9.4. ОЦЕНКА СТОИМОСТИ КРЕДИТОВАНИЯ ВЕНЧУРНЫХ ПРОЕКТОВ С УЧЕТОМ ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ДЕФОЛТА

Светлов К.В., аспирант, кафедра экономической кибернетики

Санкт-Петербургский государственный университет

В статье рассматривается вопрос о стоимости кредитования венчурных проектов. На основе результатов теории ценообразования опционов выводится формула для определения ставки кредитования.

ВВЕДЕНИЕ

Вложение средств в новые идеи и проекты – это абсолютно естественный процесс для развитой экономики. С подобным видом вложений тесно связано понятие венчурного капитала и венчурных инвестиций. Под венчурным капиталом обычно понимают капитал, предназначенный для финансирования молодых, перспективных компаний, инвестирование в которые с одной стороны способно обеспечить высокую доходность, но с другой стороны – сопряжено с высоким уровнем риска.

Основная роль венчурного капитала заключается в обеспечении дополнительного финансирования посредством внешних источников. Значение этой роли трудно недооценить, поскольку использование только собственного капитала существенно ограничивает возможности по развитию будущего проекта, кроме того, недостаточное финансирование является одной из причин гибели молодых компаний. В большинстве моделей, описывающих инвестиции, делается некоторое предположение о том, каким образом описывается динамика дохода от инвестирования или же о том, каким образом меняется стоимость проекта. Так, например, в модели непрерывной стоимости капитала, предложенной Дж. Макдональдом и С. Сигелом в 1986 г. [4], предполагается, что стоимость проекта x_t, в который инвестор намеревается вложить собственные средства меняется в соответствии со стохастическим дифференциальным уравнение:

$$dx_t = \alpha x_t dt + \sigma x_t dW_t. \qquad (1)$$

Начальная стоимость x_0 при этом полагается известной. Данный подход означает, что стоимость проекта должна иметь логнормальное распределение и ее будущие значения являются априори неизвестными. Использование такого подхода имеет несомненные преимущества, заключающиеся в возможности получить простое соотношение для периода инвестирования, который позволил бы максимизировать настоящую стоимость будущего дохода от проекта. Еще одним подходом [3] к динамике стоимости капитала является предположение о том, что она должна удовлетворять так называемому средневозвратному (mean-reverting) уравнению:

$$dx_t = \eta(\bar{x} - x_t)dt + \sigma x_t dW_t. \qquad (2)$$

Смысл такого подхода заключается в следующем: считается, что существует некоторое среднее значение $\bar{x}$ для стоимости капитала проекта, вокруг которого происходят флуктуации ее реальной стоимости. Если в некоторый момент времени $x_t > \bar{x}$, то множитель перед dt становится отрицательным и изменение стоимости будет связано ее снижением. Если же $x_t < \bar{x}$, то стоимость проекта должна будет увеличиваться. Величина η описывает скорость соответствующей корректировки: чем больше ее значение, тем быстрее цена будет возвращаться к своему среднему значению, несмотря на воздействие случайных факторов.

Научная новизна представленной статьи заключается в разработке модели зависимости ставок кредитования от ряда факторов, таких как: срок кредитования, степень рискованности проекта и доля собственных средств заемщика, вложенных в проект. Дополнительно вводится параметр предельного уровня капитала L венчурной компании, достижение которого означает банкротство заемщика и переход права собственности на компанию к кредитору. Полученные результаты имеют как практическое, так и теоретическое значение и позволяют количественно подтвердить вывод, о том что при увеличении значения границы L ставка кредитования снижается. Данное обстоятельство связано с тем, что увеличение уровня L приводит к увеличению вероятности достижения этой границы, а следовательно и к увеличению вероятности перехода компании в собственность кредитора.

Постановка задачи

Рассмотрим венчурную компанию, желающую получить кредит в размере I у.е. на промежуток времени T с целью развития собственного бизнеса. Предположим, что ее капитал, равный x_t на момент времени t, $t \in [0,T]$, описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dx_t = cx_t dt + \sigma x_t dW_t,\ x_0 = I + V_0, \qquad (3)$$

где V_0 – величина собственных средств заемщика, которыми он располагает на момент получения кредита;

c – коэффициент сноса;

$\sigma > 0$ – коэффициент волатильности. Эти три величины – фиксированные параметры;

W_t – стандартный винеровский процесс.

Таким образом, предполагается, что начальный капитал компании x_0 будет состоять из собственных средств заемщика и привлеченных заемных средств. Также предполагается, что на всем промежутке времени $[0,T]$ у кредитора имеется возможность занимать и размещать собственные средства по фиксированной безрисковой процентной ставке r.

С учетом специфики бизнеса, а также характеристик выдаваемого кредита устанавливаются следующие условия возврата выданных денежных средств.

1. Если величина капитала фирмы x_T, в терминальный момент времени T превышает величину полученного кредита I плюс некоторую премию δ, то кредитор получает в $I + \delta$, а собственникам компании достаются оставшиеся после выплаты средства величиной $x_T - (I + \delta)$.
2. Если же капитала x_T на момент T возврата кредита недостаточно для того, чтобы расплатиться с кредитором, то бизнес полностью переходит в собственность кредитора. Иными словами, в денежном выражении кредитор получает x_T у.е., а заемщик не получает ничего.

Данные условия выплат удобно записать в виде следующей табл. 1.

Таблица 1

УСЛОВИЯ ВЫПЛАТ ПРОЕКТА

Наименование	Результат	
	$x_T \geq I+\delta$	$x_T < I+\delta$
Выплата кредитору	$I+\delta$	x_T
Остаток у компании	$x_T-(I+\delta)$	0

Соответственно ставится задача об определении величины премии δ и рассчитываемой на ее основе процентной ставки k :

$$k=\frac{\delta}{I}*\frac{1}{T}*100\%, \tag{4}$$

соответствующей доходности, которую будет иметь кредитор при участии в изложенном проекте, при условии, что заемщику удастся выполнить свои обязательства.

В изложенной постановке задача решена в работе [1]. Основная идея предлагаемого там подхода состоит в том, что с позиции кредитора, приведенная схема кредитования может быть рассмотрена как приобретение некоторого финансового инструмента по цене I с выплатой $\chi=\varphi(x_T)$, зависящей от величины капитала компании x_T на момент возврата кредита. Функция $\varphi(x)$ называется платежной функцией и задается как:

$$\varphi(x)=\begin{cases} I+\delta, x\geq I+\delta \\ x, x<I+\delta. \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим стоимость данного инструмента на момент времени t как $F(t,x_t)$. Очевидно, что величина этой стоимости должна зависеть не только от момента времени t, но и от величины капитала компании x_t, поскольку доход, который может принести этот инструмент, также определяется капиталом компании. Тогда с учетом приведенной функции выплат имеет место следующее граничное условие:

$$F(T,x_T)=\varphi(x_T). \tag{6}$$

Таким образом, исходную задачу определения кредитной премии δ можно свести к отысканию формулы для стоимости $F(t,x_t)$ этого абстрактного финансового инструмента с функцией выплат (5) и решению уравнения:

$$F(0,x_0)=I$$

относительной неизвестной величины δ. Данное тождество справедливо, поскольку приобретение данного инструмента для кредитора соответствует выдаче денежных средств заемщику по договору кредитования. В статье [1] приводится выражение для функции $F(t,x)$:

$$\begin{aligned} F(t,x)&=x\Phi(-z_{t,x,\delta})+\\ &+(I+\delta)e^{-r(T-t)}\Phi(z_{t,x,\delta}-\sigma\sqrt{T-t}), \end{aligned} \tag{7}$$

где $z_{t,x,\delta}=\dfrac{\ln\dfrac{x}{I+\delta}+(r+\dfrac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

и

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-0.5s^2}ds.$$

В итоге авторы приходят к трансцендентному уравнению для величины процентов δ:

$$\begin{aligned} I&=(I+V_0)\Phi(-z_{0,I+V_0,\delta})+\\ &+(I+\delta)e^{-rT}\Phi(z_{0,I+V_0,\delta}-\sigma\sqrt{T}). \end{aligned} \tag{8}$$

Пользуясь найденным значением δ, можно вычислить ставку процента k по формуле (4), по которой инвестор может предоставить кредит при сформулированных выше условиях взаимодействия между ним и заемщиком.

Далее заметим, что поскольку для функции Φ справедливо равенство $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$, то (8) можно переписать как:

$$I=(I+V_0)-C_T(I+V_0,I+\delta),$$

где $C_T(I+V_0,I+\delta)=(I+V_0)\Phi(z_{0,I+V_0,\delta})-$

$-(I+\delta)e^{-rT}\Phi(z_{0,I+V_0,\delta}-\sigma\sqrt{T})$

обозначает стоимость европейского call-опциона с периодом исполнения T ;

$I+V_0$ – спот-цена актива;

$I+\delta$ – цена исполнения.

Таким образом, в качестве уравнения для определения величины банковской премии δ можно решать уравнение:

$$C_T(I+V_0,I+\delta)=V_0. \tag{9}$$

Представленная статья посвящена обобщению изложенного подхода на случай возможного дефолта венчурной компании в промежутке времени $[0,T]$. Под дефолтом в данном случае будем понимать факт снижения величины капитала x_t до некоторого уровня L в случайный момент времени $\tau(L)=\inf\{t: x_t\leq L\}$. При наступлении указанного события в промежутке времени $[0,T]$ будем считать, что права собственности на компанию переходят к кредитору. Заметим, что параметр L является определяется содержанием кредитного договора и определяется в ходе переговоров между кредитором и заемщиком.

Основной результат

Рассмотрим кредитование по указанной выше схеме с позиции заемщика. Как и для кредитора, для заемщика данную ситуацию можно представить в виде приобретения некоторого опциона, о чем нам говорит соотношение (9). А именно: на начальный момент времени $t=0$ величина собственных средств заемщика в венчурном капитале компании равняется V_0, с другой стороны в момент времени $t=T$, заемщику после выплаты кредита и процентов по нему остается величина $x_T - \varphi(x_T)$. Таким образом, кредитование в данном случае может рассматриваться как приобретение заемщиком европейского опциона по цене V_0 с функцией выплат $\psi(x) = x - \varphi(x)$. Заметим, что функция $\psi(x)$ может быть записана как:

$$\psi(x) = \begin{cases} x - (I + \delta), x \geq I + \delta \\ 0, x < I + \delta. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, данный опцион является европейским call-опционом со сроком до исполнения T, спот-ценой актива $I + V_0$ и ценой исполнения $I + \delta$. Особенность рассматриваемого в данной статье подхода состоит в рассмотрении некоторого предельного уровня L для величины капитала венчурной компании. При ситуации, когда траектория x_t не пересекает границу L, выплата заемщику, как и ранее, осуществляется в соответствии с (10). Если же величина капитала венчурной компании достигает границы L, собственность на данную компанию переходит к кредитору и к моменту времени T заемщик уже не получает ничего. При этом мы будем полагать, что $L \leq I$. Описываемые условия соответствуют ситуации, когда инвестор контролирует ход реализации проекта, для которого им были выделены средства. При достижении некоторой нижней границы стоимости капитала венчурной компании, право собственности на компанию переходит к кредитору.

Выплату заемщику в конце срока кредитования обозначим как ξ:

$$\xi = \begin{cases} \psi(x_T), x_t > L \text{ для всех } t \in [0,T] \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (11)$$

Найдем функцию $F_\xi(t,x)$ стоимости данного опциона, для чего заметим, что условия выплат по нему тесно связаны с так называемыми барьерными опционами: опцион с выплатой ξ в момент времени $t = T$ называется «даун-энд-аут» версией европейского опциона с функцией выплат $\psi(x)$. Название данного опциона отражают суть его условий: опцион утрачивает свою силу, если капитал фирмы достигает барьера L. Воспользуемся следующим результатом [2]:

Теорема. Рассмотрим платежное обязательство ξ. Цена F_ξ «даун-энд-аут» контракта при $x > L$ задается соотношением:

$$F_\xi(t,x) = G(t,x) - \left(\frac{L}{x}\right)^{\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}} G\left(t, \frac{L^2}{x}\right),$$

где $G(t,x)$ – функция стоимости европейского опциона с функцией выплат.

$$\psi_L(x) = \begin{cases} \psi(x), x > L \\ 0, x \leq L. \end{cases}$$

Для рассматриваемого нами случая заметим, что поскольку по условию $L < I$, функция $\psi_L(x)$ из теоремы 1 совпадает с функцией $\psi(x)$. Следовательно, функция $G(t,x)$ является стоимостью стандартного европейского call-опциона. Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} F_\xi(t,x) &= x\Phi(z_{t,x,\delta}) - \\ &-(I+\delta)e^{-r(T-t)}\Phi(z_{t,x,\delta} - \sigma\sqrt{T-t}) - \\ &-\left(\frac{L}{x}\right)^{\frac{2r-\sigma^2}{\sigma^2}} \left(\frac{L^2}{x}\Phi(z_{t,\frac{L^2}{x},\delta}) - \right. \\ &\left. -(I+\delta)e^{-r(T-t)}\Phi(z_{t,\frac{L^2}{x},\delta} - \sigma\sqrt{T-t})\right), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-0.5s^2} ds$;

$$z_{t,x,\delta} = \frac{\ln\frac{x}{I+\delta}}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Аналогично уравнению (9), для нахождения величины начисленных процентов δ требуется решить следующее трансцендентное уравнение:

$$V_0 = F_\xi(0, I + V_0). \quad (13)$$

После того как значение δ найдено, ставка по договору рассчитывается при помощи (4). Отметим, что в случае, когда граница L полагается равной 0 уравнение (13) совпадает с уравнением (9) и ставка кредитования k совпадает со ставкой, рассчитанной согласно подходу, изложенному в [1].

Численный пример. Проанализируем, как различное сочетание входных параметров влияет на величину процентной ставки, по которой заемщик будет иметь возможность получить капитал на развитие компании. Для этого в качестве условного примера использования представленной модели рассмотрим ситуацию, характеризующуюся следующим набором параметров.

1. Величина кредита $I = 50$ млн. руб.
2. Размер собственных средств фирмы-заемщика $25 \leq V_0 \leq 50$ млн. руб.
3. Волатильность проекта ($0,25 \leq \sigma \leq 0,5$).
4. Срок кредитования $T = 2$.
5. Безрисковая ставка 7% годовых (ее непрерывно начисляемый эквивалент $6,55\%$).

Результаты вычисления ставки кредитования при различных выборах границы L приведены в следующих табл. 2-4.

Таблица 2

СТАВКА КРЕДИТОВАНИЯ, L = 0

Ставка кредитования, % годовых, $L = 0$						
σ / V_0	25	30	35	40	45	50
0,25	8,86	8,24	7,84	7,58	7,40	7,28
0,30	10,53	9,54	8,86	8,38	8,04	7,78
0,35	12,79	11,37	10,36	9,62	9,07	8,65
0,40	15,65	13,74	12,35	11,32	10,52	9,90
0,45	19,16	16,69	14,88	13,50	12,43	11,57
0,50	23,38	20,27	17,97	16,20	14,81	13,70

Таблица 3

СТАВКА КРЕДИТОВАНИЯ, *L* = 25 МЛН. РУБ.

Ставка кредитования, % годовых, $L = 25$ млн. руб.						
σ / V_0	25	30	35	40	45	50
0,25	8,86	8,24	7,84	7,58	7,40	7,28
0,30	10,53	9,54	8,86	8,38	8,04	7,78
0,35	12,79	11,37	10,36	9,62	9,07	8,65
0,40	15,64	13,74	12,35	11,32	10,52	9,90
0,45	19,15	16,68	14,87	13,49	12,42	11,57
0,50	23,34	20,25	17,95	16,19	14,80	13,69

Таблица 4

СТАВКА КРЕДИТОВАНИЯ, *L* = 50 млн. руб.

Ставка кредитования, % годовых, $L = 50$ млн. руб.						
σ / V_0	25	30	35	40	45	50
0,25	8,13	7,81	7,58	7,42	7,30	7,21
0,30	8,77	8,37	8,07	7,83	7,65	7,51
0,35	9,43	8,97	8,61	8,33	8,09	7,91
0,40	10,08	9,59	9,19	8,86	8,59	8,36
0,45	10,73	10,21	9,78	9,42	9,12	8,86
0,50	11,38	10,84	10,39	10,00	9,67	9,39

Обратимся к варианту, соответствующему величине собственных средств заемщика $V_0 = 35$ млн. руб. и волатильности капитала венчурной компании $\sigma = 0,40$. В данном случае ставка, определенная в соответствии с изложенным методом, равняется 12,35 % годовых. В случае если через два года заемщик будет не в состоянии вернуть величину кредита, а также выплатить проценты по нему, рассчитанные по указанной ставке, венчурная компания перейдет в стоимость кредитора. Если дополнительно устанавливается граница в 25 млн. руб., при достижении которой компания переходит в собственность кредитора, ставка остается равной 12,35% годовых. Если же в договоре устанавливается граница 50 млн. руб., ставка снижается до 9,19% годовых. Таким образом, при увеличении значения границы L ставки кредитования снижаются, так как увеличивается вероятность достижения данной границы и, соответственно, перехода компании в собственность кредитора.

Литература

1. Вавилов С.А. Стоимость кредитования венчурных проектов с точки зрения постулата безарбитражности [Текст] / С.А. Вавилов, К.В. Светлов // Аудит и финансовый анализ. – 2015. – №1.
2. Björk T. Arbitrage theory in continuous time [Text] / T. Björk. – OUP Oxford, 2004. – 496 pp.
3. Dixit A.K. Investment under uncertainty [Text] / A.K. Dixit, R.S. Pindyck. 1994. – Princeton ineversity press. – 238 p.
4. McDonald J. The value of waiting to invest [Text] / J. McDonald, S. Siegel // Quarterly journal of economics. – Vol. 101 ; no. 4. – Pp. 707-728.
5. Qksendal B.K. Stochastic differential equations: an introduction with applications [Text] / B.K. Qksendal. – 1988. – Springer. – 188 p.

Ключевые слова

Кредитный риск; венчурный проект.

Светлов Кирилл Владимирович

РЕЦЕНЗИЯ

В статье Светлова К.В решается задача о величине процентной ставки кредитования для венчурного проекта. Указанная ставка рассчитывается в зависимости от срока, на который выдается кредит, степени рискованности проекта и доли собственных средств заемщика, вложенных в проект. Кроме того, вводится дополнительное условие о том, что права собственности на проект, при достижении капиталом проекта некоторой нижней границы, переходят к кредитору. На основе результатов теории ценообразования опционов выводится трансцендентное уравнение, решение которого определяет упомянутую выше ставку кредитования. Приведены численные примеры, на которых показана зависимость величины ставки кредитования от выбора границы, определяющей наступление дефолта.

Считаю, что данная работа отвечает всем предъявляемым требованиям и может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Ермоленко К.Ю., к.э.н., доцент, кафедра Экономической кибернетики, Санкт-Петербургский государственный университет