# 3.4. МОДЕЛИ VALUE AT RISK В ОЦЕНКЕ РЫНОЧНЫХ РИСКОВ

Дробыш И.И., аспирант, кафедра «Анализа эффективности инвестиционных проектов», Центральный экономико-математический институт РАН, эксперт Института проблем ценообразования и регулирования естественных монополий

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

В статье приведен сравнительный анализ различных методов ***VaR*** для оценки рыночных рисков. Освещены теоретические подходы – рассмотрены дельта-нормальный метод, метод исторического моделирования и его модификации, метод Монте-Карло, метод экстремальных событий. Выполнены расчеты ***VaR*** дельта-нормальным методом (модель с выборочной дисперсией, модель ***EWMA***) и методом исторического моделирования (простой метод исторического моделирования, метод Халла и Вайта, метод бутстрап) на основе данных одного из паевых инвестиционных фондов, размещающих средства в акциях и облигациях ведущих российский компаний. Проведена верификация полученных результатов.

## ВВЕДЕНИЕ

Value at risk (***VaR***) является одним из наиболее популярных подходов к оценке рисков, используемых инвестиционными банками, финансовыми учреждениями, казначействами и различными компаниями.

Суть метода заключается в следующем. В задачу оценки или выбора актива (конкретного финансового инструмента, портфеля инструментов и т.д.) вводится дополнительное ограничение в виде требования по определению и принятию в расчет взаимосвязи между максимально допустимым уровнем потерь и вероятностью того, что уровень возможных потерь не превысит этой величины. ***VaR*** непосредственно определяется как такая величина потерь, что рассматриваемый актив за интересующий период или на заданный момент времени с определенной вероятностью потеряет в стоимости не более этой величины [2]. ***VaR*** позволяет агрегировать всевозможные риски (рыночные или кредитные) в одно число, имеющее денежное выражение. Краткость представления и понятность полученных результатов способствовали широкому распространению использования ***VaR*** в отчетах для менеджеров, акционеров и внешних инвесторов.

В конце 1980-х – начале 1990-х гг. финансовая корпорация J.P Morgan разработала модель оценки рисков на основе ***VaR***. Модель использовалась для прогнозирования максимальных потерь по всем трейдинговым позициям в банке, ожидаемым в ближайшие 24 ч. Ежедневный отчет предоставлялся в совет директоров J.P. Morgan в 16.15 [1].

В открытой печати термин «value at risk» впервые появился в докладе «Деривативы: практика и принципы» (также известном как Отчет G-30) в 1993 г. Документ был подготовлен J.P. Morgan по заказу «Группы тридцати» (G-30) – некоммерческой организации, объединяющей крупнейшие финансовые организации США. В этом же году в Европейском союзе принята Директива 93/6/ЕЕС «О достаточности капитала», предписывающая банкам и инвестиционным учреждениям устанавливать резервы капитала на основе моделей ***VaR*** для покрытия рыночных рисков.

В 1994 г. корпорация J.P Morgan опубликовала систему оценки рисков ***RiskMetrics™*** на своем официальном сайте, предоставив ее в свободное пользование всем участникам рынка. ***RiskMetrics™*** содержит базы данных по волатильностям и корреляциям для большого числа цен и доходностей (валютные рынки, денежные рынки, процентные и государственные облигации, индексы акций, сырьевые рынки и т.д.) для десятков стран.

В 1995 г. Базельский комитет по надзору за банками выступил с предложением использовать подход ***VaR*** для расчета резервов капитала в банковской сфере. В 1996 г. данное предложение получило одобрение, а в 1998 г. вступило в силу.

Кроме того, следует отметить, что несмотря на то, что термин «value at risk» появился в финансовом лексиконе в начале 1990-х гг., истоки метода имеют более давнюю историю [7, 8]. Наиболее ранние события относятся к 1922 г., когда на Нью-Йоркской фондовой бирже были введены требования к достаточности капитала. В 1950-х – 1960-х гг. получила развитие теория портфельных инвестиций (работы Г. Марковица, Д. Тобина, У. Шарпа, Д. Трейнора и т.д.), которая в дальнейшем послужила основной для математических оценок ***VaR***. В 1975 г. Государственная комиссия по ценным бумагам и фондовому рынку США установила унифицированные требования к уровню ликвидности для всех американских фондовых компаний, не освобожденных от налогообложения, чтобы гарантировать, что компании обладают достаточной ликвидностью для выполнения своих обязательств. Компании были обязаны предоставлять подробные расчеты в ежеквартальных единых стандартных финансовых отчетах. В 1980-х гг. фондовые рынки стали более волатильными, резко возросли рыночные риски. К данному моменту было накоплено достаточно ресурсов для расчета ***VaR***. В этот период финансовые институты США использовали оценки рисков на основе концепции ***VaR***, но данный подход оставался известен только в пределах узкого профессионального круга.

В настоящее время ***VaR*** продолжает охватывать все более широкие области применения, которые включают: оценки рыночных рисков, в том числе рисков ликвидности; оценки кредитных рисков; применение в оценках эффективности реальных инвестиционных проектов.

В статье представлен анализ теоретических и практических аспектов реализации метода ***VaR*** применительно к рыночным рискам – сравнение моделей с соответствующими примерами расчетов. Дополнительные сведения о направлениях использования ***VaR*** можно почерпнуть в работах [2, 3, 4 и 5].

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### Определение *VaR*

В математических терминах $VaR_y$ представляет собой нижнюю грань таких неотрицательных величин $C$ что событие $Y \geq C$ ($Y$ – абсолютная величина убытка для рассматриваемого актива за интересующий период времени (далее временной горизонт)) имеет вероятность, не превосходящую $\gamma$ (обычно $\gamma$ – экзогенно задаваемая допустимая вероятность потерь) (рис. 1) [2]:

$$VaR_{\gamma} := \inf \left\{ C \middle| Pr\left[ Y \geq C \right] \leq \gamma \right\} \quad (1)$$

где $Pr(A)$ – вероятность события $A$;

$Y$ – абсолютная величина убытка для рассматриваемого актива;

$\gamma = \frac{100 - x}{100}$, $\gamma \in (0,1)$, $X\%$ – экзогенно задаваемый доверительный уровень.

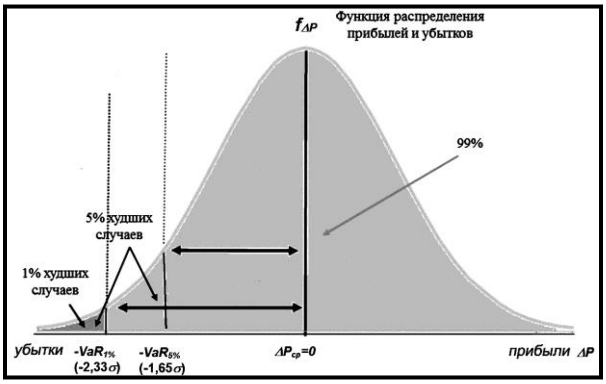


**Рис. 1. Определение величины *VaR* при нормальной функции распределении доходов с нулевым математическим ожиданием**[1]

С точки зрения статистики приведенное выше определение означает следующее. Пусть $F_Y$ – функция распределения случайной величины ***Y***. Тогда $VaR_y$ представляет собой квантиль[2] функции распределения $F_Y$:

$$VaR_y = F^{-1}(1-\gamma), \qquad (2)$$

где $F_Y^{-1}(1-\gamma)$ – значение функции, обратной к функции распределения $F_Y$, в точке $(1-\gamma)$.

Таким образом, при вычислении ***VaR*** основной задачей является нахождение искомой функции распределения величины ***Y***.

## Выбор временного горизонта и доверительного уровня для расчета *VaR*

Величина ***VaR*** является функцией двух параметров – временного горизонта и доверительного уровня (***X%***).

Базельский комитет по надзору за банками для оценки рыночных рисков предписывает использовать временной горизонт 10 дней и доверительный уровень, равный 99%. Прочие компании и учреждения выбирают значения рассматриваемых параметров по своему усмотрению. Например, компания Microsoft в своем финансовом отчете отметила, что рассчитывает величину ***VaR*** для временного горизонта 20 дней и доверительного уровня 97,5%.

Обычно *временной горизонт* для расчета ***VaR*** выбирается, исходя из срока удержания данного актива в портфеле или его ликвидности – т.е., исходя из минимального реального срока, в течение которого можно реализовать на рынке данный актив (закрыть позиции) без существенного убытка, поскольку именно в пределах этого срока менеджеры не в состоянии что-либо предпринять для снижения потерь [2].

Следует различать термин «временной горизонт» для расчета ***VaR*** от термина «глубина периода» для расчета ***VaR***. Глубина периода для расчета ***VaR*** представляет собой объем выборки ретроспективных или искусственно смоделированных данных, на основе которых вычисляется величина ***VaR***.

В случае, если изменение доходности актива имеет нормальное распределение с математическим ожиданием, равным нулю, справедлива формула [12]:

$$VaR(N) = VaR(1)\sqrt{N}, \qquad (3)$$

где ***N*** – временной горизонт;

***VaR(1)*** – величина ***VaR*** для временного горизонта в 1 день;

***VaR(N)*** – величина ***VaR*** для временного горизонта, равного ***N*** дням.

*Доверительный уровень* выбирается в зависимости от предпочтений к риску, выраженных в регламентирующих документах надзорных органов или в корпоративной практике, с отражением оценки менеджеров. На практике обычно используются доверительные уровни: 95%, 97,5% и 99%.

В случае, если изменение доходности актива имеет нормальное распределение с математическим ожиданием равным нулю [12]:

$$VaR(X^*) = VaR(X)\frac{k(X^*)}{k(X)}, \qquad (4)$$

где ***VaR(X)*** – величина ***VaR*** для доверительного уровня ***X%;***

***VaR(X*)*** – величина ***VaR*** для доверительного уровня $X^*\%$;

***k(X*)*** – квантиль стандартного нормального распределения в точке $X^*\%$;

***k(X)*** – квантиль стандартного нормального распределения в точке ***X%***.

## Недостатки определения *VaR*

Отметим два важных свойства (недостатка), которые вытекают из определения ***VaR***, и на которые следует обращать внимание в контексте решения конкретных задач оценки рисков.

1. ***VaR*** не обладает свойство субаддитивности. То есть ***VaR*** актива может оказаться больше, чем сумма значений ***VaR*** входящих в актив инструментов. Это противоречит тому факту, что диверсификация не должна приводить к увеличению риска [2, 7].
2. ***VaR*** может быть очень чувствителен к выбору $\gamma$, так как не учитывает распределение величин убытков, происходящих с вероятностями, меньшими $\gamma$ (хвост распределения отсекается). Предположим, банк дал указанию менеджеру, что ***VaR*** портфеля для временного горизонта в один день и доверительного уровня 99% не должен превышать 10 млн. долл. Менеджер может построить портфель, для которого с вероятностью 99% величина убытков не превысит 10 млн. долл., а с вероятностью 1% составит 500 млн. долл. При этом менеджер удовлетворит требованиям банка, но возьмет неприемлемый риск [12]. Таким образом, при оценке ***VaR*** необходимо проанализировать, можно ли пренебречь хвостами распределения в контексте решаемой задачи.

---

[1] Правая закрашенная область рисунка соответствует выбранному доверительному уровню 99% – ее площадь составляет 99% от общей площади под кривой.

[2] Квантилем порядка $p$, $(0 < p < 1)$ для случайной величины ***X,*** называется такая величина $x_p$, что либо $F_X(x_p) = p$, либо функция $F_X(x)$ претерпевает скачок от значений, меньших $p$ к значением, большим $p$.

## МЕТОДЫ ОЦЕНКИ VAR В ОЦЕНКЕ РЫНОЧНЫХ РИСКОВ

Можно выделить четыре основных метода расчета ***VaR***: дельта-нормальный метод, метод исторического моделирования, метод Монте-Карло, метод экстремальных событий (табл. 1).

В статье рассмотрены следующие методы.

1. Дельта-нормальный метод:
   - модель с выборочной дисперсией;
   - модель экспоненциально-взвешенных ковариаций (***EWMA***[3]);
   - обобщенная авторегрессионная модель условной гетероскедастичности (***GARCH***[4]).
2. Метод исторического моделирования:
   - обычный метод исторического моделирования;
   - метод исторического моделирования с учетом весов наблюдений;
   - метод Халла и Вайта;
   - метод бутстрап.
3. Метод Монте-Карло.
4. Метод экстремальных событий.

Наиболее важные различия в методах вычисления ***VaR*** заключаются в предположении о:

- вероятностном распределении факторов риска, а также;
- виде функциональной зависимости изменений стоимости актива (портфеля) от изменений факторов риска.

**Таблица 1**

**ОСНОВНЫЕ РАЗЛИЧИЯ В МЕТОДАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ VAR**

| Предложение | Метод |
|---|---|
| Предположение о вероятностном распределении факторов риска | Эмпирическая функция распределения (метод исторического моделирования) |
| | Многомерное нормальное распределение[5] (дельта-нормальный метод) |
| | Характер распределения, отличный от многомерного нормального распределения[6] (например, метод экстремальных событий) |
| Предположение о функциональной зависимости изменений стоимости актива от изменений факторов риска | Первая группа основана на локальном оценивании – используется аппроксимация изменения стоимости актива от изменений факторов риска (например, линейная или квадратичная). Обычно применяется в дельта-нормальном методе |
| | Вторая групп основана на полном оценивании – генерируются различные сценарии (метод исторического моделирования, метод Монте-Карло) |
| | Методы, связанные с оценкой вероятности попадания в хвост распределения (метод экстремальных событий) |

[3] Exponentially weighted moving average model.

[4] Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity.

[5] В методе Монте-Карло может использоваться предположение как о многомерном нормальном распределении, так и о ином характере распределения.

[6] Аналогично.

### Дельта-нормальный метод

Суть дельта-нормального метода заключается в выявлении рыночных факторов, влияющих на стоимость актива и аппроксимации стоимости актива на основе этих факторов.

В дельта-нормальном методе используется предположение о многомерном нормальном законе (несколько реже логнормальном или законе распределения Парето) распределения доходностей факторов рыночного риска, от которых зависит стоимость более сложных инструментов, позиций и актива в целом. При нормальном распределении доходностей факторов риска, распределение доходностей инструментов / активов, являющихся линейной комбинацией доходностей факторов риска, также имеет нормальное распределение.

Для нормального распределения плотность:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где $m$ – математическое ожидание, а $\sigma^2$ – дисперсия распределения. В этом случае:

$$VaR\gamma = m + k_{1-\gamma\sigma}, \quad (5)$$

где $k_{1-\gamma}$ – квантиль порядка $(1-\gamma)$ для стандартного нормального распределения.

Рассмотрим актив стоимостью $P$, состоящий из $n$ инструментов [12], доходности каждого имеют нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu_i (1 \le i \le n)$. Пусть доля $i$-го инструмента $-\alpha_i$, изменение доходности $i$-го инструмента за один день – $\Delta r_i$ .

Изменение стоимости актива за один день:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta r_i . \quad (6)$$

Чтобы посчитать стандартное отклонение стоимости всего актива $\sigma_p$, определим $\sigma_i$ как дневную волатильность доходности $i$-го инструмента и $p_{ij}$ как коэффициент корреляции между доходностями разных инструментов. Тогда:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\alpha_i\alpha_j\sigma_i\sigma_j \quad (7)$$

или

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j<1}^{n} p_{ij}\alpha_i\alpha_j\sigma_i\sigma_j . \quad (8)$$

Стандартное отклонение стоимости актива за $N$ дней равно $\sigma_p\sqrt{N}$ .

***VaR*** портфеля с временным горизонтом $N$ дней и доверительным уровнем $(1-\gamma)$ :

$$VaR_\gamma = m + k_{1-\gamma}P\sigma_\rho = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mu_i + \\ + k_{1-\gamma}P\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j<1}^{n} p_{ij}\alpha_i\alpha_j\sigma_i\sigma_j}. \quad (9)$$

В матричном виде выражение (9) имеет вид:

$$VaR_\gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mu_i + k_{1-\gamma}P\sqrt{a^T \Sigma \alpha} . \quad (10)$$

где $\Sigma$ – ковариационная матрица доходностей факторов риска.

Расчет ковариационной матрицы может быть выполнен с помощью следующих моделей [4]:

- модель с выборочной дисперсией;
- модель **EWMA**;
- модель **GARCH**.

Пусть доходности факторов риска $\boldsymbol{r}$ распределены независимо и по нормальному закону со средним, равным $\mu$ (для упрощения будем считать равным нулю), и ковариационной матрицей $\sum_{t+1}$.

*1. Модель с выборочной дисперсией.* Наиболее простая модель: предполагается, что ковариации доходностей являются постоянными на протяжении периода длины $\boldsymbol{T}$ – скользящего окна наблюдений, а также на протяжении периода прогноза. Ковариационная матрица вычисляется как:

$$\sum_{t+1} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{T}-\boldsymbol{1}} \sum_{s=t+1-T}^{t} \boldsymbol{r}_s \boldsymbol{r}_s^{T(\text{зд. транспонировние})}. \qquad (11)$$

Однако реальные временные ряды обычно являются нестационарными и, значит, ковариации изменяются со временем. Чтобы это учесть, требуются другие методы оценки.

2. *Модель **EWMA**.* Модель **EWMA** приписывает более поздним наблюдениям больший вклад в ковариацию. При этом ковариационная матрица рассчитывается следующим образом:

$$\sum_{t+1} = \frac{\boldsymbol{1}-\lambda}{\boldsymbol{1}-\lambda^{T}} \sum_{s=t+1-T}^{t} \lambda^{t-s} \boldsymbol{r}_s \boldsymbol{r}_s^{T}, \qquad (12)$$

где $\boldsymbol{0} < \lambda < \boldsymbol{1}$.

Последнее выражение преобразуется следующим образом:

$$\sum_{t+1} = \lambda \sum_{t} + (\boldsymbol{1}-\lambda) \boldsymbol{r}_t \boldsymbol{r}_t^{T}, \qquad (13)$$

что представляет собой взвешенное среднее авторегрессии и скользящего среднего первого порядка. Чем меньше значение множителя $\lambda$, тем чувствительнее модель к изменениям происходящим с временным рядом. С другой стороны, уменьшение значения $\lambda$ ведет к уменьшению эффективного размера выборки, что влияет на точность оценки ковариаций.

Для каждого временного ряда можно найти оптимальное значение $\lambda$, при котором его вариация наилучшим образом описывается авторегрессионным процессом (например, с помощью метода максимального правдоподобия или метода нахождения минимума среднеквадратичной ошибки дисперсии). В системе ***RiskMetrics***$^{TM}$ при доверительном уровне 99% значение параметра $\lambda$ равно 0,94.

3. *Модель **GARCH**.* Модель **GARCH** является обобщением модели **EWMA**. Она также сочетает авторегрессию и скользящее среднее, только более высоких порядков. Так, одномерная модель ***GARCH***(***p***,***q***) имеет вид:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{r}_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2. \qquad (14)$$

Параметры $\alpha$ и $\beta$ определяются с помощью метода максимального правдоподобия. Наиболее часто используется простейшая модель ***GARCH***(***1,1***):

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha \boldsymbol{r}_t^2 + \beta \sigma_t^2. \qquad (15)$$

При увеличении числа параметров применение ***GARCH***-модели становится затруднительным по причине возникающих трудностей при численном решении оптимизационной задачи – максимизации функции правдоподобия.

## Метод исторического моделирования

Метод исторического моделирования относится к группе методов полного оценивания и является непараметрическим. Метод основывается на предположении о стационарности поведения прогнозируемых рыночных цен (и прочих факторов). Для моделирования изменений переменных состояния используются ретроспективные данные, т.е. с точки зрения статистики строится эмпирическая функция распределения.

Рассмотрим пример оценки ***VaR*** методом исторического моделирования из [12].

Пусть требуется оценить ***VaR*** актива при временном горизонте в один день и доверительном уровне 99% на основе данных за 201 предшествующий день. Сначала выявляются рыночные переменные (факторы), влияющие на стоимость актива (валютный курс, курс акций, процентные ставки и т.д.). Далее собираются сведения о дневных изменениях этих рыночных переменных (в рассматриваемом примере для каждого из 200 дней). Таким образом, формируется 200 альтернативных сценариев, для каждого сценария рассчитывается изменение стоимости актива, что определяет вероятностное распределение дневных изменений его стоимости. Величина ***VaR*** соответствует убытку в точке 1% квантиля, т.е. второй результат в отсортированном по убыванию изменении стоимости актива (табл. 2, 3).

**Таблица 2**

**ЗНАЧЕНИЯ ЦЕН ПЕРЕМЕННЫХ, ВЛИЯЮЩИХ НА СТОИМОСТЬ АКТИВА**

| День | 1-я рыночная переменная | 2-я рыночная переменная | … | 10-я рыночная переменная |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 20,33 | 0,1132 | … | 65,37 |
| 1 | 20,78 | 0,1159 | … | 64,91 |
| 2 | 21,44 | 0,1184 | … | 65,02 |
| … | … | … | … | … |
| 198 | 25,72 | 0,1312 | … | 62,22 |
| 199 | 25,75 | 0,1323 | … | 61,99 |
| 200 | 25,85 | 0,1343 | … | 62,10 |

**Таблица 3**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СЦЕНАРИЕВ[7]**

| Сценарий, № | 1-я рыночная переменная | 2-я рыночная переменная | … | 10-я рыночная переменная | Стоимость актива, млн. долл. | Изменение стоимости актива, млн. долл. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 26,42 | 0,1375 | … | 61,66 | 23,71 | 0,21 |
| 2 | 26,67 | 0,1346 | … | 62,21 | 23,12 | -0,38 |
| … | … | … | … | … | … | … |
| 199 | 25,88 | 0,1354 | … | 61,87 | 23,63 | -0,13 |
| 200 | 25,95 | 0,1363 | … | 62,21 | 22,87 | -0,63 |

Первая строка в табл. 3 показывает прогнозируемое значение рыночных переменных на день 201 (и изменения стоимости актива) в предположении, что темпы

[7] Стоимость актива на 200-й день составляет 23,50 млн. долл. США.

роста в день 201 (к дню 200), такие же как в день 1 (к дню 0). Например, $26,42 = 25,85 * \frac{20,78}{20,33}$, и т.д. (табл. 3).

**Таблица 4**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СЦЕНАРИЕВ С ОТСОРТИРОВАННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ (УБЫВАНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПО СТОЛБЦУ «ИЗМЕНЕНИЕ СТОИМОСТИ»)**

| Сценарий | 1-я рыночная переменная | 2-я рыночная переменная | … | 10-я рыночная переменная | Стоимость актива, млн. долл. | Изменение стоимости актива, млн. долл. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 26,42 | 0,1375 | … | 61,66 | 23,71 | 0,21 |
| … | … | … | … | … | … | … |
| 2 | 26,67 | 0,1346 | … | 62,21 | 23,12 | -0,38 |
| 200 | 25,95 | 0,1363 | … | 62,21 | 22,87 | -0,63 |

В условиях примера ***VaR*** равен второму числу (его абсолютной величине) с конца в столбце «изменение стоимости актива» табл. 4 (0,38 млн. долл. США).

В общем случае алгоритм реализации метода можно описать следующим образом:

- выявляются рыночные переменные / факторы (валютный курс, курс акций, процентные ставки и т.д.), влияющие на стоимость актива; пусть определено $n$ переменных;
- выбирается ретроспективный период времени, за который анализируются переменные ($T$ дней), пусть на текущий момент конец дня $t$;
- рассчитываются темпы роста для всех $n$ переменных для каждого из дней $s, t+1 = T \le s \le t$, т.е.

  $\frac{v_{i,s}}{v_{i,s-1}}$, $i=1,2...n$.
- для каждой переменной рассчитывается прогнозное значение $v_{i,t+1} = v_t \frac{v_{i,s}}{v_{i,s-1}}$, $(t+1 = T \le s \le t)$, таким образом формируется ($T - 1$) различных сценариев;
- производится переоценка всего актива на основе прогнозных значений переменных ($T - 1$ сценариев стоимости актива);
- вычисляются разности в прогнозных значениях стоимости актива и в текущей стоимости актива;
- полученные разности ранжируются по убыванию, от самого большого прироста до самого большого убытка;
- число, взятое с обратным знаком, соответствующее убытку для выбранного доверительного уровня представляет собой эмпирическую оценку ***VaR*** актива.

Ниже приведены модификации метода исторического моделирования, подробнее с ними можно ознакомиться в работках [68, 11, 12].

1. *Метод исторического моделирования с учетом весов наблюдений.* В простом методе исторического моделирования каждое наблюдение из скользящего окна глубиной $T$ дней рассматривается с равными весами. Д. Будук предположил, что более поздние наблюдения следует рассматривать с большими весами, так как они в большей степени отражают современные колебания и макроэкономические изменения [8].

Зафиксируем конец дня $t$. Веса, присвоенные к изменению стоимости актива между днем $t - s$ и днем $t - s + 1$, в $\lambda$ раз больше, чем веса между днем $t - s - 1$ и днем $t - s$. Для того чтобы веса увеличились на единицу, веса между днями $t - s$ и $t - s + 1$ должны равняться:

$$\frac{\lambda^{s-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^t}. \qquad (16)$$

При $\lambda \to 1$ этот метод сводится к методу исторического моделирования с равными весами.

2. *Метод Халла и Вайта* (Hull&White method). Д. Халл и А. Вайт предложили объединить усовершенствованные схемы волатильности (такие как ***EWMA*** и ***GARCH***) с методом исторического моделирования [11].

Предположим, что дневная волатильность определенной рыночной переменной оценивается в конце дня $s - 1$ и равна $\sigma_s$. Зафиксируем конец дня $t$, оценка волатильности рыночной переменной на следующий день $\sigma_{t+1}$.

По методу Халла и Вайта выражение для прогнозного значения рыночной переменной при сценарии s принимает вид:

$$\upsilon_{t+1} = \upsilon_t \frac{\upsilon_{s-1} + (\upsilon_s - \upsilon_{s-1})\sigma_{t+1} / \sigma_s}{\upsilon_{s-1}}. \qquad (17)$$

По сравнению с методом исторического моделирования с учетом весов наблюдений метод Халла и Вайта в большей степени учитывает современную информацию.

3. *Метод бутстрап.* Суть метода состоит в следующем. Сначала формируется набор изменений стоимости актива простым способом исторического моделирования. Далее производится выборка с возвращением[8] этих изменений, чтобы создать множество новых наборов.

***VaR*** вычисляется для каждого из новых наборов изменений стоимости актива. Рассматривается функция распределения полученных значений ***VaR***. 95% доверительный интервал[9] для ***VaR*** лежит в диапазоне между значениями ***VaR***, соответствующими 2,5% квантилю и 97,5% квантилю.

## Метод Монте-Карло

Метод статистического моделирования (метод Монте-Карло) основан на моделировании случайных процессов с заданными характеристиками. Данный метод заключается в моделировании возможных изменений стоимости актива. Ниже представлен общий алгоритм его реализации [1, 13]:

- выявляются основные рыночные факторы, влияющие на стоимость актива;
- генерируются изменения цен инструментов (псевдослучайным образом в соответствии с заданными параметрами распределения);

[8] Выборка проводится без возвращения, если каждый элемент генеральной совокупности входит в нее не более одного раза, и с возвращением в обратном случае.

[9] Означает, что с вероятностью 95% данный интервал накрывает значение оцениваемой величины ***VaR***.

- строится совместное распределение изменений рыночных факторов (на основе ретроспективных данных, каком-либо сценарии развития экономики и т.д.);
- моделируется большое число возможных сценариев развития ситуации;
- изменение стоимости актива рассчитывается для каждого результата моделирования;
- на основе полученных данных строится гистограмма и определяется значение ***VaR***.

## Метод экстремальных событий [12]

Оценки ***VaR***, полученные методом экстремальных событий, отражают всю форму хвостов распределения (а не только отдельную точку в хвосте распределения). Данный метод может использоваться для расчетов ***VaR*** при очень высоких заданных значениях доверительного уровня (например, 99,9%).

Пусть $F(x)$ функция распределения случайной величины $x$, а $u$ значение случайной величины $x$ на правом хвосте распределения:

$$P(u < x < u+\gamma | \gamma > 0) = F(u+\gamma) - F(u), \quad (18)$$

$$P(x > u) = 1 - F(u). \quad (19)$$

Определим $F_u(\gamma)$ как вероятность $P(u < x < u+\gamma | x > \gamma)$. Тогда:

$$F_u(y) = \frac{F(u+y)-F(u)}{1-F(u)}. \quad (20)$$

Для широкого класса распределений $F(x)$, $F_u(\gamma)$ сходится к обобщенному распределению Парето при возрастании пороговой величины $u$.

Функция распределения Парето имеет вид:

$$G_{\xi,\beta}(y) = 1 - \left(1 + \xi\frac{y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}. \quad (21)$$

Распределение имеет два параметра $\xi$ и $\beta$, которые оцениваются по исходным данным. $\xi$ – параметр формы и определяет поведение хвостов распределения, $\beta$ – параметр масштаба. Когда случайная величина имеет нормальное распределение, $\xi = 0$. Если происходит утяжеление хвостов, $\xi$ возрастает.

### *Оценка $\xi$ и $\beta$*

Параметры $\xi$ и $\beta$ можно оценить, используя метод максимального правдоподобия. Плотность функции распределения Парето:

$$g_{\xi,\beta}(y) = \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\xi y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}. \quad (22)$$

Сначала выбирается значение для $u$, например, близкое к точке 95% квантиля эмпирического распределения. Затем наблюдения случайной величины $x$ сортируются по убыванию и рассматриваются $x \geq u$. Предположим, что имеется $n_u$ наблюдений величин $x_i (1 \leq i \leq n_u)$. Тогда функция правдоподобия плотности распределения имеет вид:

$$\prod_{i=1}^{n_a} \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\xi(x_i - u)}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}. \quad (23)$$

Для удобства решения задачи оптимизации максимизируют логарифм функции правдоподобия:

$$\sum_{i=1}^{n_a} \ln\left[\frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\xi(x_i - u)}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}\right]. \quad (24)$$

Оценка хвостов распределения:

$$P(x > u + y | x > y) = 1 - G_{\xi,\beta}(y), \quad (25)$$

$$P(x > u) = 1 - F(u). \quad (26)$$

Следовательно:

$$P(x > u + y) = [1 - F(u)][1 - G_{\xi,\beta}]. \quad (27)$$

Если $n$ общее число наблюдений, $1 - F(u)$ оценивается из эмпирических сведений и равняется $\frac{n_u}{n}$. Следовательно:

$$P(x > u + y) = = \frac{n_u}{n}[1 - G_{\xi,\beta}(y)] = \frac{n_u}{n}\left(1 + \xi\frac{y}{\beta}\right)^{-1/\xi}. \quad (28)$$

Это означает, что оценка хвостов совместной функции распределения случайно величины $x$, при больших значениях $x$ равна:

$$F(x) = 1 - \frac{n_u}{n}\left(1 + \xi\frac{x-u}{\beta}\right)^{-1/\beta}. \quad (29)$$

Если установить $u = \frac{\beta}{\xi}$, тогда $F(x) = 1 - \frac{n_u}{n}(\frac{\beta}{\xi})^{-1/\xi}$. Таким образом, вероятность, что значение случайной величины больше, чем $x$ составляет $Kx^{-\alpha}$, где $K = \frac{n_u}{n}(\frac{\beta}{\xi})^{-1/\xi}$ и $\alpha = \frac{1}{\xi}$.

Если рассматриваются левые хвосты распределения, в описанной выше модели следует заменить $x$ на $-x$.

### *Вычисление VaR*

Чтобы вычислить ***VaR*** с уровнем доверия $q$, необходимо решить уравнение $F(VaR) = q$. Получаем:

$$q = 1 - \frac{n_u}{n}\left(1 + \xi\frac{VaR - u}{\beta}\right)^{-1/\xi}. \quad (30)$$

Таким образом:

$$VaR = u + \frac{\beta}{\xi}\left[\frac{n_u}{n}(1-q)^{-\xi} - 1\right]. \quad (31)$$

Ниже приведена общая сравнительная характеристика методов расчета ***VaR*** для оценки рыночного риска (табл. 5).

**Таблица 5**

**СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА VAR**

| Критерий | Метод | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Дельта-нормальный | Историческое моделирование | Монте-Карло | Экстремальных событий |
| Оценивание | Локальное | Полное | Полное | Локальное |
| Применимость к нелинейным инструментам | Возможно[10] | Да | Да | Да |
| Учет исторического распределения | Как оценка нормально распределения | Точно то, что было | Полностью | Как оценка распределения Парето для описания тяжелых хвостов |
| Учет предполагаемой волатильности | Возможен | Нет | Да | Возможен |
| Допущение о нормальном распределении доходностей | Да | Нет | Нет | Нет |
| Оценка экстремальных событий | Плохая | Плохая | Возможна | Хорошая |
| Модельный риск | Может быть значительным | Приемлемый | Высокий | Приемлемый |
| Объем требуемой истории данных | Средний | Очень большой | Малый | Средний |
| Вычислительная сложность | Невысокая | Средняя | Высокая | Средняя |
| Наглядность | Средняя | Большая | Малая | Средняя |

Дельта-нормальный метод допускает аналитическое представление ***VaR***, не требует обширного объема ретроспективных данных и является достаточно простым с точки зрения реализации. Главный недостаток данного метода заключается в предположении о нормальном распределении доходностей инструментов, влияющих на стоимость актива, которое, как правило, не соответствует параметрам реальных финансовых рынков.

В методе исторического моделирования отсутствует предположение о характере функции распределения, что позволяет учесть тяжелые хвосты функции распределения. К недостаткам можно отнести необходимость большого объема ретроспективных данных, а также то, что данный метод не может адекватно и своевременно учесть риски, связанные с резкими изменениями рыночной конъюнктуры, поскольку в рассматриваемом методе ***VaR*** рассчитывается только на основе исторических данных. Однако, разработаны и модификации метода, которые более быстро реагируют на рыночные изменения.

Метод Монте-Карло применим для оценки рыночных рисков нелинейных инструментов, позволяет рассматривать различные сценарии. Вместе с тем, для данного метода характерна высокая сложность моделей, что означает существование риска построения неадекватной модели.

Для метода экстремальных событий возможно представление ***VaR*** в аналитическом виде, модель учитывает тяжелые хвосты функции распределения.

## ВВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ VAR НА РЕТРОСПЕКТИВНЫХ ДАННЫХ

Для определения степени адекватности модели ***VaR*** реальным рыночным условиям выполняется верификация модели на ретроспективных данных (backtesting).

Процесс верификации включает в себя следующие этапы [3].

1. Расчет ***N*** значений ***VaR*** выбранным методом с заданными параметрами.
2. Оценка ***N*** фактических измерений стоимости актива $P_i$ во времени для каждого периода, для которого был выбран ***VaR***: $\Delta P_i = P_i - P_{i-1}$, ***i=1,2,…, N***.
3. Сравнение дневных значений $\boldsymbol{VaR_i}$ и соответствующих им фактических изменений стоимости актива $\Delta P_i$. Случай, когда выполняются условия: $\Delta P_i < 0, |\Delta P_i| > VaR_i$ считается случаем превышения.
4. Подчитывается частота случаев превышения.
5. Пусть существует вероятность, что модель для данного уровня доверия (например, 95%) неадекватна.
6. Выдвигается нулевая гипотеза о том, что вышеуказанная вероятность – правильная.
7. Вычисляется, для какой вероятности количество превышений будет таким, что нулевая гипотеза не отвергается при заданном количестве наблюдений.

По методике Базельского комитета процедура проверки точности модели представляет собой статистический тест на отклонение фактической частоты превышений дневной величины ***VaR*** от заданной вероятности 1%. Для оценки точности модели производится подсчет числа дней, когда фактические убытки от изменений стоимости портфеля превосходили прогнозные значения ***VaR*** за последние 250 торговых дней. При доверительном уровне 99% адекватная модель должна показывать в среднем 2,5 превышения величины ***VaR*** или менее.

Поскольку для каждого дня из интервала тестирования возможны только два исхода (убытки либо превышают прогнозную величину ***VaR***, либо нет), для расчета вероятностей ошибок первого и второго рода используется биномиальный критерий (схема Бернулли). Если обозначить через ***n*** общее количество дней в интервале тестирования, ***k*** – количество случаев превышения на интервале тестирования, ***p*** – вероятность любого отдельного

[10] Обычно применяется линейная модель, но существуют и квадратичные модели.

случая превышения, то вероятность того, что на всем интервале тестирования общее количество превышений (***X***) для адекватной модели будет равно в точности ***k***, составляет [6]:

$$P\left(X=k|n,p\right)=$$
$$=C_n^k p^k\left(1-p\right)^{n-k}=\frac{n!}{k!\left(n-k!\right)}p^k\left(1-p\right)^{n-k}. \quad (32)$$

Вероятность того, что в адекватной модели случится ***k*** или менее превышений:

$$P\left(X\le k|n,p\right)=\sum_{i=0}^{k}P\left(X=i\right). \quad (33)$$

Таким образом, вероятность того, что адекватная модель покажет ***k*** или более превышений на интервале тестирования и на основании этого будет отклонена:

$$P\left(X\ge k|n,p\right)=1-\sum_{i=1}^{k-1}P\left(X=i\right). \quad (34)$$

## ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА VAR ДЛЯ ПАЕВОГО ИНВЕСТИЦИОННОГО ФОНДА

В качестве иллюстрации применения моделей выполнены расчеты ***VaR*** для одного из паевых инвестиционных фондов (ПИФ), размещающего средства в акциях и облигациях ведущих российских компаний (при этом, следует отметить, что в рассматриваемом ПИФе доля облигаций составляет незначительную часть, а в некоторые периоды времени облигаций в составе нет вообще).

Использовались данные о цене ПИФа, а также рыночных переменных (индекса Российской торговой системы (РТС), индекса российских облигаций ***CBonds***, цен на нефть, обменного курса доллара, средневзвешенной ставки по межбанковским кредитам) на каждый день в период 1999-2006 гг.

Расчеты представлены для следующих моделей ***VaR***:

1. Модель без учета рыночных факторов риска:
   - □ дельта-нормальный метод (модель с выборочной дисперсией, модель ***EWMA***);
   - □ метод исторического моделирования (простой метод исторического моделирования, метод Халла и Вайта, метод бутстрап);
2. Модель с учетом рыночных факторов риска:
   - дельта-нормальный метод;
   - метод исторического моделирования.

Расчеты выполнены с помощью эконометрического пакета Mathematica. ***VaR*** рассчитывается для временного горизонта один день и доверительных уровней 95% и 99%.

### Модель без учета рыночных факторов риска

#### *Дельта-нормальный метод*

Для вычисления каждого значения $VaR_{t+1}$ для каждого дня $(t+1)$ в 1999-2006 гг. используется скользящее окно наблюдений ***T***, равное 90 торговым дням – ретроспективные данные за предшествующие 90 дней. В качестве переменных состояния для ПИФа вычислены логарифмические доходности:

$$r_s=ln\frac{\rho_s}{\rho_{s-1}},$$

где $\rho_s$ – цена ПИФа в момент времени ***s***, $t+1-T\le s\le t$.

#### *Модель с выборочной дисперсией*

В данной модели $VaR_{\gamma,t+1}=m_{t+1}+k_{1-\gamma}\sigma_{t+1}=k_{1-\gamma}\sigma_{t+1}$ (для дневных доходностей является допустимым предположение равенства математического ожидания нулю), где: $k_{1-\gamma}$ – квантиль порядка $1-\gamma$ для стандартного нормального распределения; $\sigma_{t+1}^2=\frac{1}{T-1}\sum_{s=t+1-T}^{t}r_s^2=\frac{1}{89}\sum_{s=t-89}^{t}r_s^2$ (рис. 2).


**Рис. 2. Расчет *VaR* для ПИФа, дельта-нормальный метод, модель с выборочной дисперсией**

#### *Модель EWMA*

В данной модели:

$$\sigma_{t+1}^2=\frac{1-\lambda}{1-\lambda^T}\sum_{s=t+1-T}^{t}\lambda^{t-s}r_s^2,$$

где $0<\lambda<1$.

Модель ***EWMA*** приписывает более поздним наблюдениям больший вклад в ковариацию. Поэтому график ***VaR*** в этой модели является заметно менее гладким, чем в модели с выборочной дисперсией.

Также отметим, что для оценки коэффициента $\lambda$ рассматривалось два подхода (рис. 3):

- принят $\lambda=0,94$ в соответствии с системой ***RiskMetrics***[TM];
- получен $\lambda^*=0,923$ методом нахождения минимума среднеквадратичной ошибки дисперсии.

### Метод исторического моделирования

#### *Простой метод исторического моделирования*

В данном методе использовалось скользящее окно наблюдений ***T***, равное 300 торговым дням (выборка в 300 измерений это практически минимальный объем информации, необходимый для нахождения 1% квантиля эмпирического распределения). С помощью стандартной функции пакета Mathematica Quantile [list, $\gamma$] определялся квантиль эмпирической функции распределения данных из окна наблюдений (рис. 3, 4).


**Рис. 3. Расчет VaR для ПИФа, дельта-нормальный метод, модель *EWMA***

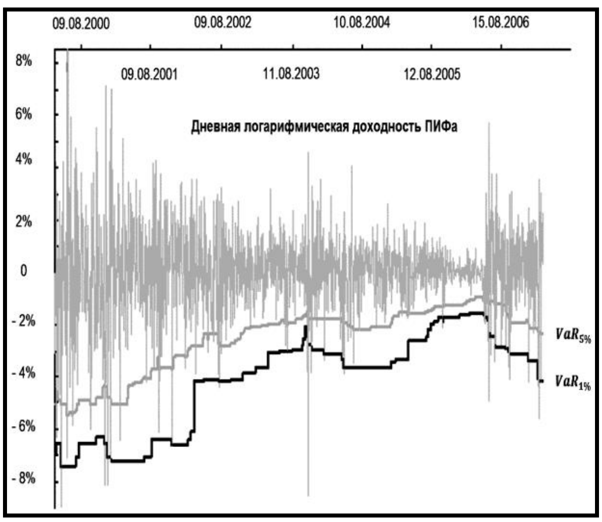


**Рис. 4. Расчет *VaR* для ПИФа, простой метод исторического моделирования**

### *Метод Халла и Вайта*

В данном методе на основе ретроспективных данных за 300 предшествующих дней на момент времени $t+1$ строилось распределение величины $\frac{\sigma_{t+1}}{\sigma_{t+1-s}} r_{t+1-s}$, $s \in [t-299, t]$ и определялись 1% и 5% квантили распределения. Оценка дисперсии выполнена на основе модели ***EWMA***, (принят $\lambda = 0,94$ ).

### *Метод бутстрап*

На каждую дату использовались ретроспективные данные о доходностях ПИФа за предшествующие 300 дней. Выборкой с возвращением для каждой даты сформированы 1000 наборов по 300 элементов в каждом. Для каждого нового набора вычисляется значение ***VaR*** (рис. 5).

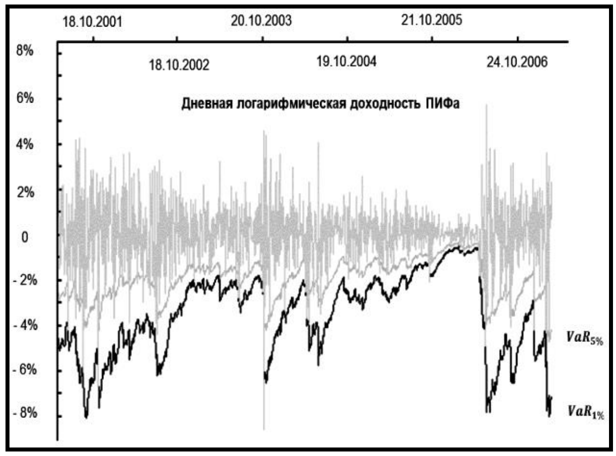


**Рис. 5. Расчет *VaR* для ПИФа, метод исторического моделирования, метод Халла и Вайта**

Таким образом, для каждой даты получено распределение значений ***VaR***. Определяются 2,5% и 97,5% квантили как границы 95% доверительного интервала, что означает, что с вероятностью 95% данный интервал накрывает значение оцениваемой величины ***VaR***. Также найдено среднее значение, которое принимается за саму величину ***VaR*** (рис. 6).

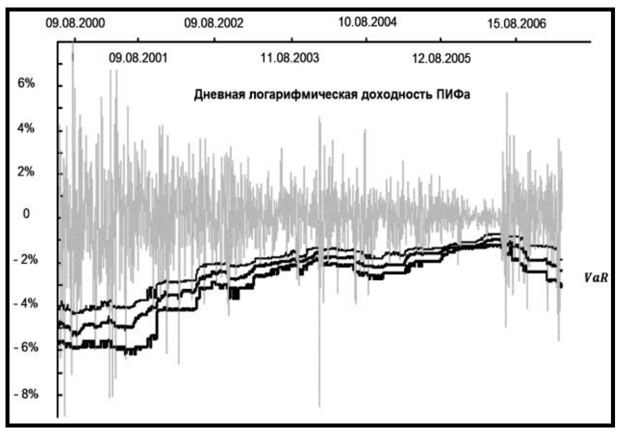


**Рис. 6. Расчет *VaR* для ПИФа, метод исторического моделирования, метод бутстрап**

На рис. 6 наблюдаются характерные ступеньки на графике ***VaR*** и доверительного интервала. Они могут быть связаны либо с попаданием в скользящее окно наблюдений точки с большим падением стоимости ПИФа (тогда это ступенька вниз), либо с выходом таких точек из скользящего окна наблюдений, по мере того, как оно сдвигается вправо (ступеньки вверх).

### *Верификация моделей*

Для рассматриваемых моделей подсчитано количество случаев превышений $k$ – количество торговых дней, когда доходность ПИФа (с учетом знака) оказывалась меньше прогнозируемой величины ***VaR***. Далее по функции биномиального распределения рассчитано теоретическое количество случаев превышения на интервале тестирования, а также вероятность того, что адекватная модель покажет $k$ и более превышений на интервале тестирования (табл. 6).

**Таблица 6**

**РЕЗУЛЬТАТЫ ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ**

| Модель | Количество превышений, к | | $P(x \ge k)$ |
|---|---|---|---|
| | по модели | теор. величина | |
| **Дельта-нормальные метод, доверительный уровень 95%** | | | |
| Модель с выборочной дисперсией | 99 | 97,95 | 0,430 |
| Модель ***EWMA*** | 96 | 97,95 | 0,554 |
| Модель ***EWMA***, $\lambda^* = 0{,}923$ | 99 | 97,95 | 0,430 |
| **Метод исторического моделирования, доверительный уровень 95%** | | | |
| Простой метод исторического моделирования | 82 | 87,45 | 0,702 |
| Метод Халла и Вайта | 70 | 72,45 | 0,586 |
| **Дельта-нормальные метод, доверительный уровень 99%** | | | |
| Модель с выборочной дисперсией | 36 | 19,95 | 0,000268 |
| Модель ***EWMA***, $\lambda = 0{,}94$ | 35 | 19,59 | 0,000525 |
| Модель ***EWMA***, $\lambda^* = 0{,}923$ | 36 | 19,59 | 0,000268 |
| **Метод исторического моделирования, доверительный уровень 99%** | | | |
| Простой метод исторического моделирования | 28 | 17,49 | 0,00692 |
| Метод Халла и Вайта | 13 | 14,49 | 0,587 |

Верификация модели в простом методе исторического моделирования показала хороший результат при доверительном уровне 95%, а при доверительном уровне 99% модель необходимо отклонить. Такой результат может быть связан с недостаточностью выборки в 300 торговых дней для точной оценки ***VaR*** с доверительным уровнем 99%.

В дельта-нормальный методе также удовлетворительных результаты наблюдаются только при доверительном уроне 95%. При доверительном уровне 99% фактическое количество превышений почти в два раза превышает теоретическое значение. Это может быть связано, например, с тем, что реальное распределение доходностей ПИФа отличается от гауссовского и имеет более тяжелые хвосты. Также к полученным результатам (в том числе в методе исторического моделирования) может приводить существование временных интервалов с существенно различающейся волатильностью доходности ПИФа, которые хорошо видны на рисунках. Последнее в свою очередь, например, может объясняться изменением стратегии управления фондом.

Модель Халла и Вайта показала отличные результаты как при доверительном уровне 95%, так и при 99%. Эта модель принимает во внимание изменение волатильности доходности во времени.

## Модель с учетом рыночных факторов риска

В качестве рыночных факторов рассматривались: индекс РТС, индекс российских облигаций CBonds, цены на нефть, обменный курса доллара, средневзвешенная ставка по межбанковским кредитам.

В качестве переменных состояния данных показателей также вычислены логарифмические доходности:

$$r_s = ln\frac{p_s}{p_{s-1}},$$

где $p_s$ – цена / значение в момент времени $s$, $t+1-T \le s \le t$.

Выполнена прогонка регрессии (линейной зависимости между логарифмической доходностью ПИФа и логарифмическими доходностями рыночных факторов) по всему временному интервалу, для которого доступны значения этих переменных. Этот промежуток уже, чем период существования ПИФа (рис. 7).

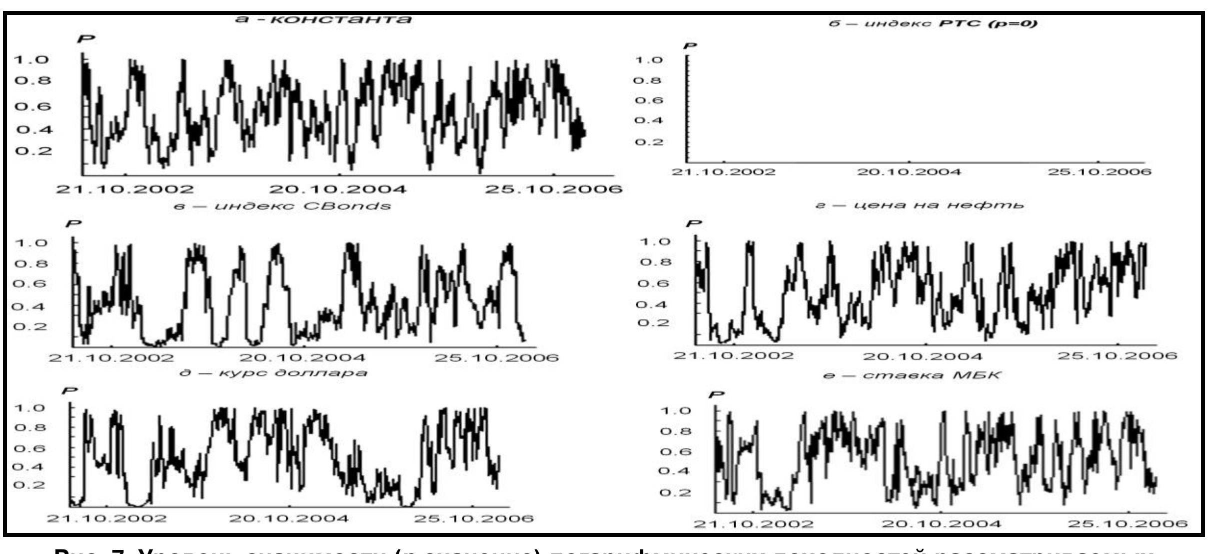


**Рис. 7. Уровень значимости (*p*-значение) логарифмических доходностей рассматриваемых рыночных факторов**

Как видно из рисунков, значимым является только коэффициент перед доходностью индекса РТС (***p***-статистика меньше 0,05). Тем не менее, для расчета ***VaR*** отставлены все рассмотренные факторы, так как по мере движения окна слева направо некоторые из переменных становятся значимыми в определенные моменты времени.

### *Дельта-нормальный метод*

Как и ранее, использовалось скользящее окно наблюдений ***T***, равное 90 торговым дням. Внутри скользящего окна наблюдений производилась оценка чувствительности доходности ПИФа к рыночным факторам и оценка ковариационной матрицы. Пересчет коэффициентов матрицы осуществлялся каждый день (рис. 8).

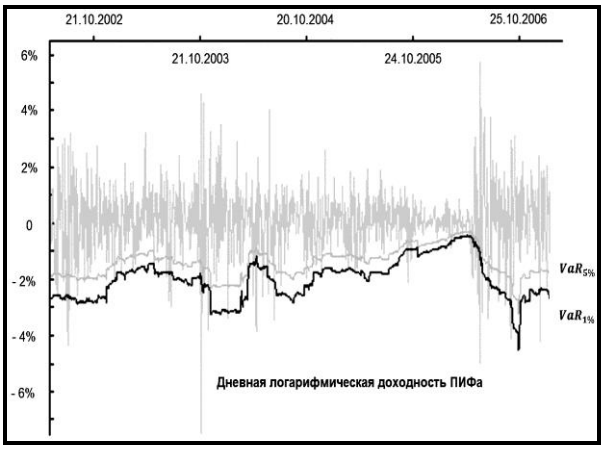


**Рис. 8. Расчет *VaR* для ПИФа, дельта-нормальный метод с рыночными факторами риска**

### *Метод исторического моделирования*

Использовалось скользящее окно наблюдений ***T***, равное 300 торговым дням. Внутри скользящего окна наблюдений производилась оценка чувствительности доходности ПИФа к рыночным факторам. Для каждой точки определялся временной ряд доходностей ПИФа с фиксированной структурой за предшествующие 300 торговых дней (рис. 9).

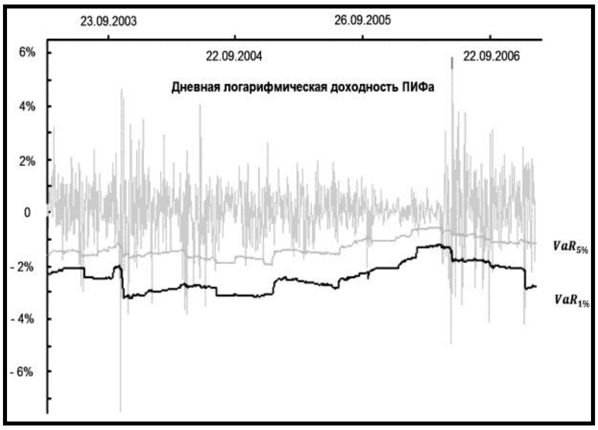


**Рис. 9. Расчет *VaR* для ПИФа, метод исторического моделирования с рыночными факторами риска**

### *Верификация моделей*

Результаты верификации моделей с учетом рыночных факторов представлены ниже (табл. 7). И для доверительного уровня 95% и для 99% обе модели необходимо отклонить. Проблема заключается в том, что ПИФ состоящий из десятков инструментов, невозможно точно смоделировать только пятью факторами (в регрессиях показатель $R^2$ не превышал 0,5-0,6).

**Таблица 2**

**РЕЗУЛЬТАТЫ ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ**

| Модель | Количество превышений, *к* | | $P(x \geq k)$ |
|---|---|---|---|
| | По модели | Теоретическая величина | |
| **Доверительный уровень 95%** | | | |
| Дельта-нормальный метод | 101 | 58,5 | $6,96 * 10^{-8}$ |
| Метод исторического моделирования | 83 | 48 | $7,89 * 10^{-7}$ |
| **Доверительный уровень 99%** | | | |
| Дельта-нормальный метод | 94 | 11,7 | 0 |
| Метод исторического моделирования | 74 | 9,6 | $2,61 * 10^{-8}$ |

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен сравнительный анализ различных методов ***VaR*** (дельта-нормальный метод, метод исторического моделирования, метод Монте-Карло, метод экстремальных событий) для оценки рыночных рисков. Исходя из теоретических подходов к оценке ***VaR,*** можно заключить следующее:

- дельта-нормальный метод относительно прост с точки зрения реализации, допускает аналитическое представление ***VaR***, не требует обширного объема ретроспективных данных. Основной недостаток – предположение о нормальном распределении, которое часто не соответствует параметрам реальных финансовых рынков;
- метод исторического моделирования основывается на построении эмпирической функции распределения, что позволяет учесть тяжелые хвосты распределения, при этом для расчетов требуется большой объем ретроспективных данных;
- метод Монте-Карло возможно применять для оценки рыночных рисков нелинейных инструментов, метод позволяет рассматривать различные сценарии, требует тщательной проработки модели;
- метод экстремальных событий допускает представление ***VaR*** в аналитическом виде, учитывает тяжелые хвосты функции распределения.

Практические расчеты ***VaR*** выполнены для дельта-нормального метода (модель с выборочной дисперсией, модель ***EWMA***) и метода исторического моделирования (простой метод исторического моделирования, метод Халла и Вайта, метод бутстрап) на основе данных одного из паевых инвестиционных фондов, размещающих средства в акциях и облигациях ведущих российский компаний. ***VaR*** определялся для временного горизонта в один день и доверительных уровней 95% и 99%.

Проведена верификация полученных результатов – при этом наилучшие показал «гибридный» метод Халла и Вайта (тест пройден как при доверительном уровне 95%, так и при 99%). Этот метод принимает во внимание изменение волатильности доходности во времени. В остальных методах удовлетворительные результаты наблюдались только при доверительном уровне 95%.

## Литература


1. Баранова О.В. Применение методологии VaR на нефтяном рынке [Текст] / О.В. Баранова // Труды ИСА РАН. – 2006. – Т. 24.
2. Виленский П.Л. и др. Оценка эффективности инвестиционных проектов [Текст] / П.Л. Виленский, В.Н. Лившиц, С.А. Смоляк. – 4-е изд. – М. : Дело, 2008.
3. Лобанова А.А. Энциклопедия финансового риск-менеджмента [Текст] / А.А. Лобанова, А.В. Чугунова. – М. : Альпина Бизнес Букс, 2005.
4. Меньшиков И.С. Рыночные риски: модели и методы [Текст] : науч. изд. / И.С. Меньшиков, Д.А. Шелагин. – М. : Вычислительный центр РАН, 2000.
5. Науменко В.В. Моделирование риска рыночной ликвидности с учетом глубины рынка [Текст] / В.В. Науменко. – М. : ГУ ВШЭ, 2007.
6. Фаррахов И.Т. Оценка показателя VaR и стресс-тестирование банковских портфелей [Текст] / И.Т. Фарахов // Банки и технологии. – 2005. – №2.
7. Artzner P. et al. Coherent measures of risk [Text] / P. Artzner, F. Delbarn, J.-M. Eber, D. Health // Mathematical finance. – 1999. – No. 9.
8. Boudoukh J. et al. The best of both worlds: a hybrid approach to calculating value at risk [Text] / Boudoukh J., Richardson M. Whitelaw R.
9. Glyn A. Holton histoty of value at risk [Text] : 1922-1998. – Boston : Working Paper, 2002.
10. Glyn A. Holton value-at-risk theory and practice [Electronic resource]: e-book. http://value-at-risk.net
11. Hull J. Incorporating volatility updeting into the historical simulation method for value-at-risk [Text] / J. Hull , A. White // Journal of risk. – 1998. – No. 1.
12. Jobn C. Hull risk management and financial institutions [Text] / C. Jobn. – Upper Saddle River, 2007.
13. Łupiński M. Comparison of alternative approaches to VaR evaluation [Text] / Marcin Łupiński // Ekonomia nr. – 2013. – No. 3.



## Ключевые слова

Рыночные риски; резерв капитала; стоимость актива; убытки; квантиль; value at risk; доверительный уровень; временной горизонт; функция распределения; факторы риска.


*Дробыш Инна Ивановна*

## РЕЦЕНЗИЯ

Одной из важнейших проблем, связанных с деятельностью институциональных инвесторов, является оценка и управление рыночными рисками, а также совершенствование соответствующих подходов. Представленная автором статья посвящена исследованию и сравнению моделей value at risk (***VaR***) в оценке рыночных рисков.

Методические положения, содержащиеся в статье, основываются на исследованиях ведущих зарубежных и отечественных ученых. Рассмотрены методы ***VaR***: дельта-нормальный метод, метод исторического моделирования и его модификации, метод Монте-Карло, метод экстремальных событий. На основе данных одного из паевых инвестиционных фондов, размещающих средства в акциях и облигациях ведущих российский компаний, автором выполнены расчеты ***VaR*** дельта-нормальным методом (модель с выборочной дисперсией, модель ***EWMA***) и методом исторического моделирования (простой метод исторического моделирования, метод Халла и Вайта, метод бутстрап), проведена верификация полученных результатов.

В статье приведены результаты теоретико-практической апробации, сделаны четкие выводы, результирующие работу. Наилучшие результаты показал гибридный метод Халла и Вайта, объединяющий усовершенствованные схемы волатильности с методом исторического моделирования. Данный метод принимает во внимание изменение волатильности доходности во времени.

Рекомендую данную статью для публикации в журнале «Аудит и финансовый анализ» в качестве научно-практического материала для руководителей и менеджеров инвестиционных компаний, банков, страховых компаний, нефинансовых корпораций с целью применения методологии ***VaR*** в управлении рыночными рисками.

*Лившиц В.Н., д.э.н., профессор, заведующий лабораторией анализа эффективности инвестиционных проектов Центрального экономико-математического института Российской Академии наук*