

3.2. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ БАЛАНСА ПРЕДЛОЖЕНИЯ ТОВАРОВ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ СПРОСОМ

Голоскоков К.П., д.т.н., профессор, Санкт-Петербургский государственный университет морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова;

Чиркова М.Ю., к.э.н., доцент, Финансовый университет при Правительстве РФ;

Повалов А.А., аспирант, Санкт-Петербургский институт управления и права

В статье рассматриваются проблемы согласования структуры предложения товаров для филиалов торговых организаций, разработан ряд математических моделей, позволяющих оценить доходность и финансовую стабильность предприятий в условиях неопределенного спроса.

Для того чтобы соответствовать неопределенному спросу структуре филиалов по поставке товаров, торговой организации можно предложить математическую модель на основе теории игр.

Для достижения поставленной цели необходимо будет решить следующие задачи:

- сформулировать постановку задачи для моделирования;
- определить необходимых игроков;
- определить перечень стратегий игры;
- построить матрицу решений для игры;
- провести анализ определения условий нахождения оптимальных решений;
- дать интерпретацию поставленной игры;
- сделать обоснование выбора решений;
- экономически обосновать выбор платежной матрицы;
- по возможности упростить матрицу платежей;
- определить выбор необходимых стратегий игроков для достижения поставленных целей;
- выбрать метод решения матричной игры;
- провести необходимые расчеты по игре;
- сделать экономическую интерпретацию результатов игры;
- проверить адекватность выбранной модели для торговой фирмы.

Формулировка цели моделирования может иметь следующий вид. В качестве игроков будут выступать два основных игрока первый игрок это филиал фирмы, второй игрок это покупатель товаров данного филиала. В нашем случае требуется максимизировать прибыль филиала, а следовательно, игру можно рассматривать как антагонистическую. Данная модель строится для самых неблагоприятных условий по спросу, и тем не менее гарантирует максимально возможную прибыль [1].

Стратегия игрока 1 состоит в предложении единицы i -го товара группы заданных наименований.

Игрок 2 придерживается стратегии купить единицу j -товара из той же группы номенклатуры товаров.

Так как номенклатура продаваемых товаров конечна и соответствует стратегиям игроков, то такая игра является антагонистической и конечной.

Смешанная стратегия игрока представляет собой вектор, каждая из компонент которого показывает

относительную частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии. Смешанная стратегия игрока 1 состоит в предложении различных единиц товара в определенных долях, пропорциях. Смешанная стратегия игрока 2 состоит в спросе на различные единицы товара в некоторых пропорциях, которые могут отличаться от пропорций предложения.

Обратимся к построению матрицы выигрышей. Процесс разыгрывания конечной антагонистической игры состоит в том, что игроки 1 и 2 независимо друг от друга выбирают свои чистые стратегии, в результате чего складывается ситуация (ij).

Если значения наименований предлагаемого товара и необходимого покупателю совпадают (то есть $i = j$), то осуществляется продажа единицы товара i -го наименования и филиал получает определенную прибыль. Если наименования единицы предлагаемого и спрашиваемого товара не совпадают, то сделка не осуществляется, и филиал фирмы в этом случае имеет лишь торговые издержки по данной единице товара.

Матрица выигрышей игрока 1 при этом является квадратной матрицей ($I \times I$) и имеет вид:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1j} & g_{1I} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2j} & g_{2I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{i1} & g_{i2} & \dots & g_{ij} & g_{iI} \\ g_{I1} & g_{I2} & \dots & g_{Ij} & g_{II} \end{pmatrix},$$

где g_{ij} – элемент матрицы, величина которого равна выигрышу игрока 1 при выборе игроком 1 i -й стратегии (строки), а игроком 2 – j -й стратегии (столбцы).

Величины g_{ij} при $i = j$ показывают прибыль филиала фирмы в случае продажи единицы товара i -го наименования, т.е.:

$$g_{ij} = P_i \text{ при } i = j,$$

где P_i – прибыль филиала фирмы в случае продажи единицы товара i -го наименования.

При $i \neq j$ филиал фирмы имеет издержки из-за несовпадения предложения и спроса на единицу товара i -го наименования:

$$g_{ij} = C_i \text{ при } i \neq j,$$

где C_i – издержки филиала в случае несовпадения предложения и спроса на единицу товара i -го наименования.

С учетом сказанного матрица выигрышей i -го игрока для оценки гарантированной прибыли принимает вид:

$$G_i = \begin{pmatrix} P_1 & -C_1 & \dots & -C_1 \\ -C_2 & P_2 & \dots & -C_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C_I & -C_I & \dots & P_I \end{pmatrix}.$$

Показатели прибыли филиала P_i , $i = \overline{1, I}$, при продажах единицы товара расположены на главной

диагонали квадратной матрицы и представляют собой положительные величины $P_i > 0$, $i = \overline{1, I}$.

Издержки филиала представлены отрицательными величинами $C_i < 0$, $i = \overline{1, I}$.

Установим отсутствие «седловой точки».

Найдем максимин, достигаемый игроком 1 в чистых стратегиях (нижнюю цену игры):

$$\bar{v}_1 = \max_i \min_j g_{ij} = \max_i \min_j -C_j = \max_i -C_i < 0. \quad (1)$$

Таким образом, максимин в чистых стратегиях для матрицы выигрышей филиала фирмы всегда отрицателен.

Аналогично можно показать, что минимакс для рассматриваемой матричной игровой модели всегда положителен (верхняя цена игры):

$$\underline{v}_1 = \min_j \max_i g_{ij} = \min_j \max_i P_i = \min_j P_i > 0. \quad (2)$$

Поскольку максимин и минимакс не равны, матрица не имеет седловой точки, и равновесная ситуация в игре не может быть достигнута в чистых стратегиях.

Известно, что минимакс всегда не меньше максимина, и в случае различия минимаксов (максимина и минимакса) применение игроками смешанных стратегий позволяет увеличить выигрыш игрока 1 по сравнению с минимаксной ценой игры и уменьшить проигрыш игрока 2 по сравнению с максимальной ценой игры в пределах разности:

$$\bar{v}(r) - \underline{v}(r) = \min_j \max_i g_{ij} - \max_i \min_j g_{ij}. \quad (3)$$

Выбор оптимальной смешанной стратегии филиала фирмы, дающей ему наибольший гарантированный выигрыш (прибыль), основан на важнейшей в теории игр теореме, которая сводится к следующему утверждению.

Всякая конечная антагонистическая игра имеет хотя бы одну точку равновесия, может быть и в смешанных стратегиях [2, с. 51-60].

Равновесие в смешанных стратегиях означает, что максимальный гарантированный выигрыш игрока 1 (прибыль филиала) в условиях равновесия равен минимальному гарантированному проигрышу игрока 2 и может быть достигнут в условиях неопределенности спроса.

Это общая величина выигрыша и проигрыша называется значением, или ценой игры.

Дадим интерпретацию экономического содержания процесса игры.

Выбор игроками своих чистых стратегий с некоторыми заранее заданными вероятностями представляет собой план и процесс проведения игры [3, с. 174-181].

Применительно к рассматриваемой задаче вероятность выбора филиалом своей i -й стратегии может получить статистическую оценку в виде соотношения количества случаев, благоприятных этому выбору, к общему количеству случаев выбора стратегий, т.е. соответствует формуле непосредственного расчета вероятности:

$$X_i = \frac{N_i^s}{\sum_{i=1}^I N_i^s}, \quad (4)$$

где N_i^s – количество предлагаемых (supply) единиц товара i -го наименования.

I – количество наименований товара, доставленных для продажи в филиал.

Экономическую сущность вероятности x_i , $i = \overline{1, I}$, на содержательном уровне можно характеризовать как структуру предложения товаров дистрибьюторской фирмой доли, которые составляют товары i -го наименования в общем количестве единиц предлагаемых товаров.

Каждый ход игрока 1 в процессе игры представляет собой предложение единицы товара i -го наименования.

Очевидно, что сумма долей предлагаемых товаров равна единице:

$$\sum_{i=1}^I x_i = 1. \quad (5)$$

Аналогично, статистическая оценка вероятности спроса единицы товара i -го наименования равняется:

$$y_i = \frac{N_j^d}{\sum_{j=1}^I N_j^d}, \quad (6)$$

где N_j^d – количество спрашиваемых (demand) единиц товара j -го наименования.

Очевидно, что:

$$\sum_{j=1}^I y_j = 1. \quad (7)$$

Величина y_j представляет собой частоту (статистическую вероятность) спроса на единицу товара j -го наименования. Каждый ход покупателей в процессе игры представляет собой спрос на единицу товара j -го наименования. Иными словами, вероятность y_j характеризует частоту тех случаев, когда покупателям требуется единица товара j -го наименования.

В соответствии с правилами антагонистической матричной игры случайные выборы стратегий игроками 1 и 2 должны быть независимыми.

Эта независимость определяется условиями неопределенности спроса.

Нахождение оптимальных смешанных стратегий и цены игры сводятся к следующему.

Процесс игры при использовании смешанных стратегий представляет собой последовательность случайных испытаний, результатами которых являются ситуации игры (ij).

Каждой ситуации при этом соответствует случайная величина, которая принимает значение g_{ij} соответственно с вероятностями $x_i y_j$ для $i = \overline{1, I}$ и $j = \overline{1, I}$.

При этом математическое ожидание этой случайной величины равняется:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I g_{ij} x_i y_j. \quad (8)$$

Это число представляет собой средний выигрыш первого игрока (среднюю прибыль филиала фирмы при продаже единицы товара).

Смешанную стратегию игрока 1 можно представить как вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_l)$, а смешанную стратегию игрока 2 как вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$, где $x_i \geq 0, i = \overline{1, l}, y_j \geq 0, j = \overline{1, l}$.

Если игроки 1 и 2 используют оптимальные стратегии, средний выигрыш игрока 1 равняется среднему проигрышу второго и представляет собой цену игры (значение игры) v :

$$v = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l g_{ij} x_i y_j, \tag{9}$$

где x_i и y_j – элементы вектора оптимальных стратегий соответственно игроков 1 и 2:

Для оптимальных стратегий должны выполняться условия [4]:

$$\sum_{i=1}^l g_{ij} x_i \geq v, j = \overline{1, l}; \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^l g_{ij} y_j \geq v, i = \overline{1, l}. \tag{11}$$

Если филиал (игрок 1) применяет оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры v и не зависит от частот применения стратегий игроком 2 (спросом) [5, с. 53-59]. Аналогично выглядит применение оптимальной смешанной стратегии игроком 2: его проигрыш равен цене игры и не зависит от частоты применения стратегий игроком 1.

Итак, гарантированная максимально возможная средняя прибыль в расчете на единицу проданного товара равняется цене игры v и достигается при оптимальной структуре предложения филиала торговой фирмы. В свою очередь оптимальная структура предложения – это доли каждого вида товара в их общем количестве, которые соответствуют элементам вектора оптимальной стратегии:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_l). \tag{12}$$

Таким образом, результаты решения матричной игры – оптимальные стратегии игроков и цена игры – обеспечивают получение филиалом фирмы гарантированной максимально возможной прибыли в условиях неопределенности спроса.

Математическое ожидание дискретной случайной величины, значения которой представлены элементами платежной матрицы, должно характеризовать среднюю гарантированную прибыль, получаемую филиалом торговой фирмы при продаже единицы товара.

Сформируем сначала прямую задачу линейного программирования для нахождения оптимальной стратегии первого игрока (филиала фирмы).

Поскольку цена игры v нам пока неизвестна, исключим ее в явном виде из условия задачи, вводя новые переменные

$$x_i'' = \frac{x_i}{v}. \tag{13}$$

и разделим неравенство (10) на положительную величину v .

Заметим, что по экономическому содержанию величина v не всегда может быть положительной. Для того чтобы выполнить условие $v > 0$, достаточно, чтобы все элементы платежной матрицы (g_{ij}) были неотрицательными. Этого всегда можно достичь, прибавляя ко всем элементам матрицы одну и ту же достаточно большую положительную величину M . Естественно, при этом цена игры увеличится на величину M , однако оптимальные стратегии не изменятся, и после их нахождения можно найти цену игры для исходной матрицы.

После деления неравенства (10) на v и замены переменных получаем ограничения задачи в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^l g_{ij} x_i'' \geq 1, j = \overline{1, l}. \tag{14}$$

Сформулируем целевую функцию задачи. Заметим, что:

$$\sum_{i=1}^l x_i'' = \sum_{i=1}^l \frac{x_i}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^l x_i. \tag{15}$$

Поскольку $\sum_{i=1}^l x_i = 1$, то:

$$\sum_{i=1}^l x_i'' = \frac{1}{v}. \tag{16}$$

где v – цена игры для матрицы с положительными элементами;

v' – цена игры для исходной матрицы, содержащей отрицательные элементы.

Так как игрок 1 стремится получить максимальный выигрыш v , то необходимо найти также значения x_i'' , $i = \overline{1, l}$, которые обеспечивают минимум величины $1/v$.

Таким образом, для нахождения максимальной гарантированной прибыли необходимо свести матричную игру к следующей задаче линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^l x_i'' \rightarrow \min; \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^l g_{ij} x_i'' \geq 1, j = \overline{1, l}; \tag{18}$$

$$x_i'' \geq 0, i = \overline{1, l}. \tag{19}$$

где x_i'' – переменные задачи линейного программирования, функционально связанные с частотами x_i и ценой игры;

g_{ij} – элемент платежной матрицы $G1$, находящийся на пересечении i -й строки и j -го столбца.

$$x_i = x_i v. \tag{20}$$

Переменные x_i'' , $i = \overline{1, l}$, связанные с ценой игры соотношением;

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^l x_i''}. \tag{21}$$

Таким образом, построенная математическая модель позволяет филиалу в условиях наиболее не-

благоприятного спроса получить большую прибыль, чем максимально гарантированную при неблагоприятном спросе.

Литература

1. Бугорский В.Н. и др. Методы автоматизированного анализа и оценка применимости программных продуктов в учебном процессе [Текст] : учеб. пособие / В.Н. Бугорский, А.И. Дашевский, А.И. Михайлушкин, С.Е. Пономарев, Ю.М. Порховник, Р.В. Соколов, В.И. Фомин, М.Ю. Чиркова ; под ред. Ю.М. Порховника. – СПб. : СПбГИЭУ, 2001. – 142 с.
2. Малюк В.И. Методика оценки рационального распределения ограниченных инвестиций в развитие производственной системы региона [Текст] / В.И. Малюк, К.П. Голоскоков // Вестник ИНЖЭКОНА. – 2009. – №1. – С. 51-60. – (Экономика).
3. Голоскоков К.П. и др. Применение математического программирования в дискриминантном анализе для решения задачи прогнозирования [Текст] / К.П. Голоскоков, Д.В. Гаскаров, А.В. Шкабардня // Автоматика и телемеханика. – 1988. – №7. – С. 174-181.
4. Голоскоков К.П. Формирование информационной базы для прогнозирования качества продукции [Текст] / К.П. Голоскоков // Инновации. – 2009. – №1.
5. Пономарев С.Е. Параллельные вычисления в экономических информационных системах [Текст] / С.Е. Пономарев, М.Ю. Чиркова // Вестник ИНЖЭКОНА ; Сер. : Экономика. – 2012. – №8. – С. 53-59.

Ключевые слова

Предложения товаров; структура; финансовая стабильность; рентабельность; рыночная экономика; доходы; издержки производства; математические модели; оценка эффективности.

Голоскоков Константин Петрович

Чиркова Марина Юрьевна

Повалов Александр Александрович

РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность вопросов моделирования баланса предложения товаров торговой сети с неопределенным спросом обусловлена тем, что развитие сектора розничной торговли в сложившейся кризисной ситуации в экономике зависит от приведения в соответствие структуры предложения филиалов торговой фирмы и потребителей в условиях неопределенного спроса. Анализ текущей деятельности торговых компаний показывает, что основными проблемами, препятствующими их нормальному функционированию и развитию, являются:

- нестабильная экономическая ситуация;
- острая конкуренция;
- высокий уровень предпринимательских рисков;
- проблема завоевания новых сегментов рынка;
- неустойчивое положение на страховом рынке;
- высокий уровень издержек деятельности;
- потребность в высококвалифицированном и многочисленном персонале.

Для осуществления эффективного контроля, планирования, учета использования ресурсов, оценки и нормирования затрат по основным линиям бизнеса в рамках управленческого учета дистрибуторской сети следует разрабатывать модели баланса предложения филиалов торговой фирмы и спроса потребителей в условиях неопределенного спроса.

В рецензируемой статье предложены модели согласования структуры предложения филиалов торговой фирмы с неопределенным спросом.

Статья отвечает всем предъявляемым требованиям к работам такого уровня и может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Васин А.В., д.т.н., профессор кафедры прикладной математики Санкт-Петербургского государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова.