3.4. КОМБИНИРОВАННОЕ ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ И АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР В ТЕОРИИ ПОРТФЕЛЯ

Сигал А.В., д.э.н., доцент, кафедра бизнес-информатики и математического моделирования

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского

В статье рассматриваются теоретико-игровые методы поиска в поле различных информационных ситуаций структуры эффективного портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Марковица и/или в модели Блэка. Предлагаемые теоретико-игровые методы и обобщенные модели задачи выбора в поле различных информационных ситуаций структуры эффективного портфеля основаны на концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр. Найдены решения конкретных задач.

ВВЕДЕНИЕ

Современная теория портфеля, берущая начало с известной статьи Г. Марковица [11], основана на применении теории вероятностей и математической статистики. Цель данной работы — обоснование возможности и корректности теоретико-игрового метода поиска в поле различных информационных ситуаций структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Марковица и/или в модели Блэка, а также построение обобщенных моделей задачи выбора в поле различных информационных ситуаций структуры эффективного портфеля.

Уже при первом систематическом изложении теории игр Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном в их монографии [13], она была разработана как средство математического изучения явлений конкурентной экономики. Теоретико-игровые модели нашли широкое применение для решения задач оптимального распределения ресурсов между разными активами. С экономической точки зрения, распределение ресурсов представляет собой диверсификацию, научной основой которой и служит современная теория портфеля. Уже этот факт позволяет предположить целесообразность применения теоретико-игровых методов и моделей в современной теории портфеля.

Как, в частности, будет показано ниже, при соблюдении определенных требований решение соответствующей матричной игры позволяет найти структуру эффективного портфеля, т.е. портфеля, структура которого задает оптимальное по Парето решение соответствующей задачи многокритериальной оптимизации. В большинстве случаев, если возможно корректное применение теоретико-игрового метода поиска структуры эффективного портфеля, то удается найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, измеренного дисперсией случайной величины (СВ), характеризующей норму прибыли портфеля. Это обусловлено особенностями теории матричных игр. В первую очередь тем, что решение матричной игры ориентирует лицо, принимающее решения (ЛПР), на предельно осторожное поведение.

Как правило, при помощи матричных игр моделируют ситуации, в которых интересы участников противоположны. В экономике же часто интересы разных сторон непротиворечивы, а порой и совпадают. По этой и некоторым другим причинам основной моделью принятия решений считается модель принятия статистических решений, которую будем называть статистической игрой. Основная заслуга в создании теории принятия статистических решений принадлежит А. Вальду [15].

Суть комбинированного применения статистических и антагонистических игр заключается в отождествлении исходной статистической игры, моделирующей процесс принятия управленческих решений, с антагонистической игрой (АИ), платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания исходной статистической игры.

Экономика представляет собой динамическую, слабо структурированную сложную систему, которая состоит из многих элементов, в т.ч. из большого количества, находящихся в тесном, непрерывном взаимодействии, экономических систем, т.е. домашних хозяйств, предприятий всех организационно-правовых форм, корпораций, объединений, союзов. Повышение качества принятия управленческих решений в экономике требует учета таких особенностей экономики, объективно существующих и внутренне присущих ей, как случайность, хаотичность, неполнота информации, неопределенность, конфликтность, конкуренция, противоречивость, альтернативность, многокритериальность и обусловленный ими экономический риск.

Следовательно, для совершенствования управления экономическими системами и их эффективного функционирования необходимо в процессе принятия управленческих решений в экономике корректно применять такие экономико-математические методы и модели, которые позволяют адекватно учитывать указанные особенности экономики, прежде всего, неполноту информации, неопределенность, конфликтность и экономический риск. Одним из наиболее распространенных и разработанных направлений в теории и практике управления экономическими системами, позволяющем учитывать неполноту информации, неопределенность, конфликтность и экономический риск, считается теоретико-игровое моделирование экономики.

Теория игр и теория принятия статистических решений занимаются в первую очередь именно задачами анализа и принятия решений в условиях неопределенности, конфликтности и риска. В последнее время методы теории игр во все большей мере проникают в экономику и предпринимательство, в управленческую практику. В экономической теории и практике применяется много экономико-математических моделей, представляющих собой игры самых разных классов.

Управление экономическими системами в условиях современной экономики требует разработки и развития доскональнoго аппарата теории игр и статистических решений, позволяющего анализировать и моделировать процессы принятия управленческих решений в экономике с учетом неполноты информации, неопределенности, конфликтности и риска. Следует отметить, что инструментарий теории игр и статистических решений, традиционно применявшийся для моделирования экономики, не рассчитан на условия постоянно меняющейся среды функционирования, на последствия и, особенно, причины кризиса, начавшегося в мировой экономике в 2008 г., на геополитические риски, возникшие как в отечественной, так и в мировой экономике после социально-политического кризиса, начавшегося в Украине в конце 2013 г., а также на особенности нестационарной экономики, типичной для экономик всех постсоветских государств.

Внедрение новых теоретико-игровых подходов, позволяющих моделировать процессы принятия управленческих решений в экономике с учетом неполноты информации, неопределенности, конфликтности и риска, приводит к выбору наименее рискованных решений, что позволяет стабилизировать результаты деятельности экономических систем, добиться устойчивости функционирования как отдельно взятой экономической системы, так и экономики страны в целом. К новым теоретико-игровым подходам относится предлагаемая ниже концепция моделирования процесса принятия управленческих решений в экономике, основанная на комбинированном применении статистических и антагонистических игр. Основы концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр достаточно полно изложены в монографии [7].

Предлагаемую концепцию от других подходов, применяемых для теоретико-игрового моделирования экономики, отличают следующие особенности. Во-первых, предлагаемая концепция нацелена на принятие оптимальных решений с учетом неполноты информации, неопределенности, конфликтности и риска. Во-вторых, предлагается комбинированное применение статистических и антагонистических игр совместно с другими разделами математики, в частности, с энтропийным подходом, нечеткой математикой, теорией вероятностей и математической статистикой, теорией случайных процессов, прикладной статистикой и эконометрией, конкретной математикой. В-третьих, предлагается комбинированное применение статистических и антагонистических игр и в тех случаях, когда соответствующая антагонистическая игра не является непосредственной моделью рассматриваемого процесса принятия управленческих решений, при этом уделяется внимание анализу и обоснованию математической корректности, экономической корректности, экономической целесообразности и экономической эффективности управленческих решений, реализуемых ЛПР.

Необходимые сведения из теории игр и статистических решений

Антагонистической игрой (*АИ*) будем называть матричную игру, т.е. конечную игру двух лиц (игроков) с нулевой суммой. АИ представляет собой систему $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$, где $I = \{1; ...; i; ...; k\}$ – известное множество всех чистых стратегий игрока 1, занумерованных натуральными числами от единицы до k, $J = \{1; ...; j; ...; n\}$ – известное множество всех чистых стратегий игрока 2, занумерованных натуральными числами от единицы до n, $R = R_{k \times n} = (r_{ij})$ – полностью или частично известная платежная матрица АИ. Значение элемента r_{ij} платежной матрицы задает выигрыш игрока 1 в ситуации $(i; j)$, когда в партии игры он применил свою чистую стратегию i, а игрок 2 – свою чистую стратегию j. В каждой партии АИ значение проигрыша игрока 2 совпадает со значением выигрыша игрока 1.

Будем различать два принципиально разных класса АИ. Первый – *классические АИ* (*КАИ*), представляющие собой АИ, заданные полностью известной матрицей. Второй – *неоклассические АИ* (*НАИ*), заданные частично известной матрицей. То, что платежная матрица известна частично, означает, что среди элементов r_{ij} матрицы $R = R_{k \times n} = (r_{ij})$ имеется хотя бы один элемент, точное истинное значение которого неизвестно. Очевидно, КАИ является АИ с полной информацией, а НАИ – АИ с неполной информацией, при этом НАИ представляет собой простейшее обобщение КАИ. Применение НАИ позволяет адекватно моделировать процесс принятия управленческих решений с учетом неполноты информации, неопределенности, конфликтности и обусловленного ими экономического риска.

Статистической игрой (*статистической моделью принятия решений*) будем называть систему $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$, где $I = \{1; ...; i; ...; k\}$ – известное множество всех решений ЛПР, которые он может применить при одноразовом принятии управленческого решения; $J = \{1; ...; j; ...; n\}$ – известное множество всех возможных состояний природы (экономической среды), $R = R_{k \times n} = (r_{ij})$ – полностью или частично известная платежная матрица, еще называемая функционалом оценивания статистической игры. В теории принятия статистических решений ЛПР принято называть статистиком.

Сразу отметим, что чистые стратегии ЛПР могут быть его взаимоисключающими возможными решениями, а могут быть в определенном смысле совместимыми. Состояния природы, как правило, являются взаимоисключающими, при этом неизвестно, в каком именно своем возможном состоянии будет находиться природа в момент реализации принятого ЛПР управленческого решения. В отличие от ЛПР, природа пассивно выбирает свои чистые стратегии, т.е. случайным образом (неосознанно) оказывается в одном из своих возможных состояний.

Без ограничения общности можно считать, что платежная матрица статистической игры обладает положительным ингредиентом [9, с. 12]: $R = R^+ = R^+_{k \times n} = (r^+_{ij})$, т.е. r_{ij} характеризует выигрыш ЛПР в случае реализации им своего i-го решения в условиях, когда природа оказалась в своем j-м возможном состоянии. Иначе говоря, платежная матрица $R = R^+ = R^+_{k \times n} = (r^+_{ij})$ обладает *положительным ингредиентом*, если ЛПР стремится достичь наибольшего значения среди ее элементов. Платежная матрица $R = R^- = R^-_{k \times n} = (r^-_{ij})$ обладает *отрицательным ингредиентом*, если ЛПР стремится достичь наименьшего значения среди ее элементов.

Нередко, как, например, в монографии [1], в статистических играх природу принято считать игроком 1, статистика – игроком 2. Кроме того, вместо матрицы выигрышей статистика используется матрица риска (функция потерь), значение элементов которой характеризуют проигрыш (убыток) статистика, что означает отрицательный ингредиент функционала оценивания.

Знак ингредиента платежной матрицы игры легко можно изменить на противоположный знак. Если в статистической игре игрок 1 является ЛПР, а второй – природой, то для изменения знака функционала оценивания платежную матрицу достаточно умножить на число $c = -1$. Полученная статистическая игра будет равносильна исходной игре в том смысле, что применение соответствующих критериев принятия решений к этим играм будет приводить к принятию совпадающих решений.

Если в статистической игре игрок 1 является природой, а второй – ЛПР, то для изменения знака функционала оценивания достаточно транспонировать платежную матрицу, при этом игроки поменяются местами, т.е. в полученной игре ЛПР станет игроком 1, а природа – игроком 2. Полученная статистическая игра будет равносильна исходной игре в том смысле, что применение соответствующих критериев принятия решений к этим играм будет приводить к принятию совпадающих решений.

Итак, далее везде будем считать, что в статистической игре игрок 1 является ЛПР, а второй — природой, при этом функционал оценивания обладает положительным ингредиентом, т.е. $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{+} = \boldsymbol{R}^{+}_{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{n}} = \left(\boldsymbol{r}^{+}_{\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}}\right)$. Так как ЛПР считается игроком 1, а природа – игроком 2, строки платежной матрицы характеризуют применение ЛПР своих чистых стратегий, а ее столбцы – состояния экономической среды.

Кратко перечислим основные особенности статистических игр, отличающие их от АИ:

- один из игроков (согласно вышеприведенной договоренности, игрок 2) является природой, которую нельзя рассматривать как разумного противника, интересы которого, например, противоположны интересам ЛПР;
- множество критериев, применение которых возможно для принятия решений, определяется имеющей место информационной ситуацией;
- статистик имеет возможность проводить испытания с целью получения дополнительной информации о неизвестном ему состоянии природы;
- статистик должен выбрать решающее правило, которое дает ему возможность выбрать оптимальное решение в зависимости от результата испытания.

Если априорное распределение вероятностей состояний природы уже известно, то, согласно общепринятой терминологии, имеет место задача принятия решений в условиях риска. Как правило, она решается по критерию Байеса, т.е. за счет вычисления для всех альтернатив, рассматриваемых ЛПР, ожидаемого (среднего) выигрыша и выбора чистой стратегии ЛПР, обладающей наибольшим значением ожидаемого выигрыша.

С помощью проведения экспериментов можно собрать дополнительные сведения о состояниях природы. Если априорное распределение вероятностей состояний уже известно, то в результате проведения эксперимента оно изменяется согласно формуле Байеса, причем в этом случае выбирается чистая стратегия, являющаяся наилучшей относительно нового – апостериорного – распределения вероятностей.

Если априорное распределение вероятностей состояний неизвестно и о нем нет никаких предположений, то в этом случае для решения статистической игры принято выбирать решающее правило, т.е. правило, которое каждому возможному результату эксперимента ставит в соответствие способ действий ЛПР (его определенную стратегию). Наконец, если проведены несколько экспериментов, то в этом случае решающее правило включает в себя еще и указание действий, которые нужно осуществить, при этом необходимо оценить последствия разных действий для каждого состояния природы и стоимость проведения экспериментов.

Легко заметить, что статистические и антагонистические игры имеют одну и ту же формальную структуру. Это совпадение структур и дает теоретическую и практическую возможность комбинированно применять статистические и антагонистические игры. Суть комбинированного применения статистических и антагонистических игр заключается в отождествлении исходной статистической игры с *АИ, характеризующей процесс принятия управленческих решений*, т.е. с АИ, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания исходной статистической игры. Действительно, если вместо экономической среды ввести в схему статистической игры игрока 2, который осознанно преследует цели, антагонистические целям игрока 1, то получим АИ, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания. В табл. 1 приведено соответствие элементов антагонистических и статистических игр.

Таблица 1

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ ИГР

№	АИ	Статистическая игра
1	Игрок 1	Статистик (ЛПР)
2	Игрок 2	«Природа» (экономическая среда)
3	Платежная матрица	Функционал оценивания
4	Чистая стратегия игрока 1	Возможное решение (альтернатива), которое статистик может применить при одноразовом принятии решений
5	Смешанная стратегия игрока 1	Рандомизированная стратегия статистика
6	Чистая стратегия игрока 2	Возможное состояние природы
7	Смешанная стратегия игрока 2	Распределение вероятностей для состояний природы

Стратегию поведения экономической среды характеризует имеющаяся информационная ситуация. *Информационной ситуацией* (*ИС*) $\boldsymbol{I_s}$ относительно стратегии поведения экономической среды будем называть определенную меру градации, характеризующую неопределенность выбора экономической средой своих состояний из заданного множества $\boldsymbol{J} = \{\boldsymbol{1; 2; ...;\ j; ...;\ n}\}$. Существуют разные классификаторы, характеризующие градации информационных ситуаций, т.е. поведение экономической среды. Как отмечает Р.И. Трухаев, «определение и классификация этих информационных ситуаций составляют, можно сказать, фундамент теории принятия решений в условиях неопределенности, поскольку частично позволяют решить известную проблему выбора критерия принятия решений путем разработки для каждой информационной ситуации множества критериев принятия решений» [9, с. 10]. В классификации, предложенной Р.И. Трухаевым [9, с. 13], выделяются семь разных ИС. Главным преимуществом предложенной Р.И. Трухаевым классификации ИС относительно стратегии поведения экономической среды является бóльшая (по сравнению с общепринятой) детализация неопределенности. Это позволяет точнее выбрать критерий принятия решений, лучше учесть особенности экономических явлений и процессов, качественнее учесть неполноту информации, неопределенность, конфликтность и обусловленный ими экономический риск. Приведем классификацию информационных ситуаций, предложенную Р.И. Трухаевым.

1. ИС $\boldsymbol{I_1}$ характеризуется заданными точными истинными значениями априорных вероятностей возможных состояний экономической среды.

2. ИС I_2 характеризуется тем, что значения априорных вероятностей возможных состояний экономической среды зависят от одного или нескольких параметров.
3. ИС I_3 характеризуется заданной системой линейных ограничений для возможных значений априорных вероятностей возможных состояний экономической среды (по сути, неизвестные значения этих вероятностей принадлежат известным множествам).
4. ИС I_4 характеризуется неизвестным распределением априорных вероятностей на множестве возможных состояний экономической среды, при этом о возможных значениях этих вероятностей нет никакой математической информации.
5. ИС I_5 характеризуется антагонистическими интересами и целями ЛПР, с одной стороны, и экономической среды – с другой, т.е. имеет место антагонизм между интересами игроков.
6. ИС I_6 характеризуется промежуточными между I_1 и I_5 случаями выбора экономической средой своих возможных состояний, при этом между интересами и целями ЛПР и экономической среды может иметь место лишь частичное противоречие.
7. ИС I_7 характеризуется нечетким множеством состояний экономической среды, т.е. тем, что значение априорных вероятностей возможных состояний экономической среды принадлежат соответствующим известным нечетким множествам.

Семь выделенных Р.И. Трухаевым ИС являются глобальными характеристиками уровней неопределенности состояний экономической среды. Отдельно нужно сказать о пятой ИС, в поле которой экономическая среда теряет характерное свойство пассивности природы и начинает действовать осознанно, как злонамеренный противник ЛПР. Этот формальный антагонизм лишь отображает мнение ЛПР о нецелесообразности рисковать. Очевидно, принятие управленческих решений в поле пятой ИС должно осуществляться согласно правилам решения АИ (собственно, ЛПР вынуждено применять принцип гарантированного результата). Эта ИС является основой адекватного моделирования принятия решений в условиях, когда ЛПР считает нецелесообразным рисковать. Например, в условиях жесткой конкуренции, в условиях предкризисной или кризисной ситуации, в случае, когда отношение ЛПР к риску характеризуется существенной несклонностью.

Согласно *принципу гарантированного результата,* каждый игрок рассчитывает на наихудшее для него поведение противника, т.е. игроки придерживаются крайне пессимистической точки зрения: если перед началом партии противник узнал, какую именно свою чистую стратегию применит игрок, то противник в этой партии применит наиболее выгодную для себя свою чистую стратегию.

Д. Блекуэлл и М.А. Гиршик отмечают, что принцип гарантированного результата «определенно менее удовлетворителен в статистических играх, и в некоторых ситуациях он предписывает такой путь, который может быть признан неразумным всеми, за исключением разве самых неизлечимых пессимистов» [1, с. 127]. Это замечание абсолютно справедливо. Но, как отмечалось ранее, при принятии управленческих решений в экономике ЛПР вынуждено придерживаться принципа гарантированного результата не только и не столько из-за собственного пессимизма и несклонности к риску. Необходимость комбинированного применения статистических и антагонистических игр для принятия управленческих решений в экономике обусловлено не только мнением ЛПР, что ему нецелесообразно рисковать, если он придерживается этой точки зрения, но и невозможностью проведения испытаний. В этих условиях комбинированное применение статистических и антагонистических игр становится практически неизбежным и даже желательным.

Встречаются в литературе и рекомендации применения принципа гарантированного результата для выбора наилучшей смешанной стратегии статистика. Например, Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов прямо указывают, что они «являются сторонниками использования принципа гарантированного результата в играх с природой, особенно в экономических задачах. Успехи в построении численных методов нахождения гарантирующей стратегии и гарантированного результата, наблюдавшиеся в последние годы, служат материальной основой успешной реализации такого подхода» [3, с. 231].

Далее будем отождествлять исходную статистическую игру с соответствующей АИ, характеризующей процесс принятия управленческих решений, т.е. с АИ, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания $\boldsymbol{R}$ исходной статистической игры. Такое отождествление и означает комбинированное применение статистических и антагонистических игр, позволяет расширить возможности применения как статистических, так и антагонистических игр в экономике и управлении. Если отсутствуют и антагонизм интересов, и антагонизм поведения игроков, то АИ, характеризующая процесс принятия управленческих решений, не является непосредственной моделью этого процесса. Но, очевидно, в этом случае поведение ЛПР характеризуется предельной осторожностью.

Статистическую игру, характеризующую ситуацию принятия решений, можно решать как в чистых стратегиях игроков, так и в их смешанных стратегиях. Пусть $\boldsymbol{p}=\left(\boldsymbol{p_1};\ldots;\boldsymbol{p_i};\ldots;\boldsymbol{p_k}\right)$ – вектор, характеризующий стратегию игрока 1, $\boldsymbol{q}=\left(\boldsymbol{q_1};\ldots;\boldsymbol{q_j};\ldots;\boldsymbol{q_n}\right)$ – вектор, характеризующий стратегию игрока 2. Тогда если стратегии игроков отождествлять с векторами, характеризующими эти стратегии, то множества стратегий игроков представляют собой множества:

$$\boldsymbol{S_1}=\left\{\boldsymbol{p}=\left(\boldsymbol{p_1};\ldots;\boldsymbol{p_i};\ldots;\boldsymbol{p_k}\right)\;\middle|\;\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{p_i}=\boldsymbol{1},\;\boldsymbol{p_i}\geq\boldsymbol{0},\;\boldsymbol{i}=\overline{\boldsymbol{1},\boldsymbol{k}}\right\}-$$

для игрока 1;

$$\boldsymbol{S_2}=\left\{\boldsymbol{q}=\left(\boldsymbol{q_1};\ldots;\boldsymbol{q_j};\ldots;\boldsymbol{q_n}\right)\;\middle|\;\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{q_j}=\boldsymbol{1},\;\boldsymbol{q_j}\geq\boldsymbol{0},\;\boldsymbol{j}=\overline{\boldsymbol{1},\boldsymbol{n}}\right\}-$$

для игрока 2.

Функцию $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q}\right)=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{R}*\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{T}}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{r_{ij}}*\boldsymbol{p_i}*\boldsymbol{q_j}$ принято называть *платежной функцией* АИ, где $\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{T}}$ — вектор, транспонированный к вектору $\boldsymbol{q}$. Для АИ функция $\boldsymbol{H_1}\left(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q}\right)=\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q}\right)$ задает функцию ожидаемого выигрыша первого игрока (т.е. игрока 1), а функция $H_2(p;q) = -V = -V(p;q)$ – функцию ожидаемого выигрыша второго игрока (т.е. игрока 2).

Оценивая свои чистые стратегии согласно логике принципа гарантированного результата, игроки для каждой своей чистой стратегии находят наименьший собственный выигрыш. Для игрока 1 его гарантированными выигрышами являются наименьшие по своим значениям элементы строк платежной матрицы: $\alpha_i = \min_j r_{ij} = \min\{r_{i1};...;r_{ij};...;r_{in}\}$, $i=\overline{1,k}$. Аналогично для игрока 2 его гарантированными проигрышами являются наибольшие по своим значениям элементы столбцов платежной матрицы: $\beta_j = \max_i r_{ij} = \max\{r_{1j};...;r_{ij};...;r_{kj}\}$, $j=\overline{1,n}$.

Среди гарантированных (наихудших) результатов следует найти наилучший с точки зрения интересов соответствующего игрока: максимин, т.е. максимальный выигрыш из наименьших его выигрышей в строках, игрока 1, и минимакс, т.е. минимальный проигрыш из наибольших его проигрышей в столбцах, игрока 2. *Нижней чистой ценой* (*максимином*) АИ называют число $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j r_{ij}$. *Верхней чистой ценой* (*минимаксом*) АИ называют число $\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i r_{ij}$.

Часто принцип гарантированного результата называют принципом максимина, или принципом минимакса. Между значениями нижней и верхней чистых цен произвольной АИ всегда имеет место соотношение: $\alpha \le \beta$.

Н.Н. Воробьев утверждает: «Целью теории антагонистических игр, как и теории любого класса игр, является выработка для таких игр достаточно естественных представлений об оптимальности ситуаций и стратегий игроков и установление зависимости между свойствами игр, с одной стороны, и свойствами оптимальных в сформулированном смысле ситуаций — с другой» [2, с. 26]. Максиминный (минимаксный) подход может быть положен в основу выработки понятия оптимальности стратегий игроков для АИ. Суть принципа максимина заключается в максимизации минимальных выигрышей игрока 1, а выбранная им на основе применения этого принципа стратегия называется максиминной чистой стратегией игрока 1. Аналогично суть принципа минимакса заключается в минимизации максимальных проигрышей игрока 2, а выбранная им на основе применения этого принципа стратегия называется минимаксной чистой стратегией игрока 2.

В АИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ игрок 1, согласно принципу максимина, может обеспечить себе максиминный выигрыш $\max_{p \in S_1} \min_{q \in S_2} V(p;q)$, а игрок 2, согласно принципу минимакса, может обеспечить себе минимаксный проигрыш $\min_{q \in S_2} \max_{p \in S_1} V(p;q)$. Для АИ максиминный (минимаксный) подход к понятию оптимальности равносилен стремлению игроков придерживаться равновесной по Нэшу ситуации (см., например, [2, с. 32-35]).

В случае АИ понятие равновесия по Нэшу принимает следующий вид. *Ситуацией равновесия* в АИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ называют ситуацию $(p^*;q^*)$, где $p^* \in S_1$, $q^* \in S_2$, для которой справедливы неравенства:

$$V(p;q^*) \le V(p^*;q^*) \le V(p^*;q),$$
$$\forall p \in S_1, \ \forall q \in S_2.$$

В качестве синонимов термина «ситуация равновесия» часто используют следующие словосочетания: равновесная ситуация, седловая точка платежной функции. *Значением игры* или *ценой игры* Γ_R называют число $V = V_\Gamma = V(\Gamma) = V(\Gamma_R) = V_R^*$, которое равняется общему значению платежной функции на множестве всех ситуаций равновесия.

Еще раз подчеркнем, что если в процессе принятия управленческих решений в экономике на базе комбинированного применения статистических и антагонистических игр ЛПР ориентируется на принцип гарантированного результата, то это не означает, что природа действует сознательно, при этом осознанно преследует цели, антагонистичные целям игрока 1 (т.е. ЛПР). По сути это означает, что ЛПР не считает целесообразным рисковать.

Смешанным расширением АИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ называют антагонистическую игру $\tilde{\Gamma}_R = \langle S_1, S_2, V \rangle$. Если АИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ является игрой с седловой точкой, т.е. значения чистых цен совпадают между собой $\alpha = \beta$, то она имеет решение в чистых стратегиях, при этом ее смешанное расширение $\tilde{\Gamma}_R = \langle S_1, S_2, V \rangle$ имеет то же самое решение в чистых стратегиях. Если же АИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ является игрой без седловой точки, т.е. значения чистых цен не совпадают между собой $\alpha < \beta$, то она не имеет решения в чистых стратегиях. Доказанная в 1928 г. Дж. фон Нейманом [14] *теорема о минимаксе* утверждает, что $\max_{p \in S_1} \min_{q \in S_2} V(p;q) = \min_{q \in S_2} \max_{p \in S_1} V(p;q)$. Справедливость теоремы о минимаксе означает, что в любой АИ игроки имеют оптимальные смешанные стратегии. Строго говоря, любая АИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ имеет решение, возможно не единственное, при этом, если заданная АИ является игрой без седловой точки, для которой $\alpha < \beta$, где $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j r_{ij}$, $\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i r_{ij}$, то хотя бы у одного из игроков его оптимальная стратегия окажется его истинно смешанной стратегией. *Ценой игры* $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ без седловой точки называют число $V_R^* = V(p^*;q^*) = p^* * R * q^{*T} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} * p_i^* * q_j^*$, где $(p^*;q^*)$ – произвольная ситуация равновесия этой игры.

Обозначим $V_{Ij} = \sum_{i=1}^{k} r_{ij} * p_i$ – *ожидаемый выигрыш игрока 1*, если он придерживается своей стратегии $p \in S_1$, а игрок 2 – своей j-й чистой стратегии, $V_{IIi} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} * q_j$ – *ожидаемый проигрыш игрока 2*, если он придерживается своей стратегии $q \in S_2$, а игрок 1 – своей i-й чистой стратегии, $V^*_{Ij} = \sum_{i=1}^{k} r_{ij} * p^*_i$, $V^*_{IIi} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} * q^*_j$, где $(p^*; q^*)$ – ситуация равновесия игры. Тогда основные свойства оптимальных стратегий p^*, q^* игроков и значения V^*_R АИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ могут быть записаны следующим образом:

- $\alpha \le V^*_R \le \beta$;
- $V^*_{IIi} \le V^*_R$, $i = \overline{1, k}$;
- $p^*_i = 0$, если $V^*_{IIi} < V^*_R$;
- $V^*_{IIi} = V^*_R$, если $p^*_i > 0$;
- $V^*_{Ij} \ge V^*_R$, $j = \overline{1, n}$;
- $q^*_j = 0$, если $V^*_{Ij} > V^*_R$;
- $V^*_{Ij} = V^*_R$, если $q^*_j > 0$.

Приведенные свойства оптимальных стратегий игроков и цены игры играют важную роль в теории АИ. Именно они позволяют разработать удобные и довольно простые методы поиска ситуаций равновесия в АИ, характеризующей процесс принятия управленческих решений, а значит, и готовое управленческое решение. Приведенные наиболее важные свойства оптимальных стратегий игроков, значения АИ и критерий оптимальности стратегий игроков имеют в теории АИ фундаментальное значение, которое можно сравнить только со значением в теории АИ теоремы о минимаксе. Более того, в отличие от теоремы о минимаксе, наиболее важные свойства оптимальных стратегий игроков, значения АИ и критерий оптимальности стратегий игроков носят конструктивный характер и позволяют выявить взаимосвязь АИ и задач линейного программирования, а также разработать общую схему решения КАИ (см., например, [2, с. 83-84]).

Изложение основ теории АИ завершим формулировкой *критерия оптимальности стратегий игроков*: пусть $p \in S_1$ и $q \in S_2$ – стратегии игроков 1 и 2 соответственно, V – число, для которого выполняются неравенства $V_{IIi} \le V \le V_{Ij}$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$, тогда p – оптимальная стратегия игрока 1; q – оптимальная стратегия игрока 2, а $V = V^*_R$ – значение (цена) АИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$.

Достаточно полное изложение основных разделов теории игр и статистических решений приведено в монографиях Д. Блекуэлла, М.А. Гиршик [1], Н.Н. Воробьева [2], Р.Б. Майерсона [12], Дж. фон Неймана, О. Моргенштерна [13], А. Вальда [15].

Свойства вполне смешанных игр

Для предлагаемого теоретико-игрового метода поиска портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, особое значение имеют такие важные понятия теории АИ, как активные стратегии игроков, спектр стратегии, вполне смешанная стратегия, вполне смешанная ситуация равновесия, вполне смешанная игра. Дадим определения этим понятиям.

Пусть, как и раньше, $p = (p_1; ...; p_i; ...; p_k)$ – стратегия игрока 1 (вектор, характеризующий распределение вероятностей применения игроком 1 своих чистых стратегий при повторении партий), $q = (q_1; ...; q_j; ...; q_n)$ – стратегия игрока 2 (вектор, характеризующий распределение вероятностей применения игроком 2 своих чистых стратегий при повторении партий). При этом векторы, характеризующие стратегии игроков, должны принадлежать соответствующим множествам: $p \in S_1$, $q \in S_2$.

Вообще говоря, векторы $p \in S_1$, $q \in S_2$ могут характеризовать чистые стратегии соответствующего игрока, если одна и только одна компонента вектора равняется единице, а все остальные компоненты – нулю.

Истинно смешанной стратегией игрока будем называть такую его стратегию, для которой все компоненты соответствующего вектора $p \in S_1$ или $q \in S_2$, характеризующего эту стратегию этого игрока, строго меньше единицы. *Вполне смешанной стратегией* игрока называют такую его стратегию, для которой все компоненты соответствующего вектора $p \in S_1$ или $q \in S_2$, характеризующего стратегию этого игрока, строго больше нуля, т.е. являются положительными числами.

Спектром стратегии $p \in S_1$ *игрока* 1 называют множество $\operatorname{supp} p = \{ i \mid p_i > 0 \}$. *Спектром стратегии* $q \in S_2$ *игрока 2* называют множество $\operatorname{supp} q = \{ j \mid q_j > 0 \}$.

Решение АИ существенно упрощается, если известны активные стратегии игроков. *Активной стратегией игрока* 1 будем называть его чистую стратегию i, для которой существует хотя бы одна его оптимальная стратегия p^*, такая что $i \in \operatorname{supp} p^*$. *Активной стратегией игрока 2* будем называть его чистую стратегию j, для которой существует хотя бы одна его оптимальная стратегия q^*, такая что $j \in \operatorname{supp} q^*$. *Неактивной стратегией игрока* будем называть его чистую стратегию, которая не является его активной стратегией. Игрокам не следует применять свои неактивные стратегии.

Итак, знание спектра оптимальных стратегий игроков существенным образом облегчает решение КАИ. А в случае вполне смешанной игры, когда оптимальные стратегии игроков являются их вполне смешанными стратегиями, поиск оптимальных стратегий в сущности сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Вполне смешанной ситуацией равновесия в КАИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ называют ситуацию равновесия $(p^*; q^*)$, состоящую из вполне смешанных стратегий игроков p^*, q^*, для которых $supp\, p^* = I$, $supp\, q^* = J$. *Вполне смешанной игрой* называют КАИ, в которой любая ситуация равновесия является вполне смешанной ситуацией равновесия.

Вполне смешанные игры обладают интересными и полезными свойствами. Отметим наиболее важные свойства вполне смешанных игр [2, с. 79-83].

1. Платежная матрица вполне смешанной игры должна быть квадратной матрицей: $k = n$ и $R = R_{n\times n} = (r_{ij})$.
2. Если КАИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ является вполне смешанной игрой и ее значение отлично от нуля $(V_R^* \neq 0)$, то платежная матрица $R = R_{n\times n} = (r_{ij})$ этой игры является невырожденной матрицей, т.е. ее определитель отличен от нуля $(det(R) \neq 0)$ и, следовательно, существует обратная матрица R^{-1}.
3. Пусть $J_n = (1; ...; 1; ...; 1)$ – n-мерный вектор (точнее, вектор-строка), все компоненты которого равняются единице, $R = R_{n\times n} = (r_{ij})$ – заданная квадратная невырожденная матрица. Тогда если в КАИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ игрок 2 имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то игрок 1 имеет в ней единственную оптимальную стратегию p^*, для которой выполняется равенство:

$$p^* = \frac{J_n * R^{-1}}{J_n * R^{-1} * J_n^T}, \tag{1}$$

при этом для значения игры выполняется равенство:

$$V_R^* = \frac{1}{J_n \cdot R^{-1} \cdot J_n^T}. \tag{2}$$

4. Пусть $J_n = (1; ...; 1; ...; 1)$ – n-мерный вектор (точнее, вектор-строка), все компоненты которого равняются единице; $R = R_{n\times n} = (r_{ij})$ – заданная квадратная невырожденная матрица. Тогда если в КАИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ игрок 1 имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то игрок 2 имеет в ней единственную оптимальную стратегию q^*, для которой выполняется равенство:

$$q^* = \frac{R^{-1} * J_n^T}{J_n * R^{-1} * J_n^T}, \tag{3}$$

при этом для значения V_R^* игры выполняется равенство (2).

5. Пусть $R = R_{n\times n} = (r_{ij})$ – заданная квадратная матрица. Тогда если в КАИ $\Gamma_R = \langle I, J, R \rangle$ оба игрока имеют вполне смешанные оптимальные стратегии, причем для одного из них все его оптимальные стратегии являются вполне смешанными стратегиями, то эта игра является вполне смешанной игрой, а оба игрока имеют единственные оптимальные стратегии, а именно, вполне смешанные оптимальные стратегии p^*, q^*. Если при этом платежная матрица $R = R_{n\times n} = (r_{ij})$ этой игры является невырожденной матрицей, то единственные оптимальные стратегии p^*, q^* игроков могут быть найдены по формулам (1), (3) соответственно, а значение V_R^* игры Γ_R – по формуле (2).

Существует простейший признак существования в игре вполне смешанной ситуации равновесия [7, с. 203], а также несколько признаков полной смешанности игры. Например, известно, что любая КАИ с сильно доминирующей диагональю является вполне смешанной игрой [2, с. 82-83].

Комбинированное применение статистических и антагонистических игр

Как отмечалось выше, суть комбинированного применения статистических и антагонистических игр заключается в отождествлении исходной статистической игры с АИ, характеризующей процесс принятия управленческих решений, т.е. с АИ, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания исходной статистической игры. Для поиска оптимальной стратегии ЛПР можно решить АИ, характеризующую процесс принятия управленческих решений.

Отождествление статистической игры с АИ, характеризующей процесс принятия управленческих решений, позволяет применять инструментарий теории АИ для принятия решений с учетом неполноты информации, неопределенности, конфликтности и обусловленного ими экономического риска. Такое отождествление позволяет выбрать одно оптимальное решение или упорядочить все имеющиеся чистые стратегии ЛПР. Более того, отождествление статистической игры с соответствующей АИ позволяет сформировать оптимальную смешанную стратегию ЛПР, если использование смешанных стратегий возможно и экономически целесообразно. Наконец, отождествление статистической игры с соответствующей АИ позволяет не проводить многошаговые эксперименты, что, в частности, позволяет ЛПР экономить ресурсы, в первую очередь временной и финансовый. Д. Блекуэлл и М.А. Гиршик также отмечают этот факт. По их мнению, в статистических играх нужно учитывать «возможность принимать решения без испытаний, что иногда может быть желательно, когда стоимость наблюдений велика» [1, с. 105].

В случае принятия управленческих решений в экономике полноценное рассмотрение всех возможных обстоятельств реализаций всех возможных управленческих решений может оказаться невыполнимым. Во-первых, именно в силу наличия неполноты информации, неопределенности, конфликтности и обусловленного ими экономического риска точное прогнозирование будущих значений всех параметров и точное предвидение будущего состояния экономической среды невозможны. Во-вторых, реальное проведение испытаний (для получения априорной и / или апостериорной информации о поведении природы) в условиях реальной экономики невозможно. В-третьих, проведение модельных экспериментов, которые имитируют поведение природы, в экономических исследованиях часто малопродуктивно, так как невозможно точно отразить и учесть все возможные сценарии будущего развития условий реализации принятого управленческого решения и все возможные способы действий всех многочисленных участников. Собственно, эти и другие особенности экономики представляют собой следствие принципиальной невозможности точного знания состояния экономической среды в будущем.

Традиционное применение статистических игр имеет известные преимущества при принятии управленческих решений в технике, например, в случае проверки качества уже выпущенной партии изделий, когда возможно проведение испытаний с целью статистической проверки выдвинутой статистической гипотезы. Иная ситуация имеет место при принятии управленческих решений в экономике, особенно в случае, когда реализация принятого сейчас решения растянута во времени, что типично, например, при реализации мегапроектов или в управлении корпорациями. Проведение любых испытаний сейчас (так сказать, сегодня) с целью проверки гипотезы о состоянии экономической среды, в котором оно окажется в будущем (так сказать, завтра, послезавтра и т.п.), невозможно в принципе и бессмысленно по сути.

Для определенности рассматриваемые теоретико-игровые модели мы считаем конечными играми. В конечномерном случае АИ – это матричная игра, т.е. конечная игра двух лиц с нулевой суммой. Однако все исследования могут быть обобщены и на бесконечномерный случай: все предлагаемые подходы, методы и модели могут быть обобщены на случай бесконечных антагонистических игр, обладающих необходимыми свойствами.

Пусть процесс принятия управленческих решений характеризует статистическая игра, составными частями которой являются следующие элементы:

- игрок 1 – это ЛПР, поведение которого сводится к осознанному выбору решения (чистой или смешанной стратегии), при условии, что задано множество $I = \{1; 2; ...; i; ...; k\}$ его чистых стратегий i;
- игрок 2 – это экономическая среда (природа), которая в момент реализации ЛПР своего принятого решения может случайным образом оказаться в одном из своих попарно несовместных возможных состояний из заданного множества $J = \{1; 2; ...; j; ...; n\}$ его возможных состояний j;
- отсутствие у ЛПР априорной информации о том, в каком именно своем возможном состоянии окажется экономическая среда в момент реализации им своего принятого решения (какую свою чистую стратегию реализует второй игрок);
- отсутствие у ЛПР априорной информации о том, в каком именно своем возможном состоянии окажется экономическая среда после реализации им своего принятого решения (какую свою чистую стратегию реализует в будущем второй игрок);
- полностью или частично заданный функционал оценивания (платежная матрица), при этом значение его элемента r_{ij} характеризует выигрыш ЛПР, т.е. эффективность принятого решения в случае выбора (реализации) ЛПР своей чистой стратегии i в условиях, когда экономическая среда оказалась в своем возможном состоянии j, где $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$.

Итак, исходя из приведенной выше схемы, процесс принятия управленческих решений можно формально описать игрой, т.е. следующей системой $\langle I; J; R \rangle$, при этом принято выделять творческую и формальную составляющую процесса построения теоретико-игровой модели [9, с. 7-10].

Нужно учитывать, что в случае принятия статистических решений для рассматриваемой ситуации, заданной в поле имеющейся информационной ситуации (ИС) относительно стратегии поведения экономической среды, возможно применение разных критериев оптимальности, в том числе и принципа гарантированного результата.

Если все предпосылки корректности комбинированного применения статистических и антагонистических игр в экономике [7, с. 117-118] справедливы, то схема комбинированного применения статистических и антагонистических игр для принятия управленческих решений в экономике может быть представлена в виде последовательности действий, состоящей из выполнения следующих девяти шагов.

1. Формирование множества чистых стратегий игрока 1, т.е. перечисление возможных решений ЛПР (статистика), а также интерпретация смешанных стратегий игрока 1 и их компонент, если его чистые стратегии совместимы.
2. Формирование множества чистых стратегий игрока 2, т.е. перечисление возможных состояний экономической среды (природы) или возможных сценариев будущего развития имеющейся ситуации.
3. Определение и формализация основных показателей эффективности и полезности, построение функционала оценивания, т.е. платежной матрицы игры, характеризующей процесс принятия управленческих решений в экономике.
4. Определение имеющейся ИС относительно стратегии поведения природы (экономической среды). Комбинированное применение статистических и антагонистических игр абсолютно корректно в случае, если с точки зрения ЛПР ему нецелесообразно рисковать, когда интересы ЛПР и экономической среды антагонистичны. Однако комбинированное применение статистических и антагонистических игр часто бывает возможным, целесообразным и корректным и в поле других ИС.
5. Решение соответствующей АИ, характеризующей процесс принятия управленческих решений, точнее КАИ, если построенная платежная матрица известна полностью, или НАИ, если построенная платежная матрица известна частично.
6. На основе найденного решения АИ, характеризующего процесс принятия управленческих решений, выбор оптимального решения.
7. Анализ корректности и эффективности, точнее математической корректности, экономической корректности, экономической целесообразности и экономической эффективности, выбранного оптимального управленческого решения.
8. Реализация выбранного оптимального решения.
9. Корректировка (по необходимости и возможности) выбранного оптимального управленческого решения в процессе его реализации, а также после его реализации.

Вообще говоря, статистические игры допускают решение как в чистых стратегиях, так и в смешанных. Но,найденная оптимальная стратегия $p^* = (p_1^*; ...; p_i^*; ...; p_k^*)$ игрока 1 (ЛПР) может быть реализована в качестве управленческого решения тогда и только тогда, когда этот вектор, его компоненты p_i^* и их значения допускают экономическую интерпретацию, адекватную рассматриваемой ситуации принятия решений.

Принятие управленческих решений в экономике – это, вообще говоря, искусство, поэтому, ориентируясь на найденную ситуацию равновесия в АИ, характеризующей процесс принятия управленческих решений, ЛПР не обязано строго придерживаться соответствующей оптимальной стратегии первого игрока.

Принятие управленческих решений в экономике, основанное на комбинированном применении статистических и антагонистических игр, обладает рядом достоинств, в т.ч. позволяет экономить средства ЛПР, адекватно учитывать неполноту информации, неопределенность, конфликтность и обусловленный ими экономический риск, а также позволяет оптимизировать уровень экономического риска. Еще одним преимуществом предлагаемой концепции является прозрачность методов принятия управленческих решений.

Принятие управленческих решений в экономике, основанное на комбинированном применении статистических и антагонистических игр, обладает и недостатками, например, чрезмерной осторожностью. Поэтому комбинированное применение статистических и антагонистических игр наиболее целесообразно использовать в условиях, когда ЛПР считает, что ему не следует рисковать. Кроме того, согласно предпочтениям ЛПР, имеющейся у него информации, его профессиональной квалификации, компетентности, опыта и интуиции оптимальное управленческое решение, которое оно выберет для реализации, может отличаться от оптимальной стратегии, на которой основывается это управленческое решение.

Комбинированное применение статистических и антагонистических игр, даже в случае применения конечных игр, существенным образом расширяет сферу применения теоретико-игрового моделирования процесса принятия управленческих решений в экономике.

Кроме того, комбинированное применение статистических и антагонистических игр совместно с такими разделами математики как энтропийный подход, нечеткая математика, теория вероятностей и математическая статистика, теория случайных процессов, прикладная статистика и эконометрия, конкретная математика и другими разделами математики позволяет успешно решать самые разные задачи принятия управленческих решений с учетом неполноты информации, неопределенности, конфликтности и обусловленного ими экономического риска. В частности, позволяет решать задачу распределения ресурсов, находить структуру эффективного портфеля, выбирать наиболее надежные проекты, выбирать потенциальных заемщиков, обладающих наибольшим уровнем относительной репутации, определять значение индивидуальной ставки кредитования, оценивать интегральный потенциал предприятия и т.п. Рассмотрим возможности комбинированного применения статистических и антагонистических игр на примере решения отдельных задач современной теории портфеля, в частности, на примере решения задач выбора в поле различных информационных ситуаций структуры эффективного, строго говоря, структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Марковица и / или в модели Блэка.

Традиционная модель Марковица

Введем следующие обозначения: $\boldsymbol{k}$ – количество активов, составляющих портфель; $\boldsymbol{x_i}$ – доля актива $\boldsymbol{i}$-го вида в портфеле; $\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{x_1; ...; x_i; ...; x_k}\right)$ – портфель (точнее, его структура); $\boldsymbol{R_i}$ – дискретная СВ, характеризующая норму прибыли актива $\boldsymbol{i}$-го вида; $\boldsymbol{R_x} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{R_i * x_i}$ – дискретная СВ, характеризующая норму прибыли портфеля $\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{x_1; ...; x_i; ...; x_k}\right)$; $\boldsymbol{m_i} = \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{R_i}\right)$ и $\boldsymbol{m_x} = \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{R_x}\right)$ – ожидаемые (средние) нормы прибыли активов и портфеля, т.е. математические ожидания соответствующих СВ; $\sigma_i^2 = \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{R_i}\right)$ и $\sigma_x^2 = \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{R_x}\right)$ – уровни риска активов и портфеля, т.е. дисперсии соответствующих СВ; $\boldsymbol{c_{i\,l}} = \boldsymbol{cov}\left(\boldsymbol{R_i; R_l}\right)$ – ковариации между соответствующими СВ, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C_{k\times k}} = \left(\boldsymbol{c_{i\,l}}\right)$ – ковариационная матрица.

Если закон распределения вероятностей СВ $\boldsymbol{R_i}$, характеризующей норму прибыли актива $\boldsymbol{i}$-го вида, известен полностью, то это означает, что имеет место ИС $\boldsymbol{I_1}$, известны точные истинные значения $\boldsymbol{r_{i\,j}}$ нормы прибыли (в процентах) актива $\boldsymbol{i}$-го вида в условиях, когда экономическая среда (фондовый рынок) оказалась в своем $\boldsymbol{j}$-м возможном состоянии, а также известны точные истинные значения вероятностей $\boldsymbol{q_j}$ возможных состояний экономической среды. В этом случае значения числовых характеристик всех дискретных СВ $\boldsymbol{R_i}$ могут быть вычислены по формулам, хорошо известным из теории вероятностей:

$$\boldsymbol{m_i} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r_{i\,j} * q_j}\,,\ \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1, k}}\,, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{c_{i\,i}} = \sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r_{i\,j}^2 * q_j} - \boldsymbol{m_i^2}\,,\ \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1, k}}\,, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{c_{l\,i}} = \boldsymbol{c_{i\,l}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r_{i\,j} * r_{l\,j} * q_j} - \boldsymbol{m_i * m_l}\,,$$
$$\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1, k-1}}\,,\ \boldsymbol{l} = \overline{\boldsymbol{i, k}}\,. \tag{6}$$

Как правило, на практике вместо неизвестных значений $\boldsymbol{r_{i\,j}}$ дискретных СВ, характеризующих нормы прибыли активов, используют значения норм прибыли этих активов, наблюдавшиеся в прошлые периоды времени, а вместо значений числовых характеристик (4-6) используют значения соответствующих статистических оценок этих числовых характеристик.

Согласно современной теории портфеля, традиционная модель Марковица задачи выбора структуры эффективного портфеля представляет собой следующую задачу двухкритериальной оптимизации:

$$m_x = \sum_{i=1}^{k} m_i * x_i \to \max_x , \quad (7)$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} c_{il} * x_i * x_l \to \min_x , \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1 , \quad (9)$$

$$x_i \geq 0 , \ i = \overline{1, k} . \quad (10)$$

Эффективным портфелем в модели Марковица будем называть портфель, структура которого является оптимальным по Парето решением задачи (7-10), а *эффективным портфелем в модели Блэка* – портфель, структура которого является оптимальным по Парето решением задачи (7-9). Согласно определению, эффективность портфеля означает, что не существует допустимого портфеля, обладающего не меньшим значением ожидаемой нормы прибыли, чем у этого портфеля, и одновременно с этим меньшим значением уровня риска или обладающего не большим значением уровня риска, чем у этого портфеля, и одновременно с этим большим значением ожидаемой нормы прибыли.

Задача поиска структуры эффективного портфеля, как правило, имеет не один единственный эффективный портфель. Однако множество эффективных портфелей значительно уже множества допустимых портфелей. Кроме того, принимая решение о структуре формируемого им портфеля, инвестор должен выбрать среди эффективных портфелей такой портфель, который обладает наилучшим с точки зрения инвестора сочетанием значений числовых характеристик, т.е. ожидаемой нормы прибыли и уровня риска.

Для поиска оптимальных по Парето решений заданной задачи многокритериальной оптимизации ее, как правило, приводят к задаче однокритериальной оптимизации функции полезности, которая представляет собой некоторую свертку (выпуклую линейную комбинацию) всех критериев. Например, задачу с критериями (7), (8) можно привести к задаче максимизации функции полезности, имеющей вид $u(x) = a \cdot m_x - (1-a) \cdot \sigma_x^2$, где a – параметр, удовлетворяющий неравенствам $0 \leq a \leq 1$. Конкретное числовое значение параметра a задает инвестор (ЛПР), при этом выбранное им значение параметра a характеризует его отношение к риску, точнее степень его несклонности к риску.

В случаях, когда с точки зрения инвестора ему нецелесообразно рисковать, он должен формировать портфель, обладающий наименьшим уровнем риска. К таким случаям можно отнести условия жесткой конкуренции, кризиса, предкризисной ситуации и/или случай, когда отношение ЛПР к риску характеризуется его существенной несклонностью к риску. Портфель, обладающий наименьшим уровнем риска, всегда является эффективным портфелем в соответствующей модели.

В частном, вырожденном, случае множество портфелей, обладающих наименьшим (одним и тем же) уровнем риска, может содержать более одного портфеля. Собственно, в этом случае совокупность всех портфелей, обладающих наименьшим уровнем риска, представляет собой бесконечное множество мощности континуум. В таком вырожденном случае из портфелей, обладающих наименьшим уровнем риска, только один будет являться эффективным портфелем, а именно тот из них, который характеризуется наибольшим значением ожидаемой нормы прибыли. В этом вырожденном случае поиск портфеля, обладающего наибольшим значением ожидаемой нормы прибыли, среди множества портфелей, обладающих наименьшим уровнем риска, представляет собой технически несложную задачу условной оптимизации. Кроме того, для реальных данных этот теоретически возможный вырожденный случай практически не встречается. В связи с этим далее везде при рассмотрении теоретико-игрового метода поиска портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, описанный здесь вырожденный случай учитывать не будем.

Здесь и далее везде символом x^* будем обозначать вектор, характеризующий портфель, который обладает наименьшим уровнем риска, измеренного дисперсией соответствующей случайной величины. Чтобы найти структуру x^* портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Марковица, необходимо решить задачу (8-10). А для того, чтобы найти структуру x^* портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Блэка, необходимо решить задачу (8-9). Очевидно, структура портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Блэка, может не совпадать со структурой портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Марковица. Однако, если все компоненты портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Блэка, являются неотрицательными числами, то решение задачи (8-10) совпадает с решением задачи (8-9). Отметим также, если инвестор ищет структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, то это соответствует нулевому значению параметра a в максимизируемой функции полезности $u(x)$ инвестора ($a = 0$), что означает его абсолютную несклонность к риску.

Предварительно отметим хорошо известные свойства числовых характеристик допустимых портфелей. Пусть $X = \left\{ x = (x_1; ...; x_k) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} x_i = 1 \right\}$ – множество портфелей, допустимых в модели Блэка, $X^+ = \left\{ x = (x_1; ...; x_k) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} x_i = 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, k} \right\}$ – множество портфелей, допустимых в модели Марковица. Тогда, если $x \in X^+$, то справедливы соотношения $\min_i m_i \leq m_x \leq \max_i m_i$ и $\min_{x \in X^+} \sigma_x^2 \leq \sigma_x^2 \leq \max_i \sigma_i^2$, а если $x \in X$, то справедливо соотношение $\min_{x \in X} \sigma_x^2 \leq \sigma_x^2$, при этом $0 \leq \min_{x \in X} \sigma_x^2 \leq \min_{x \in X^+} \sigma_x^2$.

Теоретико-игровой метод поиска в поле различных информационных ситуаций структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска

В случае применения теоретико-игрового метода поиска структуры эффективного портфеля ситуацию принятия инвестиционных решений характеризует соответствующая АИ. Элементам этой игры можно придать следующий экономический смысл. Игрок 1 – это, как правило, ЛПР, т.е. инвестор, формирующий свой портфель из выбранных им активов. Игрок 2 – это, как правило, экономическая среда, т.е. фондовый рынок, на котором обращаются активы, в т.ч. и выбранные инвестором. Чистыми стратегиями игрока 1 выступают активы, выбранные инвестором для формирования портфеля. Оптимальную стратегию игрока 1, точнее, вектор, ее характеризующий, можно интерпретировать как структуру портфеля, а компоненты этого вектора – доли, в которых инвестор распределяет свои средства между выбранными активами. Согласно современной теории портфеля, инвестор в качестве формируемого им портфеля должен выбрать из множества эффективных портфелей тот, который с его точки зрения является оптимальным, т.е. характеризуется наилучшим сочетанием значения ожидаемой нормы прибыли и значения уровня риска, т.е. дисперсии (или среднеквадратичного отклонения). Однако оптимальная стратегия первого игрока не обязательно задает структуру эффективного портфеля. В связи с этим возникает принципиально важный вопрос, который можно назвать вопросом корректности применения теоретико-игрового метода поиска структуры эффективного портфеля. Вопрос можно сформулировать следующим образом. При соблюдении каких требований (условий) оптимальная стратегия игрока 1 в АИ, характеризующей ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля, будет задавать структуру эффективного портфеля? Ниже будут приведены формулировки несколько теорем, обосновывающих корректность применения теоретико-игрового метода поиска в поле различных информационных ситуаций структуры эффективного портфеля. В первой из этих теорем будет рассмотрена АИ, заданная ковариационной матрицей.

Пусть $J_k = (1; ...; 1; ...; 1)$ – k-мерный вектор (точнее, вектор-строка), все компоненты которого равняются единице, тогда справедлива следующая теорема [7, с. 216] о теоретико-игровом методе поиска структуры эффективного портфеля.

Теорема 1. Пусть ковариационная матрица $C = C_{k\times k} = (c_{il})$ является положительно определенной, а в АИ, заданной матрицей $C = C_{k\times k} = (c_{il})$, существует вполне смешанная ситуация равновесия $(p^*; q^*)$. Тогда АИ, заданная матрицей C, является вполне смешанной игрой, положительный вектор $x^* = q^* = p^* = \dfrac{J_k * C^{-1}}{J_k * C^{-1} * J_k^T}$ – оптимальным решением задачи (8-9), число $\min_x \sigma_x^2 = \sigma_x^{*2} = x^* * C * x^{*T} = V_C^*$ – минимальным значением критерия (8), где $V_C^* = \dfrac{1}{J_k * C^{-1} * J_k^T}$ – цена данной АИ, $\sigma_x^{*2} = D(R_x^*)$ – дисперсия СВ $R_x^* = \sum_{i=1}^{k} R_i * x_i^*$, характеризующей норму прибыли портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска.

Сразу подчеркнем, что если ковариационная матрица $C = C_{k\times k} = (c_{il})$ является положительно определенной, то в АИ, заданной матрицей $C = C_{k\times k} = (c_{il})$, седловая точка отсутствует. Поэтому АИ, заданная положительно определенной ковариационной матрицей $C = C_{k\times k} = (c_{il})$, не имеет решения в чистых стратегиях игроков. Более того, даже для произвольной ковариационной матрицы $C = C_{k\times k} = (c_{il})$, КАИ, заданная произвольной ковариационной матрицей $C = C_{k\times k} = (c_{il})$, имеет седловую точку в одном и только в одном, вырожденном, случае, когда все ковариации c_{il} равны одному и тому же числу: $c_{il} = c = const$, $i = \overline{1, k}$, $l = \overline{1, k}$. Очевидно, в этом, вырожденном, случае константа c может представлять собой заданное неотрицательное число.

Если требования теоремы 1 справедливы, то совпавшие вполне смешанные оптимальные стратегии игроков определяют структуру $x^* = q^* = p^*$ портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, при этом положительный вектор $x^* = q^* = p^*$ является оптимальным решением, как задачи (8-9), так и задачи (8-10). Подчеркнем, что если требования теоремы 1 справедливы, то $\sigma_x^{*2} = \min_{x\in X^+} \sigma_x^2 = \min_{x\in X} \sigma_x^2 = V_C^* > 0$. Как правило, значение ожидаемой нормы прибыли портфеля x^*, обладающего наименьшим уровнем риска, не является наихудшим (т.е. наименьшим) на множестве всех допустимых портфелей: в невырожденном случае выполняются соотношения

$$\sigma_x^{*2} = D(R_x^*) = x^* * C * x^{*T} < \min_i \sigma_i^2,$$

$$m_x^* = M(R_x^*) = \sum_{i=1}^{k} m_i * x_i^* > \min_i m_i.$$

Если в формулировке теоремы 1 требование положительной определенности ковариационной матрицы заменить требованием ее положительной полуопределенности (неотрицательной определенности), то ковариационная матрица может оказаться вырожденной, что влечет невозможность обращения матрицы C, при этом, если $\det(C) = 0$, то будет выполняться равенство $\sigma_x^{*2} = \min_{x\in X^+} \sigma_x^2 = \min_{x\in X} \sigma_x^2 = 0$.

Для традиционной модели Марковица имеются и другие теоретико-игровые методы поиска структуры эффективного портфеля. Решение задачи выбора структуры эффективного портфеля может быть основано на применении АИ, заданной матрицей, элементы которой представляют собой значения норм прибыли активов, т.е. справедлива следующая теорема [7, с. 217].

Теорема 2. Пусть в АИ, заданной матрицей $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{k\times n} = \left(\boldsymbol{r}_{ij}\right)$, где $\boldsymbol{r}_{ij}$ – значение дискретной СВ $\boldsymbol{R}_i$, т.е. значение нормы прибыли актива $\boldsymbol{i}$-го вида в условиях, когда экономическая среда оказалась в своем $\boldsymbol{j}$-м возможном состоянии, отсутствует седловая точка, а игрок 2 имеет вполне смешанную оптимальную стратегию. Тогда оптимальная стратегия $\boldsymbol{p}^* = \left(\boldsymbol{p}_1^*; ...; \boldsymbol{p}_i^*; ...; \boldsymbol{p}_k^*\right)$ игрока 1 задает структуру эффективного портфеля, а именно портфеля $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{p}^*$, обладающего наименьшим уровнем риска, как в модели Марковица, так и в модели Блэка.

В этом случае портфель $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{p}^*$ будет представлять собой портфель без риска (собственно, портфель с нулевым несистематическим риском). При этом портфель без риска будет найден теоретико-игровым методом, обоснованным теоремой 2, и тогда, когда все активы, составляющие этот портфель, являются рискованными. Дело в том, что если все требования теоремы 2 справедливы, то $\boldsymbol{R}_x^* = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{R}_i * \boldsymbol{x}_i^* \equiv \ \equiv \boldsymbol{V}_R^* = \boldsymbol{const}$, откуда для значения дисперсии СВ $\boldsymbol{R}_x^*$ получаем $\min_x \sigma_x^2 = \sigma_x^{*2} = \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{R}_x^*\right) = = \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{V}_R^*\right) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{const}) = \boldsymbol{0}$, поэтому портфель $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{p}^*$ одновременно является портфелем без риска и в модели Марковица, и в модели Блэка. Очевидно, в этом случае невозможно улучшить (уменьшить) значение уровня риска портфеля.

Важно учитывать, что при нарушении требований теоремы 2, т.е. при отсутствии у игрока 2 вполне смешанной оптимальной стратегии, оптимальная стратегия $\boldsymbol{p}^* = \left(\boldsymbol{p}_1^*; ...; \boldsymbol{p}_i^*; ...; \boldsymbol{p}_k^*\right)$ игрока 1 в соответствующей АИ $\Gamma_R = \left\langle \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{R} \right\rangle$ может задавать структуру портфеля, не являющегося эффективным портфелем.

Теоремы 1, 2 и обосновывают возможность, математическую и экономическую корректность применения АИ для решения задачи поиска структуры эффективного портфеля для традиционной модели Марковица.

Итак, при соблюдении всех требований теоремы 2 портфель $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{p}^*$ является портфелем без риска, т.е. портфелем, обладающим нулевой дисперсией, так как значения норм прибыли этого портфеля будут равны значению цены игры для всех состояний экономической среды, т.е. для всех столбцов матрицы $\boldsymbol{R}$. При условии единственности портфеля без риска, он обязательно является эффективным портфелем, что обосновывает математическую корректность применения теории игр в теории портфеля. В случае, когда имеется более одного портфеля без риска, среди них необходимо выбрать тот, который обладает наибольшим значением ожидаемой нормы прибыли. Наконец, если окажется, что значение цены рассматриваемой игры превышает значение доходности безрискового актива, обращающегося на фондовом рынке, то в этом случае формирование портфеля $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{p}^*$ следует признать экономически корректным, экономически целесообразным и экономически эффективным.

Перед тем, как перейти к теоретико-игровому методу поиска в поле 4-й, 3-й и 5-й информационных ситуаций структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, рассмотрим, как на основании теоретико-игрового подхода может быть решена задача (8-9) в том случае, когда портфель, обладающий наименьшим уровнем риска в модели Блэка, и портфель, обладающий наименьшим уровнем риска в модели Марковица, не совпадают, т.е. эти портфели имеют разные структуры. При соблюдении всех требований теоремы 2 решение задачи (8-9) удовлетворяет требованиям (10) неотрицательности всех переменных, при этом решение задачи (8-9) совпадает с решением задачи (8-10). Однако, как известно, в общем случае решение задачи (8-9) не всегда совпадает с решением задачи (8-10). В таких случаях решение задачи (8-9) не удовлетворяет требованиям (10) неотрицательности всех переменных, а для решения задачи (8-9) теоретико-игровой метод оптимизации уровня риска портфеля следует уточнить.

Модель Блэка аналогична модели Марковица, но, в отличие от последней, в ней отсутствует условие неотрицательности значений долей активов в допустимых портфелях. Это означает, что инвестор имеет право осуществлять короткие продажи, т.е. продавать активы, предоставленные ему в заем. В этом случае инвестор рассчитывает на снижение цены актива и поэтому планирует возвратить заем этим же активом, но приобретенным по более низкой цене. Вследствие отсутствия ограничений на значения долей активов в портфелях, допустимых в модели Блэка, теоретически значение нормы прибыли портфеля не ограничено.

Для теоретико-игрового поиска структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Блэка, можно поступить следующим образом. Сначала от исходной матрицы $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{k\times n} = \left(\boldsymbol{r}_{ij}\right)$ следует перейти к матрице $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}'_{(2\cdot k)\times n} = \left(\boldsymbol{r}'_{ij}\right)$, в которой для элементов, расположенных в нечетных строках, выполняются равенства $\boldsymbol{r}'_{2\cdot i-1\,j} = \boldsymbol{r}_{ij}$, $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}$, а для элементов, расположенных в четных строках, выполняются равенства $\boldsymbol{r}'_{2\cdot i\,j} = -\boldsymbol{r}_{ij}$, $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}$. Возможность теоретико-игрового метода решения задачи (8-9), т.е. теоретико-игрового метода оптимизации уровня риска портфелей, допустимых в модели Блэка, обосновывает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть в АИ, заданной матрицей $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}'_{(2\cdot k)\times n} = \left(\boldsymbol{r}'_{ij}\right)$, где $\boldsymbol{r}'_{2\cdot i-1\,j} = \boldsymbol{r}_{ij}$, $\boldsymbol{r}'_{2\cdot i\,j} = -\boldsymbol{r}_{ij}$, $\boldsymbol{r}_{ij}$ –

j -е возможное значение дискретной СВ R_i, т.е. значение нормы прибыли актива i -го вида в условиях, когда экономическая среда оказалась в своем j -м возможном состоянии, отсутствует седловая точка, а игрок 2 имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, т.е. оптимальную стратегию $q^* = \left(q^*_1; ...; q^*_j; ...; q^*_n \right)$, для которой $q^*_j > 0$, $j = \overline{1, n}$. Тогда оптимальная стратегия $p^* = \left(p^*_1; ...; p^*_i; ...; p^*_{2 \cdot k} \right)$ игрока 1 позволяет найти структуру эффективного портфеля, а именно, портфеля $x^* = \left(x^*_1; ...; x^*_i; ...; x^*_k \right)$, где $x^*_i = \dfrac{p^*_{2*i-1} - p^*_{2*i}}{\sum\limits_{l=1}^{k} \left(p^*_{2*l-1} - p^*_{2*l} \right)}$, $i = \overline{1, k}$, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Блэка.

Как и в случае теоремы 2, при соблюдении всех требований теоремы 3 вектор x^*, построенный согласно приведенной в теореме 3 формуле, задает структуру портфеля без риска: если в КАИ, заданной матрицей $R' = R'_{(2 \cdot k) \times n} = \left(r'_{ij} \right)$, игрок 2 имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то справедливо равенство $R^*_x = \sum\limits_{i=1}^{k} R_i * x^*_i \equiv \dfrac{V^{*}_R{}'}{\sum\limits_{l=1}^{k} \left(p^*_{2*l-1} - p^*_{2*l} \right)} = const$, где $V^{*}_R{}'$ — значение (цена) КАИ, заданной матрицей $R' = R'_{(2*k) \times n} = \left(r'_{ij} \right)$, $x^*_i = \dfrac{p^*_{2*i-1} - p^*_{2*i}}{\sum\limits_{l=1}^{k} \left(p^*_{2*l-1} - p^*_{2*l} \right)}$, $i = \overline{1, k}$.

Это означает, что в условиях теоремы 3 справедливо равенство $\min\limits_{x} \sigma^2_x = \sigma^{*2}_x = D\left(R^*_x \right) = D\left(const \right) = 0$, где σ^{*2}_x – дисперсия случайной величины $R^*_x = \sum\limits_{i=1}^{k} R_i \cdot x^*_i$, характеризующей портфель, обладающий наименьшим уровнем риска. Очевидно, если окажется, что число $\dfrac{V^{*}_R{}'}{\sum\limits_{l=1}^{k} \left(p^*_{2*l-1} - p^*_{2*l} \right)}$ превышает значение доходности безрискового актива, обращающегося на фондовом рынке, то в этом случае формирование портфеля x^* по формуле, приведенной в теореме 3, следует признать экономически корректным, экономически целесообразным и экономически эффективным.

К теореме 2 следует сделать несколько замечаний. Во-первых, если не имеет место вырожденный случай, то необходимым условием для выполнения требований теоремы 2 является справедливость неравенства $k \geq n$ (число активов должно быть не меньше числа возможных состояний экономической среды). На практике это означает, что число активов должно быть не меньше числа наблюдений.

Во-вторых, требование отсутствия седловой точки в АИ, заданной матрицей $R = R_{k \times n} = \left(r_{ij} \right)$, может показаться излишним. Это не совсем так. Благодаря этому требованию становится невозможным вырожденный случай, когда $r_{ij} = c = const$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$.

В-третьих, теорема 2 имеет ряд преимуществ по сравнению с теоремой 1. Так, если ковариационная матрица является вырожденной, т.е. $det\left(C \right) = 0$, то она не является положительно определенной матрицей и, как следствие, теорема 1 может оказаться неприменимой.

В-четвертых, применение теоремы 2 не требует знания точных истинных законов распределений всех СВ, характеризующих нормы прибыли активов, и, в частности, не требует знания точных истинных значений числовых характеристик этих СВ. Именно по этой причине теорема 2 позволяет обобщить традиционную модель Марковица, представляющую собой задачу двухкритериальной оптимизации, на случай, когда неизвестны значения вероятностей состояний экономической среды (фондового рынка), т.е. когда неизвестны законы распределения СВ, характеризующих нормы прибыли активов. При этом если в традиционной модели Марковица числовые характеристики активов представляют собой известные константы, то в обобщенных моделях числовые характеристики активов – это уже функции от нескольких переменных, а именно, функции от неизвестных значений вероятностей q_1,…, q_j,…, q_n состояний экономической среды.

Обобщенные модели задачи выбора структуры эффективного портфеля представляют собой задачи трехкритериальной оптимизации, при этом их вид зависит от имеющей место информационной ситуации относительно неопределенности поведения экономической среды. Например, в поле 4-й ИС, когда о возможных значениях вероятностей состояний экономической среды нет никакой математической информации, к ожидаемой норме прибыли портфеля, значение которой требуется максимизировать, и уровню риска портфеля, т.е. его дисперсии, значение которой требуется минимизировать, добавляется третий критерий. В качестве этого третьего критерия выступает энтропия Шеннона, значение которой требуется максимизировать. Для достижения своих целей ЛПР, т.е. инвестор, управляет значениями долей. Но, все усложняется тем, что, в отличие от традиционной модели Марковица, неизвестны значения вероятностей состояний экономической среды, и, быть может, неизвестны некоторые точные истинные значения норм прибыли активов, образующих портфель.

Предположим, что значения всех чисел r_{ij} известны, а точные истинные значения вероятностей q_j неизвестны. В этом случае математические ожидания m_i, дисперсии σ^2_i СВ, характеризующих нормы прибыли активов, и ковариации c_{ij} представляют собой функции (4), (5) и (6), соответственно, нескольких переменных, аргументами которых являются неизвестные вероятности q_1,…, q_j,…, q_n состояний экономической среды. Следовательно, числовые характеристики $m_x = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i * x_i$, $\sigma^2_x = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{l=1}^{k} c_{il} * x_i * x_l$ СВ $R_x = \sum\limits_{i=1}^{k} R_i * x_i$, характеризующей норму прибыли портфеля, также представляют собой функции нескольких переменных, аргументами которых являются неизвестные вероятности $q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_n$ состояний экономической среды и значения долей $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k$ активов.

Если имеет место ИС I_4 и о поведении экономической среды нет никакой информации, т.е. для значений вероятностей $q_1, \ldots, q_n$ нет никаких ограничений кроме естественных, то следует применить энтропийный подход, при этом модель задачи выбора структуры эффективного портфеля в поле четвертой ИС представляет собой следующую задачу трехкритериальной оптимизации [6, с. 35]:

$$H(q) = H(q_1; ...; q_n) = -\sum_{j=1}^{n} q_j * \ln q_j \to \max_q , \quad (11)$$

$$m_x = \sum_{i=1}^{k} m_i * x_i \to \max_x , \quad (12)$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} c_{il} * x_i * x_l \to \min_x , \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 , \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1 , \quad (15)$$

$$q_j \ge 0 , \; j = \overline{1, n} , \quad (16)$$

$$x_i \ge 0 , \; i = \overline{1, k} . \quad (17)$$

Предварительно заметим, что задача (11-17) естественным образом может быть приведена к двухкритериальной задаче (7-10) выбора структуры эффективного портфеля, т.е. к традиционной модели Марковица. Известно, что при выполнении ограничений (14) и (16) энтропия Шеннона (11) достигает своего наибольшего значения при равномерном распределении вероятностей, т.е. $\max_q H(q) = H(\hat{q}) = \ln n$, где $\hat{q} = \left(\frac{1}{n}; ...; \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot J_n$ – соответствующий n-мерный вектор. Поэтому, подставляя в формулы для характеристик m_i, σ_i^2, c_{il} оценки $\hat{q}_1 = ... = \hat{q}_n = \frac{1}{n}$, задачу (11-17) можно привести к соответствующей задаче (7-10). Собственно, такой подход означает замену неизвестных значений соответствующих числовых характеристик СВ R_i и R_x их точечными статистическими оценками. Теоретико-игровой метод поиска в поле четвертой ИС структуры портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, обосновывает следующая теорема [6, с. 37].

Теорема 4. Пусть в АИ, заданной матрицей $R = R_{k \times n} = (r_{ij})$, где r_{ij} – значение дискретной СВ R_i, т.е. значение нормы прибыли актива i-го вида в условиях, когда экономическая среда оказалась в своем j-м возможном состоянии, отсутствует седловая точка, а игрок 2 имеет вполне смешанную оптимальную стратегию. Тогда оптимальная стратегия $p^* = (p_1^*; ...; p_i^*; ...; p_k^*)$ игрока 1 задает структуру эффективного портфеля, а именно портфеля $x^* = p^*$, обладающего для всех допустимых распределений $q = (q_1; ...; q_j; ...; q_n)$ вероятностей состояний экономической среды наименьшим уровнем риска как в модели Марковица, так и в модели Блэка.

Если требования теоремы 4 справедливы, то оптимальная стратегия игрока 1 задает вектор $x^* = p^*$, являющийся оптимальным решением, как задачи (13-16), так и задачи (13-17), для всех значений вероятностей $q_1, \ldots, q_n$, удовлетворяющих ограничениям (14), (16). Подобно тому, как было в теореме 2, в этом случае портфель $x^* = p^*$ будет представлять собой портфель без риска. При этом портфель без риска будет найден теоретико-игровым методом, обоснованным теоремой 4, и тогда, когда все активы, составляющие этот портфель, являются рискованными. Кроме того, структура портфеля без риска для всех допустимых распределений вероятностей состояний экономической среды будет одной и той же и будет совпадать с оптимальной стратегией игрока 1 в соответствующей АИ.

Если закон распределения вероятностей состояний экономической среды неизвестен, но известны некоторые соотношения между вероятностями этих состояний, то, согласно классификации информационных ситуаций, предложенной Р.И. Трухаевым, имеет место ИС I_3. Принимая решения в поле третьей ИС, целесообразно использовать некоторые упрощенные формулы оценки неизвестных вероятностей состояний экономической среды. В частных случаях можно применять так называемые формулы Фишберна.

Считается, что в поле третьей ИС на основе вербальной (или статистической) информации можно на качественном уровне установить приоритетность состояний экономической среды. Это означает, что для каждой пары состояний экономической среды можно указать, какое из них имеет больший приоритет (собственно, характеризуется бо́льшим значением вероятности своей реализации), или что они являются эквивалентными (имеют одинаковую вероятность своей реализации). Формулы Фишберна позволяют простым и естественным способом вычислить оценки значений вероятностей состояний экономической среды, если для этих вероятностей задан тот или иной вектор приоритетов.

Если согласно построенному ряду приоритетов имеет место *простое линейное соотношение упорядоченности*, то для возможных значений вероятностей состояний экономической среды справедливы неравенства $q_1 \le q_2 \le ... \le q_n$. Заметим, что при необходимости за счет перенумерации состояний экономической среды всегда можно добиться соответствующего свойства монотонности значений вероятностей q_1, $q_2, \ldots, q_n$. В этой ситуации при отыскании точечной оценки распределения вероятностей состояний экономической среды предложено считать, что значения оценок $\hat{q}_j$ вероятностей реализации состояний экономической среды образуют арифметическую прогрессию. Согласно этой гипотезе, оценки $\hat{q}_j$ можно найти по формуле $\hat{q}_j = \dfrac{2*j}{n*(n+1)}$, $j=\overline{1,n}$, называемой *первой формулой Фишберна*.

Еще один распространенный случай – это случай, когда на основе имеющейся информации можно утверждать, что имеют место *частично усиленные линейные соотношения упорядоченности*:

$$\begin{cases} q_1 \le q_2, \\ q_1 + q_2 \le q_3, \\ \ldots \\ q_1 + q_1 + \ldots + q_{n-2} \le q_{n-1}, \\ q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1} \le q_n. \end{cases}$$

В этой ситуации П. Фишберн предложил считать, что величины $\hat{q}_j$ образуют монотонную геометрическую прогрессию, т.е. их значения могут быть найдены по формуле $\hat{q}_j = \dfrac{2^{j-1}}{2^n - 1}$, $j=\overline{1,n}$, называемой *второй формулой Фишберна*. Отдельные свойства оценок распределений вероятностей, найденных по формулам Фишберна, изучены в статье В.Н. Лившица, А.В. Сигала [4].

Основными моделями задачи выбора структуры эффективного портфеля в поле третьей ИС можно считать две модель: с простым линейным соотношением упорядоченности, с частично усиленным линейным соотношением упорядоченности. Модель задачи выбора структуры эффективного портфеля в поле третьей ИС с простым линейным соотношением упорядоченности имеет следующий вид:

$$H(q) = H(q_1;\ldots;q_n) = -\sum_{j=1}^{n} q_j * \ln q_j \to \max_q, \tag{18}$$

$$m_x = \sum_{i=1}^{k} m_i * x_i \to \max_x, \tag{19}$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} c_{il} * x_i * x_l \to \min_x, \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1, \tag{22}$$

$$q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_n, \tag{23}$$

$$q_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{24}$$

$$x_i \ge 0,\ i=\overline{1,k}. \tag{25}$$

Задача (18-25) может быть приведена к двухкритериальной задаче (7-10) выбора структуры эффективного портфеля, т.е. к традиционной модели Марковица, на основе использования оценки неизвестных значений вероятностей q_j, найденных по первой формуле Фишберна. Модель задачи выбора структуры эффективного портфеля в поле третьей ИС с частично усиленным линейным соотношением упорядоченности имеет следующий вид:

$$H(q) = H(q_1;\ldots;q_n) = -\sum_{j=1}^{n} q_j * \ln q_j \to \max_q, \tag{26}$$

$$m_x = \sum_{i=1}^{k} m_i * x_i \to \max_x, \tag{27}$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} c_{il} * x_i * x_l \to \min_x, \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1, \tag{30}$$

$$\begin{cases} q_1 \le q_2, \\ q_1 + q_2 \le q_3, \\ \ldots \\ q_1 + q_1 + \ldots + q_{n-2} \le q_{n-1}, \\ q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1} \le q_n, \end{cases} \tag{31}$$

$$q_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{32}$$

$$x_i \ge 0,\ i=\overline{1,k}. \tag{33}$$

Задача (26-33) может быть приведена к двухкритериальной задаче (7-10) выбора структуры эффективного портфеля, т.е. к традиционной модели Марковица, на основе использования оценки неизвестных значений вероятностей q_j, найденных по второй формуле Фишберна. Очевидно, и для задачи (18-25), и для задачи (26-33) портфель без риска может быть найден теоретико-игровым методом, обоснованным теоремой 4.

Если имеет место ИС I_5, когда интересы инвестора и экономической среды антагонистичны, то модель задачи выбора структуры эффективного портфеля в поле пятой ИС представляет собой следующую задачу трехкритериальной оптимизации [6, с. 40]:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} c_{il} * x_i * x_l \to \min_x, \tag{34}$$

$$m_x = \sum_{i=1}^{k} m_i * x_i \to \max_x, \tag{35}$$

$$m_x = \sum_{i=1}^{k} m_i * x_i \to \min_q, \tag{35}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \tag{37}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1, \tag{38}$$

$$q_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}, \tag{39}$$

$$x_i \ge 0,\ i=\overline{1,k}. \tag{40}$$

Очевидно, задача (35-40) представляет собой АИ, заданную матрицей $R = R_{k\times n} = (r_{ij})$, где r_{ij} – значение нормы прибыли актива i -го вида в условиях, когда экономическая среда оказалась в своем j -м возможном состоянии. Таким образом, в этом случае процесс принятия решений осуществляется по правилам решения АИ. В частности, если АИ, заданная матрицей $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{k \times n} = \left(\boldsymbol{r}_{ij} \right)$, не имеет седловой точки, имеет единственную ситуацию равновесия $\left(\boldsymbol{p}^*; \boldsymbol{q}^* \right)$, то оптимальная стратегия $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{p}^*$ первого игрока задает структуру эффективного портфеля, а оптимальная стратегия $\boldsymbol{q}^*$ игрока 2 задает наиболее типичную точечную оценку распределения вероятностей состояний экономической среды. Очевидно, при этом портфель $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{p}^*$ не обязательно окажется портфелем без риска.

Если же игра, заданная матрицей $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{k \times n} = \left(\boldsymbol{r}_{ij} \right)$, не имеет седловой точки и имеет более одной ситуации равновесия, то для окончательного выбора структуры эффективного портфеля следует оптимизировать значение критерия (34) на множестве оптимальных стратегий игрока 1 для некоторой оптимальной стратегии игрока 2. Наконец, если в АИ, заданной матрицей $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{k \times n} = \left(\boldsymbol{r}_{ij} \right)$, игрок 2 имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то оптимальная стратегия $\boldsymbol{p}^* = \left(\boldsymbol{p}_1^*; ...; \boldsymbol{p}_i^*; ...; \boldsymbol{p}_k^* \right)$ игрока 1 задает структуру портфеля без риска.

В поле пятой ИС игра, заданная матрицей $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{k \times n} = \left(\boldsymbol{r}_{ij} \right)$, не только характеризует ситуацию принятия решений, но и моделирует ее. В поле других ИС теоретико-игровой метод поиска структуры эффективного портфеля применялся лишь как инструмент: решение соответствующей АИ при соблюдении указанных требований позволяет найти структуру эффективного портфеля, что и обосновывает корректность применения теоретико-игрового подхода в данном случае. В поле пятой ИС модель задачи поиска структуры эффективного портфеля представляет собой соответствующую АИ.

Перед тем как рассмотреть модельные ситуации применения теоретико-игрового метода поиска структуры эффективного портфеля, подчеркнем, что теоретико-игровой метод поиска структуры эффективного портфеля в условиях неполноты информации, когда платежная матрица $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{k \times n} = \left(\boldsymbol{r}_{ij} \right)$ известна частично, состоит в решении НАИ. При теоретико-игровом моделировании стремятся полностью определить значения всех компонент игры: множества всех чистых стратегий обоих игроков и значения всех элементов платежной матрицы игры. Но, в экономических исследованиях, особенно в условиях становления рыночной экономики и приватизации государственной собственности, не всегда имеется возможность полностью определить значения всех элементов платежной матрицы игры, характеризующей принятие управленческих решений. Например, среди рассматриваемых активов могут находиться ценные бумаги, которые начали обращаться на фондовом рынке относительно недавно. Такая ситуация особенно типична для условий переходной экономики, когда создается значительное количество новых предприятий, акционируются и приватизируются многочисленные предприятия и учреждения, ранее принадлежавшие государству, а также осуществляются первичные эмиссии ценных бумаг этих предприятий. В таких условиях для части активов значения норм прибыли известны не для всех рассматриваемых периодов. В результате, при применении теоретико-игрового метода поиска структуры эффективного портфеля платежная матрица соответствующей АИ будет известна частично. В этом случае приходится решать НАИ. Хотя игры с неполной информацией изучаются с середины Х Х в. [10], для НАИ следует разработать достаточно удобные методы их решения, учитывающие их специфику и особенности. Простейшие методы решения НАИ, основанные на классификации ИС относительно неопределенности неизвестных значений элементов платежной матрицы [7, с. 244-245] и корректном приведении НАИ к соответствующей КАИ, приведены в работах [5, 7].

Числовые примеры теоретико-игрового метода поиска структуры эффективного портфеля

Пример 1. Имеются результаты наблюдений норм прибыли активов $\boldsymbol{k = 3}$ видов за $\boldsymbol{n = 10}$ периодов (табл. 2). Вычислить точечные статистические оценки ожидаемых норм прибыли, дисперсий и ковариаций. Найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, и значения его числовых характеристик (для равномерного закона распределения вероятностей).

Таблица 2

НАБЛЮДАВШИЕСЯ ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ

Значения норм прибыли									
3	1	2	1	2	3	4	2	4	4
10	9	7	11	2	1	3	9	14	9
–4	19	8	11	10	8	–2	0	–4	8

Для удобства точечные статистические оценки числовых характеристик будем обозначать точно так же, как оцениваемые числовые характеристики, т.е. вместо формул (4-6) следует применять соответствующие формулы математической статистики:

$$\boldsymbol{m}_i = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} * \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_{ij}, \quad \boldsymbol{c}_{ii} = \sigma_i^2 = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} * \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_{ij}^2 - \boldsymbol{m}_i^2,$$

$$\boldsymbol{c}_{li} = \boldsymbol{c}_{il} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} * \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_{ij} * \boldsymbol{r}_{lj} - \boldsymbol{m}_i * \boldsymbol{m}_l.$$

Итак, имеем $\boldsymbol{m_1 = 2,6}$, $\boldsymbol{m_2 = 7,5}$, $\boldsymbol{m_3 = 5,4}$, $\boldsymbol{c}_{11} = \sigma_1^2 = \boldsymbol{1,24}$, $\boldsymbol{c}_{22} = \sigma_2^2 = \boldsymbol{16,05}$, $\boldsymbol{c}_{11} = \sigma_1^2 = \boldsymbol{1,24}$, $\boldsymbol{c}_{21} = \boldsymbol{c}_{12} = \boldsymbol{-0,2}$, $\boldsymbol{c}_{31} = \boldsymbol{c}_{13} = \boldsymbol{-5,44}$, $\boldsymbol{c}_{32} = \boldsymbol{c}_{23} = \boldsymbol{-5,9}$.

Рассмотрим свойства ковариационной матрицы:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_{3 \times 3} = \left(\boldsymbol{c}_{il} \right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1,24} & \boldsymbol{-0,2} & \boldsymbol{-5,44} \\ \boldsymbol{-0,2} & \boldsymbol{16,05} & \boldsymbol{-5,9} \\ \boldsymbol{-5,44} & \boldsymbol{-5,9} & \boldsymbol{51,84} \end{pmatrix}.$$

Вычислим значения главных миноров ковариационной матрицы:

$\Delta_1 = \boldsymbol{c}_{11} = \boldsymbol{1,24 > 0}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1,24 & -0,2 \\ -0,2 & 16,05 \end{vmatrix} = 19,862 > 0,$$

$$\Delta_3 = det(C) = \begin{vmatrix} 1,24 & -0,2 & -5,44 \\ -0,2 & 16,05 & -5,9 \\ -5,44 & -5,9 & 51,84 \end{vmatrix} = 498,666 > 0.$$

Все главные миноры – положительные числа, поэтому согласно критерию Сильвестра [8, с. 156] матрица C положительно определена. Нижняя чистая цена КАИ, заданной матрицей C, равна $\alpha = \max_i \alpha_i = \max\{-5,44; -5,9; -5,9\} = -5,44$.

Верхняя чистая цена КАИ, заданной матрицей C, равна $\beta = \min_j \beta_j = \min\{1,24; 16,05; 51,84\} = 1,24$.

Так как справедливо строгое неравенство $\alpha = -5,44 < 1,24 = \beta$, в КАИ, заданной матрицей C, седловая точка отсутствует.

Приведя КАИ, заданную матрицей C, к симметричной паре взаимно-двойственных задач линейного программирования, найдем оптимальные стратегии игроков и значение игры: $q^* = p^* \approx (0,8210; 0,0757; 0,1033)$, $V_C^* \approx 0,4411$.

Следовательно, в КАИ, заданной матрицей C, существует вполне смешанная ситуация равновесия $(p^*; q^*)$, где $q^* = p^* \approx (0,8210; 0,0757; 0,1033)$.

Таким образом, согласно теореме 1 КАИ, заданная матрицей C, является вполне смешанной игрой, имеет единственное решение, при этом $x^* = q^* = p^* \approx (0,8210; 0,0757; 0,1033)$ – структура портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска (как в модели Марковица, так и в модели Блэка), а число $\sigma_x^{*2} = \min_{x \in X^+} \sigma_x^2 = \min_{x \in X} \sigma_x^2 = V_C^* \approx 0,4411$ – дисперсия СВ $R_x^* = \sum_{i=1}^{k} R_i \cdot x_i^*$, характеризующей норму прибыли портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, т.е. портфеля $x^* = q^* = p^* \approx (0,8210; 0,0757; 0,1033)$. В табл. 3 приведены значения числовых характеристик имеющихся активов и портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска.

Таблица 3

ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ, ПОРТФЕЛЯ $x^* = q^* = p^* \approx (0,8210; 0,0757; 0,1033)$ И ИХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Актив	Значения норм прибыли										m_i	σ_i^2
1	3	1	2	1	2	3	4	2	4	4	2,6	1,24
2	10	9	7	11	2	1	3	9	14	9	7,5	16,05
3	−4	19	8	11	10	8	−2	0	−4	8	5,4	51,84
x^*	2,81	3,46	3,00	2,79	2,83	3,37	3,30	2,32	3,93	4,79	3,26	0,4411

Расчеты, приведенные в табл. 3, наглядно иллюстрируют преимущества и недостатки диверсификации, основанной на формировании портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска. Легко убедиться в справедливости соотношений $2,6 = \min_i m_i \le m_x^* = 3,26 \le \max_i m_i = 7,5$ и $0,4411 \approx \sigma_x^{*2} = \min_{x \in X^+} \sigma_x^2 < \min_i \sigma_i^2 = 1,24$, типичных в невырожденных случаях для числовых характеристик портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска. Безусловно, значения нормы прибыли портфеля x^* характеризуются наибольшей устойчивостью и стабильностью. Но, эти значения нормы прибыли портфеля x^* относительно невелики, о чем также свидетельствует относительно невысокое значение ожидаемой нормы прибыли портфеля $m_x^* = 3,26$. Окончательное решение о структуре формируемого портфеля принимает инвестор. Естественно, он не обязан формировать портфель x^*, обладающий наименьшим уровнем риска, даже и в том случае, когда инвестор считает нецелесообразным рисковать и характеризуется не склонностью к риску. Наличие этой особенности принятия решений о формировании эффективного портфеля объясняется несколькими причинами. Во-первых, множество эффективных портфелей не зависит от отношения инвестора к риску. Во-вторых, в будущем на фондовом рынке сложится совершенно новая ситуация, отличная от тех, которые имели место на фондовом рынке в прошлом, т.е. в те периоды, когда собирались статистические данные о наблюдавшихся значениях норм прибыли выбранных активов. В-третьих, принятие управленческих решений, в т.ч. принятие решений о формировании эффективного портфеля, – это не только наука, но и искусство. Формируя структуру оптимального портфеля, инвестор обязан выбрать портфель из множества эффективных портфелей, при этом свое окончательное решение о структуре формируемого портфеля инвестор принимает согласно своим предпочтениям, имеющейся у него информации, его профессиональной квалификации, компетентности, опыта и интуиции.

Пример 2. Имеются результаты наблюдений норм прибыли активов $k = 6$ видов за $n = 4$ периода (табл. 4). Вычислить точечные статистические оценки ожидаемых норм прибыли, дисперсий и ковариаций. Найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, и значения его числовых характеристик.

Таблица 4

НАБЛЮДАВШИЕСЯ ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ

Значения норм прибыли			
16,88	45,56	13,74	18,79
40,19	7,33	42,86	−8,70

Значения норм прибыли			
27,56	−4,29	13,81	22,95
−16,67	50,00	−6,67	28,57
2,00	17,65	11,67	31,34
6,67	−5,00	7,89	−2,44

Законы распределения СВ $\boldsymbol{R}_i$, характеризующих нормы прибыли активов, точно неизвестны. Известными являются лишь возможные значения $\boldsymbol{r}_{ij}$ СВ $\boldsymbol{R}_i$, заданные элементами $\boldsymbol{i}$ -й строки табл. 4. Точнее, $\boldsymbol{r}_{ij}$ представляют собой, реально наблюдавшиеся, выборочные данные, т.е. статистически собранную информацию для выбранных активов о значениях норм прибыли, наблюдавшихся за четыре периода. При этом эти значения норм прибыли вычислены с точностью до двух знаков после запятой. Без значительной потери строгости рассуждений можно предположить, что данные числа $\boldsymbol{r}_{ij}$ и являются возможными значениями дискретных СВ $\boldsymbol{R}_i$. Но для СВ $\boldsymbol{R}_i$ ряд распределения неизвестен, т.к. неизвестны вероятности $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{r}_{ij})$, $\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1,6}}$, $\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1,4}}$.

Ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля характеризует КАИ, заданная матрицей

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{6\times 4} = (\boldsymbol{r}_{ij}) = \begin{pmatrix} 16,88 & 45,56 & 13,74 & 18,79 \\ 40,19 & 7,33 & 42,86 & -8,70 \\ 27,56 & -4,29 & 13,81 & 22,95 \\ -16,67 & 50,00 & -6,67 & 28,57 \\ 2,00 & 17,65 & 11,67 & 31,34 \\ 6,67 & -5,00 & 7,89 & -2,44 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Конечно, КАИ, заданная матрицей (41), не может интерпретироваться как АИ, моделирующая ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля. Действительно, в данном случае нет и не может быть противоречия между ЛПР (инвестором), с одной стороны, и экономической средой (фондовым рынком), с другой стороны. Тем более, нет и не может быть противоречия между ЛПР, с одной стороны, и портфелем или активами, его составляющими, с другой стороны. КАИ, заданная матрицей (41), именно характеризует ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля.

Проверим наличие седловой точки в КАИ, заданной матрицей (41). Нижняя и верхняя чистые цены КАИ, заданной матрицей (41), соответственно равны $\alpha = \max_i \alpha_i = \max\{13,74; -8,70; -4,29; -16,67; 2,00; -5,00\} = 13,74$,

$\beta = \min_j \beta_j = \min\{40,19; 50,00; 42,86; 31,34\} = 31,34$.

Седловая точка в КАИ, заданной матрицей (41), отсутствует, так как справедливо строгое неравенство $\alpha = 13,74 < 31,34 = \beta$.

Решив соответствующую симметричную пару взаимно-двойственных задач линейного программирования, найдем оптимальные смешанные стратегии игроков и цену данной игры:

$\boldsymbol{p}^* = (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$,

$\boldsymbol{q}^* \approx (0,1671; 0,0707; 0,3491; 0,4131)$, $V_R^* \approx 18,60$.

Так как справедливы строгие неравенства $\boldsymbol{q}_j^* > 0$, $\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1,4}}$, все чистые стратегии игрока 3 являются его активными стратегиями, а вектор $\boldsymbol{q}^*$ является его вполне смешанной оптимальной стратегией. Согласно теореме 2, оптимальная стратегия $\boldsymbol{p}^* = (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$ игрока 1 определяет структуру эффективного портфеля $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{p}^*$, обладающего наименьшим уровнем риска. При этом для любого допустимого распределения вероятностей на множестве возможных состояний экономической среды для дискретной СВ $\boldsymbol{R}_x^* = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{R}_i * \boldsymbol{x}_i^*$ имеем $\boldsymbol{r}_j^* = \sum_{i=1}^{6} (\boldsymbol{r}_{ij} * \boldsymbol{p}_i^*) = \boldsymbol{V}_{1j}^* = \boldsymbol{V}_R^* \approx 18,60$, $\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1,4}}$, т.е. $\boldsymbol{R}_x^* = \sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{R}_i * \boldsymbol{x}_i^* = \sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{R}_i * \boldsymbol{p}_i^* \equiv \boldsymbol{V}_R^* = \boldsymbol{const}$, поэтому $\sigma_x^{*2} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{R}_x^*) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{V}_R^*) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{const}) = 0$. Так как выполняются все требования (условия) не только теоремы 2, но и теоремы 4, то можно утверждать, что оптимальная стратегия $\boldsymbol{p}^* = (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$ игрока 1 задает структуру эффективного портфеля, а именно портфеля $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{p}^*$, обладающего для всех допустимых распределений $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1; \boldsymbol{q}_2; \boldsymbol{q}_3; \boldsymbol{q}_4)$ наименьшим уровнем риска, как в модели Марковица, так и в модели Блэка.

Как известно, дисперсия любой СВ обязательно является неотрицательным числом. Следовательно, для любого портфеля $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_3; \boldsymbol{x}_4; \boldsymbol{x}_5; \boldsymbol{x}_6)$, удовлетворяющего соотношению (9), значение дисперсии не может быть улучшено (уменьшено). Поэтому вектор $\boldsymbol{p}^* = (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$ задает для любого распределения вероятностей структуру эффективного портфеля, как в модели Марковица, так и в модели Блэка.

Еще раз отметим, искусство принятия управленческих решений в экономике требует от ЛПР профессионализма, компетентности и интуиции. Поэтому, ориентируясь на найденное решение АИ, характеризующей принятие рассматриваемого управленческого решения, ЛПР не обязано строго придерживаться соответствующей оптимальной стратегии.

Таблица 5

ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ, ПОРТФЕЛЯ $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{p}^* \approx (0,2687; 0,1901; 0,2091; 0; 0,3321; 0)$ И ИХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\hat{q} = (0,25; 0,25; 0,25; 0,25)$

Актив	Значения норм прибыли				m_i	σ_i^2
1	16,88	45,56	13,74	18,79	23,74	161,9186
2	40,19	7,33	42,86	−8,70	20,42	478,4323
3	27,56	−4,29	13,81	22,95	15,01	148,6190

Актив	Значения норм прибыли				m_i	σ_i^2
4	−16,67	50,00	−6,67	28,57	13,81	719,0086
5	2,00	17,65	11,67	31,34	15,67	113,0845
6	6,67	−5,00	7,89	−2,44	3,00	25,4237
x^*	18,60	18,60	18,60	18,60	18,60	0

Очевидно, законы распределения вероятностей СВ R_i, характеризующих нормы прибыли активов, можно оценить. В качестве возможных значений дискретной СВ R_i, естественно, следует выбирать элементы, расположенные в i-й строке матрицы (41). Значения оценок соответствующих вероятностей $P\left(R_i = r_{ij}\right)$ зависят от имеющей место ИС относительно стратегии поведения экономической среды. Приведем значения числовых характеристик имеющихся активов и портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, для равномерного распределения вероятностей (табл. 5), для оценки распределения вероятностей, найденной по первой формуле Фишберна (табл. 6), для оценки распределения вероятностей, найденной по второй формуле Фишберна (табл. 7), для оценки распределения вероятностей оптимальной стратегией q^* игрока 2 (табл. 8).

Таблица 6

ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ, ПОРТФЕЛЯ $x^* = p^* \approx \left(0,2687;\ 0,1901;\ 0,2091;\ 0\ ;\ 0,3321;\ 0\right)$ И ИХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\hat{q} = \left(0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ 0,4\right)$

Актив	Значения норм прибыли				m_i	σ_i^2
1	16,88	45,56	13,74	18,79	22,44	138,0342
2	40,19	7,33	42,86	−8,70	14,86	532,7305
3	27,56	−4,29	13,81	22,95	15,22	115,8532
4	−16,67	50,00	−6,67	28,57	17,76	552,2159
5	2,00	17,65	11,67	31,34	19,77	105,7051
6	6,67	−5,00	7,89	−2,44	3,01	21,4459
x^*	18,60	18,60	18,60	18,60	18,60	0

Таблица 7

ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ, ПОРТФЕЛЯ $x^* = p^* \approx \left(0,2687;\ 0,1901;\ 0,2091;\ 0\ ;\ 0,3321;\ 0\right)$ И ИХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\hat{q} = \left(\frac{1}{15};\ \frac{2}{15};\ \frac{4}{15};\ \frac{8}{15}\right)$

Актив	Значения норм прибыли				m_i	σ_i^2
1	16,88	45,56	13,74	18,79	20,89	98,2045
2	40,19	7,33	42,86	−8,70	10,45	535,9566
3	27,56	−4,29	13,81	22,95	17,19	89,4291
4	−16,67	50,00	−6,67	28,57	19,01	437,5214
5	2,00	17,65	11,67	31,34	22,31	104,0728
6	6,67	−5,00	7,89	−2,44	3,18	15,9415
x^*	18,60	18,60	18,60	18,60	18,60	0

В таблице 8 хорошо видны свойства оптимальных стратегий игроков и цены игры. В частности, если игрок придерживается своей оптимальной стратегии, то для активных стратегий другого игрока значение ожидаемого результата этого игрока совпадает с ценой игры, т.е. совпадает с числом $V_R^* \approx 18,60$. В частности, так как все чистые стратегии второго игрока являются его активными стратегиями, то выполняются равенства $r_j^* = \sum_{i=1}^{6}\left(r_{ij} * p_i^*\right) = = V_{Ij}^* = V_R^* \approx 18,60$, $j = \overline{1,4}$.

Таблица 8

ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ, ПОРТФЕЛЯ $x^* = p^* \approx \left(0,2687;\ 0,1901;\ 0,2091;\ 0\ ;\ 0,3321;\ 0\right)$ И ИХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $q^* \approx \left(0,1671;\ 0,0707;\ 0,3491;\ 0,4131\right)$

Актив	Значения норм прибыли				m_i	σ_i^2
1	16,88	45,56	13,74	18,79	18,60	60,1426
2	40,19	7,33	42,86	−8,70	18,60	600,2111
3	27,56	−4,29	13,81	22,95	18,60	66,2851
4	−16,67	50,00	−6,67	28,57	10,22	471,3930
5	2,00	17,65	11,67	31,34	18,60	129,9246
6	6,67	−5,00	7,89	−2,44	4,52	12,9319
x^*	18,60	18,60	18,60	18,60	18,60	0

Кроме того, если игрок 2 придерживается своей оптимальной стратегии, то для неактивных стратегий игрока 1 (4-я и 6-я чистые стратегии) значение его ожидаемого выигрыша (собственно, значения ожидаемых норм прибыли m_4 и m_6 соответствующих активов) меньше цены игры, т.е. меньше числа $V_R^* \approx 18,60$.

Пример 3. Имеются результаты наблюдений норм прибыли активов $k = 3$ видов за $n = 3$ периода (табл. 9). Вычислить точечные статистические оценки ожидаемых норм прибыли, дисперсий и ковариаций.

Найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, и значения его числовых характеристик.

Таблица 9

НАБЛЮДАВШИЕСЯ ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ

Значения норм прибыли		
15	12	5
70	12	−50
26	30	−30

Ситуацию принятия решений о формировании эффективного портфеля характеризует КАИ, заданная матрицей

$$R = R_{3\times3} = \left(r_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 5 \\ 70 & 12 & -50 \\ 26 & 30 & -30 \end{pmatrix}. \qquad (42)$$

Проверим наличие седловой точки в КАИ, заданной матрицей (42). Нижняя и верхняя чистые цены КАИ, заданной матрицей (42), соответственно равны

$\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\left\{5;\ -50;\ -30\right\} = 5$,

$\beta = \min\limits_j \beta_j = \min\left\{70;\ 30;\ 5\right\} = 5$.

В КАИ, заданной матрицей (42), имеется седловая точка, так как справедливо равенство $\alpha = \beta = 5$. Следовательно, КАИ, заданная матрицей (42), имеет решение в чистых стратегиях игроков.

По известной матрице (42) построим матрицу $R' = R'_{6\times3} = \left(r'_{i\,j}\right)$, в которой $r'_{2\cdot i-1\,j} = r_{i\,j}$, $r'_{2\cdot i\,j} = -r_{i\,j}$:

$$R' = R'_{6\times3} = \left(r'_{i\,j}\right) = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 5 \\ -15 & -12 & -5 \\ 70 & 12 & -50 \\ -70 & -12 & 50 \\ 26 & 30 & -30 \\ -26 & -30 & 30 \end{pmatrix}. \qquad (43)$$

Проверим наличие седловой точки в КАИ, заданной матрицей (43). Нижняя и верхняя чистые цены КАИ, заданной матрицей (43), соответственно равны

$\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\left\{5; -15; -50; -70; -30; -30\right\} = 5$;

$\beta = \min\limits_j \beta_j = \min\left\{70;\ 30;\ 50\right\} = 50$.

Так как $\alpha = 5 < 30 = \beta$, то КАИ, заданная матрицей (43), не содержит седловой точки и не имеет решения в чистых стратегиях.

Решив соответствующую симметричную пару взаимно-двойственных задач линейного программирования, найдем оптимальные смешанные стратегии игроков и цену данной игры:

$p^* = \left(0{,}8970;\ 0;\ 0;\ 0{,}0501;\ 0;\ 0{,}0529\right)$,

$q^* = \left(0{,}3104;\ 0{,}0674;\ 0{,}622\right)$, $V^{*}_{R}{}' \approx 8{,}58$. Следовательно, в КАИ, заданной матрицей (43), игрок 2 имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, а именно, оптимальную стратегию $q^* = \left(0{,}3104;\ 0{,}0674;\ 0{,}622\right)$. Очевидно, все требования теоремы 3 выполняются, при этом $\sum\limits_{l=1}^{k}\left(p^*_{2*l-1} - p^*_{2*l}\right) \approx$

$\approx \left(0{,}8970 - 0\right) + \left(0 - 0{,}0501\right) + \left(0 - 0{,}0529\right) = 0{,}794$,

$$x^*_i = \frac{p^*_{2*i-1} - p^*_{2*i}}{\sum\limits_{l=1}^{k}\left(p^*_{2*l-1} - p^*_{2*l}\right)} \approx \frac{p^*_{2*i-1} - p^*_{2*i}}{0{,}794}, \quad i = \overline{1,3} .$$

Таким образом, согласно формулам, приведенным в теореме 3, вектор $x^* \approx \left(1{,}1297;\ -0{,}0630;\ -0{,}0667\right)$ задает структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Блэка.

Таблица 10

ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ, ПОРТФЕЛЯ $x^* \approx \left(1{,}1297;\ -0{,}0630;\ -0{,}0667\right)$ И ИХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\hat{q} = \left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$

Актив	Значения норм прибыли			m_i	σ_i^2
1	15	12	5	10,67	17,5556
2	70	12	− 50	10,67	2400,8889
3	26	30	− 30	8,67	750,2222
x^*	10,8	10,8	10,8	10,8	0

Приведем значения числовых характеристик имеющихся активов и портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, для равномерного распределения вероятностей (табл. 10), для оценки распределения вероятностей, найденной по первой формуле Фишберна (табл. 11), для оценки распределения вероятностей, найденной по второй формуле Фишберна (табл. 12), для оценки распределения вероятностей оптимальной стратегией q^* игрока 2 (табл. 13).

Таблица 11

ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ, ПОРТФЕЛЯ $x^* \approx \left(1{,}1297;\ -0{,}0630;\ -0{,}0667\right)$ И ИХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\hat{q} = \left(\frac{1}{6};\ \frac{2}{6};\ \frac{3}{6}\right)$

Актив	Значения норм прибыли			m_i	σ_i^2
1	15	12	5	9	17
2	70	12	− 50	− 9,33	2027,5556
3	26	30	− 30	− 0,67	862,2222
x^*	10,8	10,8	10,8	10,8	0

Таблица 12

ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ, ПОРТФЕЛЯ $x^* \approx \left(1{,}1297;\ -0{,}0630;\ -0{,}0667\right)$ И ИХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\hat{q} = \left(\frac{1}{7};\ \frac{2}{7};\ \frac{4}{7}\right)$

Актив	Значения норм прибыли			m_i	σ_i^2
1	15	12	5	8,43	16,5306
2	70	12	− 50	− 15,14	1940,4082
3	26	30	− 30	− 4,86	844,4082
x^*	10,8	10,8	10,8	10,8	0

Таблица 13

ЗНАЧЕНИЯ НОРМ ПРИБЫЛИ АКТИВОВ, ПОРТФЕЛЯ $x^* \approx \left(1{,}1297;\ -0{,}0630;\ -0{,}0667\right)$ И ИХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $q^* \approx \left(0{,}3104;\ 0{,}0674;\ 0{,}6222\right)$

Актив	Значения норм прибыли			m_i	σ_i^2
1	15	12	5	8,58	21,5561
2	70	12	− 50	− 8,58	3012,6774
3	26	30	− 30	− 8,58	756,9315
x^*	10,8	10,8	10,8	10,8	0

Легко заметить, что если ограничиться сравнением значений только числовых характеристик соответствующих СВ, учитываемых в современной теории портфеля Марковица, т.е. сравнением значений только ожидаемых норм прибыли и уровней риска, то портфель $x^* \approx \left(1{,}1297;\ -0{,}0630;\ -0{,}0667\right)$, обладающий наименьшим уровнем риска в модели Блэка, обладает наилучшими значениями обеих числовых характеристик по сравнению со значениями этих числовых характеристик для каждого из рассматриваемых активов для всех рассмотренных оценок распределения $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q_1}; \boldsymbol{q_2}; \boldsymbol{q_3})$ вероятностей.

Действительно, в табл. 10-13 портфель $\boldsymbol{x}^* \approx (\boldsymbol{1{,}1297}; -\boldsymbol{0{,}0630}; -\boldsymbol{0{,}0667})$ обладает наибольшим значением ожидаемой нормы прибыли и наименьшим значением уровня риска по сравнению со значениями этих числовых характеристик для выбранных активов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование позволяет прийти к следующим выводам.

1. Корректный теоретико-игровой метод поиска структуры эффективного портфеля возможен. При соблюдении определенных требований решение соответствующей антагонистической, т.е. матричной, игры позволяет найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска измеренного дисперсией случайной величины, характеризующей норму прибыли портфеля, в модели Марковица и / или в модели Блэка. Это обусловлено особенностями теории антагонистических игр. В первую очередь тем, что решение антагонистической игры ориентирует лицо, принимающее решения, на предельно осторожное поведение.
2. Корректный теоретико-игровой метод поиска структуры эффективного портфеля основан на концепции комбинированного применения статистических и антагонистических игр. Суть комбинированного применения статистических и антагонистических игр заключается в отождествлении исходной статистической игры, моделирующей процесс принятия управленческих решений, с антагонистической игрой, платежная матрица которой совпадает с функционалом оценивания исходной статистической игры.
3. Концепцию комбинированного применения статистических и антагонистических игр от других подходов, применяемых для теоретико-игрового моделирования экономики, отличают следующие особенности. Во-первых, концепция нацелена на принятие оптимальных решений с учетом неполноты информации, неопределенности, конфликтности и риска. Во-вторых, предлагается комбинированное применение статистических и антагонистических игр совместно с другими разделами математики, в частности, с энтропийным подходом, нечеткой математикой, теорией вероятностей и математической статистикой, теорией случайных процессов, прикладной статистикой и эконометрией, конкретной математикой. В-третьих, предлагается комбинированное применение статистических и антагонистических игр и в тех случаях, когда соответствующая антагонистическая игра не является непосредственной моделью рассматриваемого процесса принятия управленческих решений, при этом уделяется внимание анализу и обоснованию математической корректности, экономической корректности, экономической целесообразности и экономической эффективности управленческих решений.
4. Принятие управленческих решений в экономике, основанное на комбинированном применении статистических и антагонистических игр, обладает рядом достоинств, в т.ч. позволяет экономить средства, адекватно учитывать неполноту информации, неопределенность, конфликтность и обусловленный ими экономический риск, а также позволяет оптимизировать уровень экономического риска. Еще одним преимуществом предлагаемой концепции является прозрачность методов принятия управленческих решений.
5. Принятие управленческих решений в экономике, основанное на комбинированном применении статистических и антагонистических игр, обладает и недостатками, например, чрезмерной осторожностью. Поэтому комбинированное применение статистических и антагонистических игр наиболее целесообразно использовать в условиях, когда лицо, принимающее решения, считает, что ему не следует рисковать. Кроме того, согласно предпочтениям лица, принимающего решения, имеющейся у него информации, его профессиональной квалификации, компетентности, опыта и интуиции оптимальное управленческое решение, которое оно выберет для реализации, может отличаться от оптимальной стратегии, на которой основывается это управленческое решение.
6. В случаях, когда с точки зрения инвестора ему нецелесообразно рисковать, он должен формировать портфель, обладающий наименьшим уровнем риска. К таким случаям можно отнести условия жесткой конкуренции, кризиса, предкризисной ситуации и/или случай, когда отношение лица, принимающего решения, к риску характеризуется его существенной несклонностью к риску.
7. Решение задачи поиска структуры эффективного портфеля может быть основано на применении антагонистической игры, заданной матрицей, элементы которой представляют собой значения норм прибыли активов. Если в этой игре отсутствует седловая точка и второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то оптимальная стратегия первого игрока задает структуру портфеля без риска (собственно, портфеля с нулевым несистематическим риском). При этом портфель без риска будет найден и тогда, когда все активы, составляющие этот портфель, являются рискованными.
8. Применение антагонистической игры, заданной матрицей, элементы которой представляют собой значения норм прибыли активов, не требует знания точных истинных законов распределений всех случайных величин, характеризующих нормы прибыли активов. При этом если в традиционной модели Марковица числовые характеристики активов представляют собой известные константы, то в обобщенных моделях числовые характеристики активов – это уже функции от нескольких переменных, а именно, функции от неизвестных значений вероятностей состояний экономической среды.
9. Обобщенные модели задачи выбора структуры эффективного портфеля представляют собой задачи трехкритериальной оптимизации, при этом их вид зависит от имеющей место информационной ситуации относительно неопределенности поведения экономической среды. Например, в поле четвертой информационной ситуации, когда о возможных значениях вероятностей состояний экономической среды нет никакой математической информации, в качестве этого третьего критерия выступает энтропия Шеннона, значение которой требуется максимизировать.
10. В поле третьей информационной ситуации, когда на основе вербальной (или статистической) информации можно на качественном уровне установить приоритетность состояний экономической среды, для приведения трехкритериальной задачи выбора структуры эффективного портфеля к традиционной модели Марковица оценку распределения вероятностей состояний экономической среды можно найти на основе формул Фишберна.
11. Теоретико-игровой метод поиска структуры эффективного портфеля в условиях неполноты информации, когда платежная матрица, элементы которой представ-

ляют собой значения норм прибыли активов, известна частично, состоит в решении неоклассической антагонистической игры, т.е. антагонистической игры, заданной частично известной матрицей.

12. Искусство принятия управленческих решений в экономике требует от лица, принимающего решения, профессионализма, компетентности и интуиции, поэтому, ориентируясь на найденное решение антагонистической игры, характеризующей принятие рассматриваемого управленческого решения, лицо, принимающее решения, не обязано строго придерживаться соответствующей оптимальной стратегии.

Литература

1. Блекуэлл Д. Теория игр и статистических решений [Текст] / Д. Блекуэлл, М.А. Гиршик ; пер. с англ. И.В. Соловьева. – М. : Иностранная литература, 1958. – 376 с.
2. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков [Текст] / Н.Н. Воробьев. – М. : Наука, 1985. – 272 с.
3. Иванилов Ю.П. Математические модели в экономике [Текст] / Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов. – М. : Наука, 1979. – 304 с.
4. Лившиц В.Н. Об энтропийном анализе переходной экономики / В.Н. Лившиц, А.В. Сигал // Экономика и математические методы. – 2014. – Т. 50 ; вып. 3. – С. 86-104.
5. Сигал А.В. Антагонистическая игра, заданная в условиях частичной неопределенности [Текст] / А.В. Сигал, В.Ф. Блыщик // Экономическая кибернетика: междунар. науч. ж-л. – 2005. – №5-6. – С. 47-53.
6. Сигал А.В. Основы современной теории портфеля ценных бумаг [Текст] : учеб. пособие / А.В. Сигал. – Симферополь : КЭИ КНЭУ, 1998. – 60 с.
7. Сигал А.В. Теория игр для принятия решений в экономике [Текст] : монография / А.В. Сигал. – Симферополь : ДИАЙПИ, 2014. – 308 с.
8. Сюдсетер К. и др. Справочник по математике для экономистов [Текст] / К. Сюдсетер, А. Стрем, П. Берк ; пер. с норвежск. Г.Н. Захаровой ; под ред. Е.Ю. Смирновой. – СПб. : Экономическая школа, 2000.
9. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности [Текст] / Р.И. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 258 с.
10. Harsanyi J.C. Games with incomplete information payed by 'bayesian' players [Text]. Parts I-III / J.C. Harsanyi // Management science. – 1967-1968. – No. 14. – P. 159-182, 320-334, 486-502.
11. Markowitz H.M. Portfolio selection [Text] / H.M. Markowitz // Journal of finance. – 1952. – Vol. 7 ; no. 1. – Pp. 77-91.
12. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict [Text] / R.B. Myerson. – London : Harvard Univ. Press, 1991. – 584 p.
13. Neumann J. von. Theory of games and economic behavior [Text] / J. von Neumann, O. Morgenstern. – Princeton : Princeton Univ. Press, 1944. – 625 p.
14. Neumann J. von. Zur theorie der gesellschaftsspiele [Text] / J. von Neumann // Mathematische annalen. – 1928. –Vol. 100. – Pp. 295-320.
15. Wald A. Statistical decision functions [Text] / A. Wald // Ann. math. statist. – 1949. – Vol. 20 ; no. 2. – Pp. 165-205.

Ключевые слова

Теоретико-игровой метод; информационная ситуация; эффективный портфель; модель Марковица: модель Блэка; обобщенная модель задачи выбора структуры эффективного портфеля; статистическая игра; антагонистическая игра.

Сигал Анатолий Викторович

РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность темы статьи обусловлена необходимостью разработки математических методов и моделей задачи поиска структуры эффективного портфеля в условиях неполноты информации, неопределенности, конфликтности и экономического риска для принятия обоснованных решений на фондовом рынке, характеризуемом повышенным уровнем экономического риска.

Научная новизна состоит в том, что автор предложил, во-первых, новую концепцию комбинированного применения статистических и антагонистических игр, во-вторых, обобщенные модели задачи поиска структуры эффективного портфеля, рассчитанные на ситуации, когда инвестор не обладает полной информацией, и, в-третьих, математически корректные теоретико-игровые методы выбора структуры эффективного портфеля.

Результаты, изложенные в статье, является научным вкладом в современную теорию портфеля и теоретико-игровое моделирование теории принятия управленческих решений в экономике. Практическая значимость этих результатов состоит в том, что они могут быть использованы для выбора структуры оптимального портфеля в поле различных информационных ситуаций, что убедительно продемонстрировано автором при решении конкретных числовых задач.

Считаю, что рецензируемая статья может быть рекомендована к опубликованию в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Лившиц В.Н., д.э.н., профессор, заведующий лабораторией Института системного анализа Российской Академии наук.