачи осуществляется двумя способами:

- формальными методами;
- на основе сочетания формальных и эвристических процедур.

В результате находится компромисс экономических интересов различных уровней как одна из точек множества Парето. Предлагаются различные варианты итеративного алгоритма поиска компромиссного решения, использующие в эвристических процедурах возможные схемы сближения идеальной точки с границей области Парето; производится оценка корректности эвристических процедур. Задача рассматривается на примере согласования интересов субъектов различных уровней в сфере ЖКХ (Департамента, Совета дома, потребителей услуг ЖКХ).

#### ВВЕДЕНИЕ

Управление национальным хозяйством любой страны представляет собой сложную многоуровневую систему [1, с. 43; 2, с. 19-21; 9, с. 59]. В зависимости от постановки задачи число рассматриваемых уровней может быть различно. Как правило, выделяют три иерархических уровня управления: макро (национальное хозяйство), мезо (отрасль, регион) и микро (предприятия и другие субъекты этого звена управления), каждому из которых присущи собственные социально-экономические интересы. Так, в сфере жилищно-коммунального хозяйства (ЖКХ) такими уровнями управленческой иерархии являются: государственные структуры верхнего эшелона, представляющие народнохозяйственные и общественные интересы; управленческие структуры среднего звена (Департаменты ЖКХ), отражающие экономические интересы развития данного сектора народного хозяйства; управленческие структуры нижнего звена (Советы дома, ЖСК и др.), являющиеся представителями интересов потребителей услуг ЖКХ (население и др.). На каждом из уровней решается оптимизационная задача с соответствующим критерием, отражающим интересы данного иерархического звена. Затем полученные решения проходят этап согласования, поскольку экономические интересы могут быть не совпадающими, а зачастую – и конфликтными, под которым понимается процесс поиска компромисса между решениями, планируемыми различными уровнями. Компромисс, полученный в результате процесса согласования плановых решений – СПР, обладает: во-первых, экономической выгодностью для каждого из участников; во-вторых, эффективностью по Парето [7, с. 288].

В целях упрощения трехуровневая задача согласования экономических интересов редуцируется к двухуровневой, экономико-математический анализ которой осуществляется в следующих направлениях:

- формулировка оптимизационной задачи согласования интересов с наличием идеальной точки;
- использование формальных методов согласования интересов различных уровней;
- обоснование необходимости использования эвристических методов и оценка их корректности в процедурах СПР;

- применение формально-эвристических методов согласования экономических интересов, предполагающих участие ЛПР (лица, принимающего решение).

#### Оптимизационная задача с наличием идеальной точки

При формулировке задачи принимаются следующие гипотезы.

1. Рассматривается двухуровневая система, на верхнем уровне которой плановые решения осуществляются на основе одного интегрального критерия (интегрального народнохозяйственного эффекта), на нижнем уровне – на основе нескольких критериев (в данном случае – двух критериев, отражающих интересы мезо и микро звеньев).
2. Отображаются в основном вертикальные взаимодействия уровней. Из их числа выделены взаимодействия двух типов:
  - воздействия верхнего уровня (задаваемая и корректируемая идеальная точка, а так же стимулирующее действие штрафной функции при отклонении от этой точки);
  - решения нижнего уровня по корректировке начальных плановых предложений.

Горизонтальные связи (например, поставка материалов, комплектующих изделий, инвестиций) представлены экзогенными взаимодействиями.

3. Предполагается, что может быть осуществлена редукция критерия верхнего уровня в пространство критериев нижнего уровня таким образом, что интересы верхнего уровня представлены в пространстве критериев нижнего уровня и соответствуют идеальной точке, обеспечивающей максимальный народнохозяйственный эффект. Данное предположение позволяет осуществлять процесс СПР на единой основе – на «языке» интересов нижнего уровня.
4. Идеальная целевая точка, представляющая исходные предложения верхнего уровня, может быть как достижимой, так и недостижимой. Последний случай наиболее часто встречается в реальной практике: исходные плановые предложения верхнего уровня, как правило, плохо учитывают производственные возможности и интересы нижнего уровня.
5. Для сближения предложений нижнего и верхнего уровней используется принцип обратной отрицательной связи, отражаемый с помощью штрафной функции, величина которой уменьшается при сокращении расстояния (характеризуемого выбранной метрикой) между идеальной точкой и решением нижнего уровня.

В основу экономико-математического инструментария исследования процессов СПР положена стандартная модель целевого планирования, являющаяся многокритериальной оптимизационной задачей с наличием идеальной точки и представленная в работах [4, с. 128-130; 13, с. 204-217; 15, с. 391-404]. Авторами осуществлена модификация этой модели, состоящая в учете следующих особенностей СПР:

- рассматривается вариантная постановка задачи, позволяющая расширить допустимое множество решений оптимизационной задачи и обуславливающая подвижность границы Парето;
- используются специальные правила корректировки целевой точки, предписанные процессом согласования;
- вводится понятие переговорного множества, ограничивающего область согласуемых решений (для случая достижимой и недостижимой целевой точки).
- В соответствии с принятыми гипотезами задача СПР представлена следующим образом:

$$\begin{cases} x \in R_x, x \geq 0, R_x^{min} \leq R_x \leq R_x^{max}, \\ y_i = f_i(x), i = 1, nm, \\ \max \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i^H y_i(x) - \rho \sum_{i=1}^n \xi_i^B (y_i^0 - y_i(x))^2 \right\} \end{cases} \quad (1)$$

где  $R_x$  – множество возможных состояний объекта  $x$ , которое задано не жестко и может варьироваться от области минимально возможных ( $R_x^{min}$ ) до области максимально возможных значений ( $R_x^{max}$ );

$y_i$  – критерии качества состояния объекта;

$\{y_i^0\}$  – целевая точка в пространстве критериев;

$\xi_i^H, \xi_i^B, \rho$  – весовые коэффициенты, характеризующие соответственно важность значений критериев  $y_i$ , их отклонения от целевой точки  $\{y_i^0\}$  и значимость штрафной функции  $\sum_{i=1}^n \xi_i^B (y_i^0 - y_i(x))^2$ .

Решение задачи (1) обладает важным свойством: оно принадлежит границе Парето  $\pi$  в следующем смысле:

$$\{\tilde{x}\} \in \pi,$$

где  $\tilde{x}$  – решение задачи (1), и  $\tilde{y}_i = f_i(\tilde{x})$  [13, с. 208; 15, с. 393].

При этом  $\{\tilde{y}_i\}$  находится в окрестности целевой точки  $\{y_i^0\}$ . Далее исследуется множество, являющееся образом границы  $\pi$  в пространстве критериев и называемое критериальной паретовской границей  $\phi$ .

В задаче (1) процесс согласования интерпретируется следующим образом:

- в рассматриваемой двухуровневой системе управления предпочтения верхнего и нижнего уровней представлены коэффициентами  $\xi_i^B$  и  $\xi_i^H$ , они, также как и коэффициент  $\rho$ , отражающий условия взаимодействия этих уровней (роль штрафной функции), считаются известными;
- начальные предложения верхнего уровня отражаются идеальной точкой, которая тоже считается известной и может быть получена на основе решения некоторой задачи, внешней по отношению к задаче (1). Обычно точка  $\{y_i^0\}$  является недостижимой, т.е.  $\{y_i^0\} \notin \phi$ .
- экономические интересы верхнего уровня представлены идеальной (целевой) точкой, отклонения от которой в процессе СПР он стремится минимизировать; экономические интересы нижнего уровня определяются системой предпочтений  $\xi_i^H$ , которая задает некоторую точку границы  $\phi$  в пространстве критериев  $y_i$ .

### Формальные методы согласования интересов различных уровней

Решение задачи (1) существенно зависит от параметров штрафной функции, которые в реальной практике обычно не известны и трудно определяемы экспертным путем. Далее используется метод экономической компенсации [5, с. 34-38]. Данный итеративный метод отображает СПР как процесс, осуществляемый по некоторым правилам, предпо-

лагающим: корректировку целевой точки (производится верхним уровнем для обеспечения реализации намеченного плана); корректировку решения нижнего уровня (с учетом достигаемого им экономического эффекта); смещение границ  $\phi$  (для обеспечения достижимости целевой точки). В соответствии с этими правилами процесс СПР осуществляется на переговорном множестве и заканчивается при выполнении необходимого и достаточного условия, а величина компенсации, используемой для его стимулирования, определяется с помощью известных переменных модели<sup>1</sup>.

Для реализации описанного метода задача (1) представляется в виде двух самостоятельных задач, решаемых верхним и нижним уровнями автономно. С этой целью полагаются:

$$\rho = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

где  $\lambda_1 \geq 0$  и  $\lambda_2 \geq 0$  – весовые коэффициенты, отражающие приоритетность предложений участников согласования и уровень допустимых компромиссов.

Соотношение между коэффициентами  $\lambda_1$  и в выражении  $\max \left\{ \lambda_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^H y_i - \lambda_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^B (y_i^0 - y_i)^2 \right\}$  интер-

претируется как уровень развития демократизации и хозяйственной самостоятельности экономических объектов. Так, относительно большие значения коэффициента  $\lambda_1$  предполагают больший учет интересов нижнего уровня в компромиссном решении и соответствуют большей его самостоятельности в процессе принятия согласованных решений. Наоборот, относительно большие значения коэффициента  $\lambda_2$  соответствуют преимущественному учету интересов верхнего уровня и отражают его доминирующую роль в процессе согласования.

В соответствии с введенными определениями задача нижнего уровня может быть получена при  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = 0$ , а задача верхнего уровня при  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 1$ .

Итак, пусть на нижнем уровне решается задача на максимум функции полезности

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \xi_j^H y_j : x \in R_x, x \geq 0, y_i = f_i(x) \\ \max \sum_{j=1}^n \xi_j^H y_j \end{cases} \quad (2)$$

где  $\xi_j^H$  – весовые коэффициенты шкалы приоритетов нижнего уровня.

Решением задачи (2) является точка  $x^A$ , лежащая на границе Парето, такая что  $y^{opt} = f(x^A) = A \in \phi$ .

На верхнем уровне решается задача, представленная следующей моделью:

<sup>1</sup> К числу формальных методов, используемых для решения задачи СПР, относятся также другие методы решения многокритериальных задач, представленные в работах [3, 8, 10, 11].

$$\begin{cases} x \in R_x, x \geq 0, y_i = f_i(x), \\ \min \sum_i \xi_i^B (y_i^0 - y_i)^2, \end{cases} \quad (3)$$

где  $y_i$  –  $i$ -й критериальный показатель;

$\xi_i^B$  – весовой коэффициент, отражающий важность  $i$ -го критерия шкалы приоритетов верхнего уровня.

При этом решение  $x^B$  задачи верхнего уровня (3) получается с учетом предложений нижнего уровня  $y_i$ , однако в общем случае точки  $x^A$  и  $x^B$  не совпадают. Если уже известно оптимальное решение задачи (2), то в качестве такого предложения используется. Далее производится оценка получаемого решения с учетом некоторого глобального критерия  $w(y)$ , определяющего целевую точку. Таким образом, верхний уровень стремится минимизировать отклонение от заданной целевой точки, соответствующей глобальному эффекту.

При этом могут быть использованы различные метрики, характеризующие отклонение достижимого плана от целевой точки: сумма квадратов отклонений, модуль отклонений и т.д. Так, если известна некоторая функция глобального эффекта  $w(y)$ , заданная в пространстве критериев  $y_i$ , то в качестве целевой функции можно также рассматривать  $\min |w(y^0) - w(y)|$ . Ясно, что в случае монотонного поведения функции  $w(y)$  в окрестности целевой точки, решения задач при разных метриках не сильно различаются.

Часть границы Парето, ограниченную точками  $x^A$  и  $x^B$ , определяется как множество согласуемых решений или переговорное множество. Переговорное множество сужает область решения задачи. В то же время любая точка переговорного множества может быть представлена решением задачи при соответствующих параметрах системы предпочтений.

В связи с тем, что в процессе СПР решения принимаются на основе соизмерения величин критериев  $y_i$ , удобным является отображение переговорного множества в пространство критериев. Будем называть далее это отображение критериальным переговорным множеством  $\phi^*$ , так как оно является частью границы  $\phi$ , ограниченной соответственно точками, определенными как решения задач (2) и (3).

Описанный процесс СПР отображен в пространстве критериев на рис. 1, на котором полученное в задаче (3) решение (точка  $x^B$  такая, что  $f(x^B) = B$ ) принадлежит границе Парето, но в общем случае не совпадает с точкой  $x^A$  (где  $x^A$  – начальное предложение нижнего уровня и  $f(x^A) = A$ ).

При реализации итеративного процесса СПР на переговорном множестве должны выполняться необходимое и достаточное условия согласования решений.

Необходимым условием согласованности решений является достижение целевой точки. В том

случае, если найдется такой,  $\tilde{x} \geq 0$ , что  $\tilde{x} \in R_x$ ,  $R_x^{\min} \leq R_x \leq R_x^{\max}$  и  $y_i^0 = f_i(\tilde{x})$ , то точка  $\{y_i^0\}$  считается достижимой. Иными словами, расширяя множество возможных состояний объекта (с учетом ослабления имеющихся ограничений за счет горизонтальных экзогенных воздействий), можно обеспечить такое смещение границы  $\pi$ , которое в свою очередь обеспечит сдвиг границы  $\phi$  в направлении к целевой точке (см. на рис. 1 смещение критериального переговорного множества  $\phi^*$  от уровня  $A, B$ , до уровня  $A, B$ ). При этом процесс смещения заканчивается, если  $\{y_i^0\} \in \phi$ .

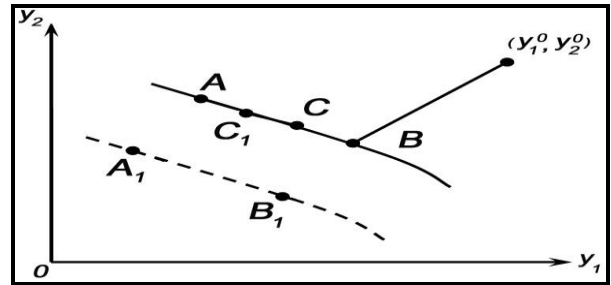


Рис. 1. Процесс согласования (двумерный случай)<sup>2</sup>

В том случае, если такого  $\tilde{x}$  не нашлось, исходная целевая точка корректируется: в качестве новой целевой точки принимается ближайшая (в смысле выбранной меры) точка переговорного множества  $\phi^*$ , которая является достижимой и наиболее полно (среди достижимых точек) соответствует интересам верхнего уровня. На рис. 1 такой новой целевой точкой является точка  $B \in \phi^*$  поскольку смещением переговорного множества  $\phi^*$  достичь точки  $(y_1^0, y_2^0)$  не удалось.

Пусть необходимое условие выполнено и обеспечена достижимость целевой точки. Тогда требуется корректировка исходного решения нижнего уровня и смещение его к полученной достижимой целевой точке. На рис. 1 этот процесс иллюстрируется движением от точки  $A$  к точке  $B$  (поскольку эти точки не совпадают) по критериальному переговорному множеству  $\phi$ . Причем величина смещения точки  $A$  (достигнутая точка  $C$ ) определяется достаточным условием.

Достаточным условием СПР является наличие эффективной системы стимулов, обеспечивающих целенаправленное смещение решений участников согласования по переговорному множеству до их совпадения (или сближения в пределах заданной точности).

Это означает, что нижний уровень получает за отклонение от прежнего решения (точки локального оптимума) некоторую компенсацию (премию), величина которой определяется с одной стороны, размером понесенного при смещении ущерба, а с дру-

<sup>2</sup> где  $(y_1^0, y_2^0)$  – целевая точка; точки  $A$  и  $B$  – решения задач (2) и (3) соответственно в критериальном пространстве;  $AB$  – критериальное переговорное множество;  $C_1$  – компромиссная точка;  $C$  – точка согласования решений

гой – заинтересованностью верхнего уровня в таком отклонении. При этом компенсация (премия) понимается в самом широком смысле и может выражаться системой налоговых льгот, субсидированием процентной ставки за кредит, применением налоговых или кредитных каникул и т.д.

Для формального описания принципа компенсации в процессе СПР вводится предположение о том, что величина народнохозяйственного эффекта  $w(y)$ , отражающая предпочтение верхнего уровня, может быть измерена для каждой точки, лежащей в рассматриваемом пространстве критериев  $y_i$ . Таким образом, устанавливается некоторое соответствие (отношение) между точками переговорного множества  $\phi$  и получаемым при этом народнохозяйственным эффектом.

Естественно предположить также, что функция  $w(y)$  в общем случае не имеет монотонно возрастающего характера: продукты и услуги, выгодные с точки зрения предпочтений нижнего уровня, могут оказаться невыгодными с точки зрения достижения народнохозяйственного эффекта и наоборот. Именно поэтому верхним уровнем должны быть использованы системы стимулов (экономических рычагов, премий и др.) для настройки решения нижнего уровня на достижение намеченного народнохозяйственного эффекта или, по крайней мере, приближением к нему.

С позиций верхнего уровня его заинтересованность в смещении решения нижнего уровня в некоторую компромиссную точку  $c$  определяется двумя факторами:

- величиной народнохозяйственного эффекта  $w(c) - w(a)$ , обеспечиваемого при смещении решения нижнего уровня к компромиссной точке  $c$ , принадлежащей переговорному множеству  $\phi$ ;
- величиной народнохозяйственного ущерба, определяемого отклонением компромиссной точки  $c$  от целевой точки  $b$  (чем меньше такое отклонение, тем больше выплаченная нижнему уровню премия):

$$\Pi^a = \phi \{ |w(c) - w(a)|, |w(b) - w(c)| \}, \quad (4)$$

где  $\phi$  – некоторая монотонно возрастающая функция от величины изменения народнохозяйственного эффекта (ущерба).

Так как предельная величина премии  $\overline{\Pi^a}$ , которую может выплатить верхний уровень, составляет  $w(c) - w(a)$ , то в простейшем случае можно считать что:

$$\Pi^a = \overline{\Pi^a} = w(c) - w(a). \quad (5)$$

С позиций нижнего уровня величина смещения  $\Delta f_i(x)$  от точки  $a$  к точке  $c$  определяется также «выгодностью» для него этого действия, т.е. соотношением

$$\sum_i^n \lambda_i f_i^a(x) \leq \sum_i^n \lambda_i [f_i^a(x) + \Delta f_i(x)] + d \Pi^a = \sum_i^n \lambda_i f_i^c(x) + d \Pi^a, \quad (6)$$

где  $d$  – коэффициент, выражающий значимость для нижнего уровня премии  $\Pi^a$ .

Используя принцип компенсации, можно записать следующее равенство, отражающее баланс убытков и дополнительных выгод:

$$\sum_i^n \lambda_i f_i^a(x) = \sum_i^n \lambda_i f_i^c(x) + d \Pi^a. \quad (7)$$

Отсюда величина премии, которую верхний уровень должен выплатить нижнему уровню для заинтересованности последнего в достижении точки  $c$  составляет:

$$\Pi^a = \frac{1}{d} [\sum_i^n \lambda_i f_i^a(x) - \sum_i^n \lambda_i f_i^c(x)]. \quad (8)$$

Соотношение (8) означает, что размер компенсации определяется для нижнего уровня: 1) величиной ущерба, связанного с его отклонением решения от точки  $a$  (выражение в квадратных скобках); 2)

коэффициентом  $\frac{1}{d}$ , отражающим фактор инерционности (неуступчивости) нижнего уровня: чем меньше значимость премии (коэффициент  $d$ ), тем больше инерционность, нежелание нижнего уровня смещаться от точки  $a$  и тем больше должна быть величина премии  $\Pi^a$ .

Величина народнохозяйственного эффекта от согласования решений определяется разностью между результатом и затратами по согласованию:

$$\varepsilon^c = w(c) - w(a) - \Pi^a \geq 0, \quad (9)$$

где  $\Pi^a$  – величина компенсации, которую готов выполнить верхний уровень, а  $w(c)$  и  $w(a)$  – народнохозяйственный эффект, соответствующий точкам  $c$  и  $a$  соответственно.

Для того чтобы проверить достаточное условие, следует сопоставить величину  $\Pi^a$  и  $\Pi^b$ . Если выполняется неравенство

$$\Pi^b \geq \Pi^a, \quad (10)$$

то компромиссная точка  $c$  достигается и соответствующее ей решение считается согласованным при заданной системе стимулов и предпочтений.

В том случае,

$$\Pi^b < \Pi^a \quad (11)$$

достаточное условие согласованности решений не удовлетворяется, причем для  $\Pi^b = \overline{\Pi^b}$  согласованное решение в имеющейся ситуации недостижимо. Поэтому целевая точка должна быть смещена к решению нижнего уровня, расположенному между точками  $a$  и  $c$ , и удовлетворяющему условию:

$$\sum_i^n \lambda_i f_i^{c'}(x) = \sum_i^n \lambda_i f_i^a(x) - d \overline{\Pi^b}. \quad (12)$$

Точка  $c'$ , характеризуется следующим образом:

- она соответствует интересам нижнего уровня и поэтому является реализуемой;
- не полностью учитывает интересы верхнего уровня, так как выплаченная премия  $w(c) - w(a)$  больше достигаемого при этом народнохозяйственного эф-

фекта  $W(C_1) - W(A)$ . Однако возникающие при этом потери верхнего уровня  $W(C) - W(C_1)$  заведомо меньше потерь  $W(B) - W(A)$ , имевшихся до процесса согласования, то есть достигнуто улучшение конфликтной ситуации.

В рассмотренном процессе СПР принципиально возможны следующие три ситуации.

1. Множественность согласованных решений. Так как величина премии  $\Pi^*$  находится в интервале  $[0, \Pi^*]$ , то может существовать множество точек, удовлетворяющих условию (10). В этом случае среди них выбирается одно из решений, которое (например) соответствует максимальному народнохозяйственному эффекту  $\max \Xi^c$  или же является ближайшим к намеченной целевой точке и т.д.
2. Единственность согласованного решения. В этом случае условие (10) выполняется лишь для одной из точек участка  $AB$ , которая и принимается за согласованное решение.
3. Отсутствие согласованного решения. При этом по правилу, определяемому соотношением (12), выбирается компромиссная точка  $C_1$ .

## Роль эвристических методов и их корректность в процедурах СПР

Проведенный выше анализ процесса СПР основывается на применении некоторых формальных конструкций, предполагающих учет экономических интересов участников согласования на основе соизмерения экономического ущерба, возникающего в связи с отклонением от намеченных целей и дополнительного эффекта (обусловленного стимулированием объекта). Эти формальные конструкции могут быть достаточно разнообразны: постановки оптимизационных задач могут быть определенным образом модифицированы как путем их упрощения, так и усложнения [12, с. 67].

Подобные формальные конструкции представляют собой средство теоретического анализа и удобный язык описания процессов межуровневого СПР и являются концептуальной основой проведения реальных процедур согласования, которые слишком сложны для исчерпывающего описания их формальными моделями [14, с. 3-7].

Для эффективной реализации СПР необходимым является сочетание формальных, неформальных эвристических методов и участие ЛПР (лиц, принимающих решения), использующих эвристические процедуры и учитывающих внеэкономические интересы различных сторон.

Важным вопросом является корректность применяемых в СПР формально-эвристических методов (ФЭМ). К числу первых отечественных исследователей данной проблемы принадлежит О.И. Ларичев, который осуществил анализ человеко-машинных процедур (ЧМП) как разновидностей ФЭМ, осуществляемых с помощью ЭВМ (см. работу [6]).

В соответствии с позицией О.И. Ларичева ЧМП могут быть охарактеризованы как корректные (легко выполняемые ЛПР) и некорректные (трудно выполнимые, сопровождающиеся ошибками ЛПР). К кор-

ректным процедурам относятся такие, для которых: 1) используется определенный класс так называемых допустимых операций ( $D$ ) в процессе принятия решения; 2) обеспечивается сходимость итераций к  $\epsilon$ -окрестности экстремального значения неявно выраженной функции полезности.

Большинство ЧМП, применяемых в многокритериальных задачах, являются некорректными. Наиболее жестким является первое требование: число операций класса  $D$  сравнительно невелико в общем перечне ЧМП. Второе требование нарушается чаще всего не из-за структуры выбранного финального алгоритма (итеративного процесса движения к экстремальному значению), а из-за чувствительности ЧМП к возможной ошибке ЛПР в ходе этих итераций (например, в том случае, если ЛПР недостаточно хорошо понял идею алгоритма сходимости).

Таким образом, в отличие от тех требований, которые обычно предъявляются к формальным итеративным алгоритмам поиска приближенного решения (требование сходимости процесса, обеспечение удовлетворительной скорости сходимости и т.д.), здесь на первое место выдвигаются требования к поведению ЛПР.

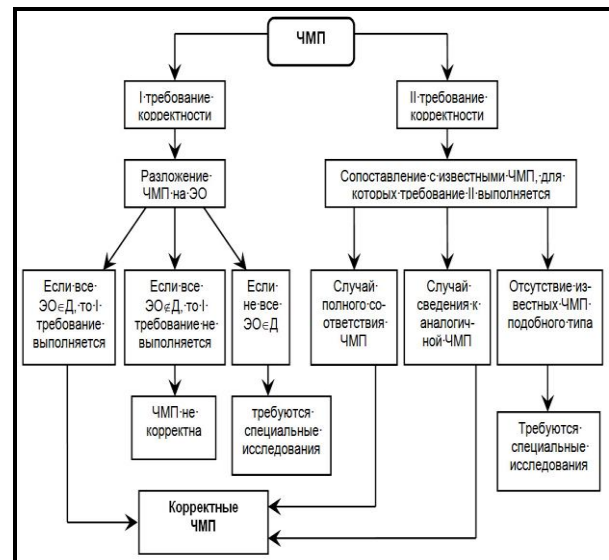


Рис. 2. Методика исследования корректности ЧМП

На рис. 2 приведена схема методики исследования корректности ЧМП [6, с. 29-33], базирующаяся на следующих гипотезах:

- строгое формальное доказательство корректности ЧМП невозможно ввиду неполной формализованности самой процедуры; необходим содержательный анализ задачи. Здесь может быть применен метод аналогий и опыт использования подобных процедур;
- любая ЧМП представима как комбинация конечного числа элементарных операций ( $ЭО$ ), которые могут быть классифицированы по уровню своей сложности и возможности успешного осуществления их с помощью ЛПР.

В соответствии с принятыми гипотезами считается, что любая  $ЭО$  по уровню своей сложности для ЛПР может быть отнесена либо к классу  $D$  – допустимых, либо к классу  $C$  – сложных операций.

В классе **Д** в свою очередь выделяются операции определенно-допустимые (**Д-1**), относительно которых получены достоверные сведения о возможности успешной их реализации с помощью ЛПР (например, сравнение альтернатив по одному критерию, качественное сопоставление изменений значений по двум критериям); и неопределенно-допустимые (**Д-2**), относительно которых не проводилось специальных исследований, однако оценка их может быть осуществлена логическим путем по методу аналогий (например, операция по упорядочению критериев по важности) (рис. 2).

В классе сложных операций (**С**) аналогичным образом выявляются операции определенно-сложные (**С-1**) и неопределенно-сложные (**С-2**). Так, к **С-1** относится операция назначения весов критериев, а к **С-2** – определение маргинальных (предельных) коэффициентов замещения критериев.

Приведенная классификация ЭО позволяет, с одной стороны, формировать корректные ЧМП, используя ОЭ из класса **Д**, и в особенности из подмножеств **Д-1**, а с другой – дает возможность комплексной оценки корректности уже имеющихся ЧМП.

ЭО интегрируются в блоки обобщенных типовых операций (**ОТО**), наиболее часто используемых в задачах многокритериального выбора.

Перечень **ОТО** включает в себя:

- операции с критериями (**ОТО-1**);
- операции с оценками альтернатив по критериям (**ОТО-2**);
- операции с оценкой альтернатив в целом (**ОТО-3**).

При этом **ОТО-1** предполагают использование ЭО типа **С-1**, **С-2** и **Д-2** и могут быть охарактеризованы в целом, как сложные для ЛПР.

**ОТО-2** обычно представляют собой комбинацию ЭО типа **Д-1**, **Д-2** (в редких случаях **С-2**) и могут быть рекомендованы для использования ЧМП.

**ОТО-3** могут быть оценены двояко (в зависимости от конкретной задачи и компетентности ЛПР) и как сложные, и как неопределенно-допустимые.

Итак, корректные ЧМП используют главным образом операции с оценкой альтернатив по критериям (при условии их представимости в виде комбинаций ЭО типа **Д-1** и **Д-2**), а также любые другие операции в классе **Д**, причем очевидно, что применение **Д-1** > **Д-2** (т.е. операция **Д-1** предпочтительнее операции **Д-2** при организации ЧМП).

## Формально-эвристические методы (ФЭМ) с участием ЛПР

### ФЭМ с участием одного ЛПР

К числу наиболее известных ФЭМ, использующих понятие целевой точки, относятся следующие [4, с. 210-2015].

1. Процедура Вержбицкого. Для реализации процедуры задается целевая точка  $y^o$  (обычно недостижимая); выбирается метрика, характеризующая степень приближения решения в пространстве критериев  $\tilde{y}$  к идеальной точке (в задаче (I) в качестве метрики выбрана сумма квадратов отклонений  $\sum_{i=1}^n (y_i^o - y_i)^2$ ). Произвольным образом ЛПР «возмущает» целевую точку, далее на основе фор-

мальных методов определяется область решений, соответствующая этим возмущениям; после этого ЛПР выбирает в полученной области решение, предпочтительное с его точки зрения.

2. Процедура Зелени. Эта процедура отличается от предыдущей тем, что целевая точка  $y^o$  выбирается в области эффективных (Парето оптимальных) решений; затем ищется соответствующая область компромиссных решений (как подмножество области эффективных решений), в которой с помощью ЛПР выбирается наилучшее решение. В том случае, если область компромиссных решений не содержит решения, удовлетворяющего ЛПР, целевая точка корректируется и процесс повторяется снова.
3. Процедура внешнего ветвления. В этой процедуре назначается целевая точка  $y^o$  как недостижимая и вычисляется соответствующее ей решение  $x^o$ . Если  $x^o \in R_x$ , процедура заканчивается; если  $x^o \notin R_x$ , то ЛПР указывает номер  $i^*$  критерия  $y_{i^*}$ , который следует изменить в целевой точке таким образом, чтобы она стала «более реалистичной». После этого находится новое решение, которое проверяется на допустимость, и т.д. Таким образом, в этой процедуре ЛПР приближает целевую точку к границе эффективных решений.

Недостатком описанных ФЭМ является участие лишь одного ЛПР, который обычно отражает в своих решениях интересы одного из уровней (как правило – верхнего, поскольку основные корректировки решений связаны с изменением целевой точки). Кроме того, как доказано в работе [6, с. 36], данные ФЭМ, относятся к классу некорректных ЧМП, поскольку содержат операции из класса **С**, реализуемые ЛПР, как правило, с ошибками. В частности, ЛПР приходится принимать решения по трем критериям одновременно (целевая точка и изменения двух критериев на границе Парето).

### ФЭМ с участием двух ЛПР

В связи с необходимостью построения корректных ФЭМ в предлагаемых авторами процедурах согласования экономических интересов предусматривается взаимодействие двух ЛПР, каждый из которых принимает решения на своем уровне компетенции. Излагаемые далее различные схемы согласования являются комбинацией процедур Вержбицкого, Зелени и внешнего ветвления с учетом дифференциации компетенций различных уровней управления.

При построении данного типа ФЭМ приняты следующие гипотезы.

1. В согласовании участвуют не менее двух экспертов, в деятельности которых неявно выражается система предпочтений соответствующего уровня управления. При этом:
  - оценка варианта производится на основе как формальных критериев  $y_i$ , так и неформальных («мягких») критериев;
  - эксперты осуществляют непосредственный выбор варианта на множестве  $\pi$  – т.е. наиболее предпочтительной точки на уровне Парето, что соответствует назначению весовых коэффициентов  $\xi_i^H$  и  $\xi_i^B$  в задачах (2) и (3);

- формирование компромиссного решения производится с учетом взаимодействия ЛПР обоих уровней как партнеров по согласованию.
2. Исходная целевая точка считается недостижимой, что соответствует обычной практике согласования.
  3. Целенаправленная деятельность экспертов осуществляется на основе схемы согласования, представленной на рис. 1, причем считается, что в решениях ЛПР учитываются некоторые неформальные критерии и «косвенные» системы стимулирования, которые определяют значение интегральной функции полезности нижнего звена.
  4. При организации итеративных алгоритмов СПР используются достаточно простые математические методы и упрощенные приемы, применяемые в практике согласования. Это обуславливается участием в реальных процедурах СПР таких экспертов как плановики, руководители и т.д., для которых используемый инструментарий должен быть понятным и хорошо интерпретируемым.
  5. В целях упрощения согласования производится выделение областей переговорного множества, наиболее вероятных для попадания в них согласованного решения (сужение переговорного множества путем итерации). Так, в соответствии с рис. 1, поиск согласованного решения осуществляется внутри переговорного множества  $\phi^*$ , причем граничные точки  $A$  и  $B$ , по условию задачи не являются согласованным решением. В ходе итеративного процесса решение нижнего уровня (точка  $A$ ) смещается по критериальному переговорному множеству  $\phi^*$  к точке  $B$ . Таким образом, на каждой  $j$ -й итерации оказывается необходимым просмотр лишь той части переговорного множества, которая находится правее смещенного положения точки  $A$ , полученного  $j$ -й итерации.
  6. Процесс согласования осуществляется в пространстве критериев  $\{y_i\}$ . При этом предполагается, что расчет величины народнохозяйственного эффекта  $W(y)$  может производиться для каждой точки пространства критериев  $\{y_i\}$ .

Далее приводятся два итеративных алгоритма СПР с участием эвристических процедур, графическая иллюстрация которых представлена на рис. 3 (а и б).

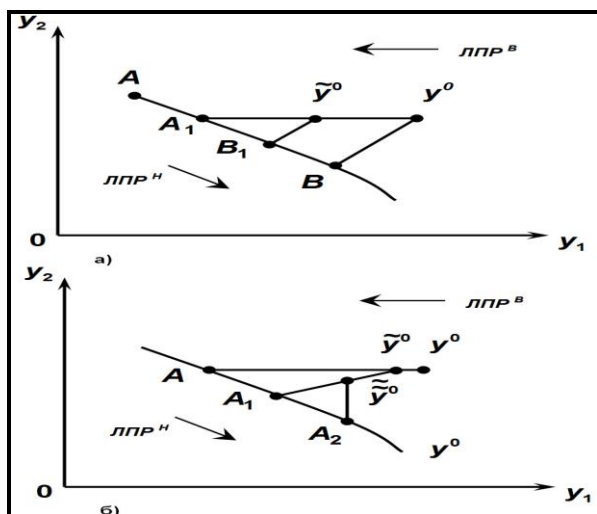


Рис. 3. Два алгоритма процесса СПР с участием двух экспертов верхнего и нижнего уровней (ЛПР<sup>В</sup> и ЛПР<sup>Н</sup>): а) – алгоритм I; б) – алгоритм II

*Алгоритм I – с использованием коэффициента, отражающего склонность к компромиссу верхнего уровня.*

1. Пусть известна целевая точка  $y^0$  и определены начальные точки  $A$  и  $B$  на границе  $\phi$  (причем  $A \neq B$ ), что задает начальные границы переговорного множества  $\phi^*$ . Считается, что определение начальных точек переговорного множества  $\phi$  осуществляется путем решения задач (2) и (3) с возможностью корректировки полученных результатов ЛПР верхнего и нижнего уровней с учетом неформальных критериев.
2. ЛПР верхнего уровня в соответствии с формулой (4) определяет величину стимулирующей премии и информирует об этом ЛПР нижнего уровня.
3. ЛПР нижнего уровня, рассмотрев предложенные верхним уровнем условия, а также учитывая собственные неформальные интересы, смещает начальную точку  $A$  в положение точки  $A_1$  (поскольку его интегральная функция полезности в соответствии с формулой (5) в точке  $A_1$  больше, чем в точке  $A$ ).
4. ЛПР верхнего уровня находит компромиссное решение  $\tilde{y}^0$  на отрезке  $A_1 y^0$ , соединяющем новое решение нижнего уровня  $A_1$  и прежнюю целевую точку. Это эквивалентно тому, что ЛПР верхнего уровня назначает некоторый весовой коэффициент «компромисса»  $\gamma$  такой, что  $0 \leq \gamma \leq 1$ ,  $\tilde{y}^0 = A + (1 - \gamma)(y^0 - A)$ , причем  $\tilde{y}^0 = y^0$  при  $\gamma = 0$  и  $\tilde{y}^0 = A$  при  $\gamma = 1$ .

Предполагается, что для ЛПР верхнего уровня существуют некоторые мотивы или побудительные причины, обуславливающие поиск компромиссного решения на отрезке  $A_1 y^0$ . Например, заключение контракта возможно лишь при полном совпадении предложений сторон, причем предложения нижнего уровня формируются лишь одним участником, и у ЛПР верхнего уровня нет иного альтернативного варианта.

5. С помощью задачи (3) находится новое достижимое решение  $B_1$ , которое является ближайшим к компромиссной точке  $\tilde{y}^0$  и принадлежит границе  $\phi$ . Так как линейные размеры у области  $A_1 B_1$  меньше, чем у начального переговорного множества  $AB$ , то описанный процесс может быть продолжен с п. 2 до совпадения предложений сторон или их сближения в заданных пределах.

В ходе описанного итеративного процесса СПР верхний уровень может применять и косвенные методы стимулирования нижнего уровня в том случае, если возможности экономического стимулирования оказались исчерпанными. Например, обещать ЛПР нижнего уровня заключение будущих выгодных контрактов, обеспечивать приоритетность поставок дефицитного производственного ресурса, включение в целевые программы и т.д.

*Алгоритм II – ускоренное встречное согласование с использованием коэффициентов компромисса верхнего и нижнего уровней.*

В алгоритме I предполагается, что ЛПР верхнего уровня «умеет» переводить недостижимые точки в соответствующие им достижимые точки  $B_1, B_2, \dots$ , т.е. можно решить задачу (3) для получения достижимых точек  $B, B_1, B_2, \dots$ . В реальных ситуациях это



предположение может оказаться слишком сильным: ЛПР верхнего уровня обычно недостаточно хорошо представляет множество достижимых значений нижнего уровня и (как подтверждает практика планирования) определение на этом множестве точки, ближайшей к целевой является для него затруднительным.

В реальных процессах СПР обычно «отслеживаются» точки  $A, A_1, A_2, \dots$  и целевые точки  $y^0, \tilde{y}^0$  без нахождения точек  $B, B_1, B_2, \dots$ .

С учетом этих обстоятельств, схема согласования может быть еще более упрощена. Алгоритм состоит в следующих этапах.

1. Пусть (так же как и в алгоритме I) известна начальная точка  $A$  и целевая точка  $y^0$ . ЛПР верхнего уровня формирует два решения:
  - смещение целевой точки  $y^0$  к компромиссу  $\tilde{y}^0$  на отрезке  $Ay^0$ ;
  - стимулирующее предложение для нижнего уровня.
2. ЛПР нижнего уровня смещается в точку  $A_1$  и информирует об этом решение верхний уровень.
3. ЛПР верхнего уровня находит новую компромиссную точку  $y^1$  на отрезке  $A_1y^0$  формирует новое стимулирующее предложение для нижнего уровня и т.д. до сближения предложений с заданной точностью.

В отличие от предыдущего алгоритма II схема согласования алгоритма III не требует определения точек  $B, B_1, B_2$ , а скорость сходимости СПР определяется стимулирующим эффектом (коэффициентом  $\alpha$  для нижнего уровня) и степенью компромисса (коэффициентом  $\gamma$  для верхнего уровня).

Отличительными особенностями алгоритмов (I) и (II) являются.

1. Возможность учета неформальных аспектов в процессах принятия решения, что делает их более реалистичными.
2. Обеспечение процесса СПР на паритетных началах и достижения совпадения предложений сторон на его финальной стадии.
3. Корректность осуществляемых эвристических процедур, поскольку на каждой из стадии данных алгоритмов ЛПР обоих уровней принимают решения либо с использованием одного критерия (ЭО  $\in$  Д-1), либо с использованием двух критериев, но на предварительно построенной границе Парето, что также делает эти решения допустимо сложными (ЭО  $\in$  Д-2).

К числу недостатков данных алгоритмов является, во-первых, недостаточный учет обратных связей, во-вторых - отображение в них нижнего звена как недостаточно активного элемента. В связи с этим в данной работе предлагается модифицированный вариант ФЭМ.

**Модифицированный вариант ФЭМ для двух ЛПР (с учетом эффекта положительной обратной связи).**

Отличие модифицированного варианта ФЭМ от рассмотренных ранее ФЭМ с участием двух ЛПР состоит в учете дополнительных производственно-экономических возможностей нижнего уровня, которые появились в ходе процесса СПР как результат стимулирующего воздействия верхнего уровня.

Стимулирующий эффект верхнего уровня может выражаться в снижении бремени по налогам, льготном кредитовании и т.д. Это означает, что у нижнего звена происходит увеличение потенциала развития, что позволяет сместить область его производственных возможностей и, соответственно, границу Парето, ближе к целевой точке. На рис. 4 изображены две итерации процесса СПР на базе модификации алгоритма I.

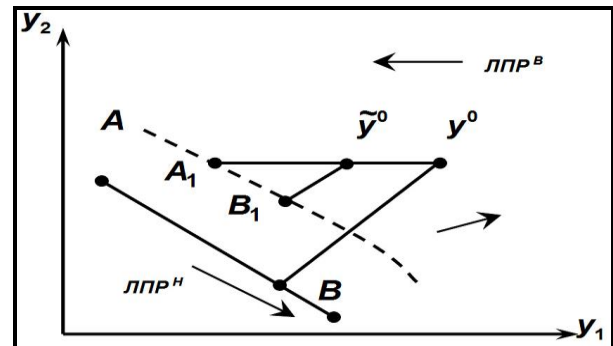


Рис. 4. Схема СПР в модифицированном варианте ФЭМ

Модифицированный вариант ФЭМ более полно учитывает возможности нижнего звена, рассматривая его как более активный элемент процесса СПР. Он так же обеспечивает увеличение скорости сходимости по сравнению с аналогами (см. алгоритмы I и II), но требует на каждом шаге построения новой границы Парето (например, с использованием метода обобщенного множества достижимости) [1, с. 243-248].

**Выводы**

Рассмотренные методы могут быть рекомендованы для достаточно широкого класса задач согласования экономических интересов различных управленческих уровней. В целях более достоверного отображения всех условий, влияющих на процесс СПР, методы согласования решений целесообразно совершенствовать с учетом сочетания формальных и эвристических процедур. Разработанные методы согласования экономических интересов с включением ЛПР различных уровней позволяют учитывать в окончательном решении не только факторы, традиционно отражаемые присутствующими в моделях формальными критериями, но также и неформальные аспекты, имеющие достаточно весомую значимость в реальной практике СПР.

**Литература**

1. Аганбегян А.Г. и др. Система моделей народнохозяйственного планирования [Текст] / А.Г. Аганбегян, К.А. Багриновский, А.Г. Гранберг. – М. : Мысль, 1972. – 351 с.
2. Багриновский К.А. Основы согласования плановых решений [Текст] / К.А. Багриновский. – М. : Наука, 1977. – 303 с.
3. Бушенков В.А. Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости [Текст] / В.А. Бушенков, А.В. Лотов. – М. : ВЦ АН СССР, 1982. – 54 с.
4. Егорова Н.Е. Вопросы согласования плановых решений с использованием имитационных систем [Текст] / Н.Е. Егорова. – М. : Наука, 1987. – 283 с.



5. Егорова Н.Е. Применение принципа экономической компенсации в задачах межуровневого согласования плановых решений [Текст] / Наталья Егорова // Проблемы компьютеризации процессов разработки эффективных плановых решений : сб. тр. / под ред. В. Беленького. – М. : ЦЭМИ АН СССР, 1989. – С. 31-46.
6. Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения [Текст] / О.И. Ларичев. – М. : Наука, 1987. – 144 с.
7. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь [Текст] : словарь совр. экон. науки. – 5-е изд., перераб. и доп. / Л.И. Лопатников. – М. : Дело, 2003. – 520 с.
8. Лотов А.В. Анализ потенциальных возможностей экономических систем [Текст] / А.В. Лотов // Экономика и математические методы. – 1981. – Т. 17 ; вып. 2. – С. 261-267.
9. Макаров В.Л. и др. Применение вычислительных моделей в государственном управлении [Текст] / В.Л. Макаров, А.Р. Бахтизин, С.С. Сулакшин. – М. : Научный эксперт, 2007. – 304 с.
10. Подиновский В.В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям [Текст] / В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. – М. : Советское радио, 1975. – 192 с.
11. Поманский Л.Б. О сходимости процессов согласования экономических интересов [Текст] / Л.Б. Поманский // Экономика и математические методы. – 1983. – Т. 19 ; вып.4. – С. 598-607.
12. Cnarnes A. Management models and the industrial applications of linear programming [Text] / A. Cnarnes, W.W. Cooper. – New York, 1961. – 90 p.
13. Salukwadze M.E. On the existence of solutions in problems of optimization under vector-valued criteria [Text] / M.E. Salukwadze // Journal of optimization theory and applications. – 1974. – №12. – P. 203-217.
14. Simon H. Heuristic problem soloing; the next advance in operation research [Text] / H. Simon, A. Newell // Operatic-research. – 1988. – Vol. 6; №1. – Pp. 1-10.
15. Wierzbicki A.P. A mathematical basis for satisficing decision making [Text] / A.P. Wierzbicki // Mathematical modeling. – 1982. – №3. – Pp. 391-405.

### Ключевые слова

Оптимальная задача; лицо; принимающее решение; идеальная точка; множество Парето; процедура согласования экономических интересов; иерархические уровни управления.

*Егорова Наталья Евгеньевна*

*Иванов Кирилл Алексеевич*

### РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность темы обусловлена тем, что управление в сфере ЖКХ представляет собой сложную многоуровневую систему: государственные структуры верхнего эшелона, представляющие народнохозяйственные и общественные интересы; управленческие структуры среднего звена (департаменты жилищно-коммунального хозяйства (ЖКХ)), отражающие экономические интересы развития данного сектора народного хозяйства; управленческие структуры нижнего звена (советы дома, жилищно-строительные кооперативы (ЖСК) и др.), являющиеся представителями интересов потребителей услуг ЖКХ (население и др.). На каждом из этих уровней решается оптимизационная задача с соответствующим критерием, отражающим интересы данного иерархического звена. Затем полученные решения проходят стадию согласования, поскольку экономические интересы могут быть не совпадающими, а зачастую – и конфликтными. В статье рассматривается многокритериальная оптимальная задача с наличием идеальной (целевой) точки и приложении этой задачи к проблемам согласования экономических интересов различных уровней управления.

Научная новизна и практическая значимость. В статье освещены основные аспекты организации деятельности системы ЖКХ, основанные на использовании экономико-математических методов и моделей для оценки эффективности функционирования каждого из уровней управления. Решение задачи согласования интересов осуществляется двумя способами: во-первых, формальными методами; во-вторых, на основе сочетания формальных и эвристических процедур. В результате находится компромисс экономических интересов различных уровней как одна из точек множества Парето.

Авторами в работе рассматривается двухуровневая постановка задачи, экономико-математический анализ которой осуществляется в следующих направлениях: во-первых, формулировка оптимизационной задачи согласования интересов с наличием идеальной точки; во-вторых, использование формальных методов согласования интересов различных уровней; в-третьих, обоснование необходимости использования эвристических методов и оценка их корректности в процедурах СПР; в-четвертых, применение формально-эвристических методов согласования экономических интересов, предполагающих участие ЛПР (лица, принимающего решение).

Заключение: Рассмотренные методы могут быть рекомендованы для достаточно широкого класса задач согласования экономических интересов различных управленческих уровней. Рецензируемая статья отвечает требованиям, предъявляемым к научным публикациям, и может быть рекомендована к опубликованию.

*Киселева И.А., д.э.н. профессор, профессор, кафедра прикладной математики Московского государственного университета экономики, статистики и информатики*