

### 3.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА В РЕГИОНАЛЬНОЙ МНОГОАГЕНТНОЙ СИСТЕМЕ

Гафарова Е.А., к.э.н., доцент, с.н.с., сектор экономико-математического моделирования;  
 Кантор О.Г., к.ф.-м.н., доцент, с.н.с., сектор экономико-математического моделирования;  
 Кульмухаметов М.Б., аспирант

*Институт социально-экономических исследований Уфимского научного центра Российской Академии наук*

В статье описаны проблемы калибровки многоагентной региональной системы на примере задачи выбора закона распределения для генерирования заработной платы агента-человека с учетом его характеристик. Представлены результаты генерирования значения заработной платы агента на основе логнормального распределения, гамма-распределения и бета-распределения вероятностей. Показано, что вероятно-статистический подход не обеспечивает соответствие расчетных и фактических значений средней заработной платы.

#### ВВЕДЕНИЕ

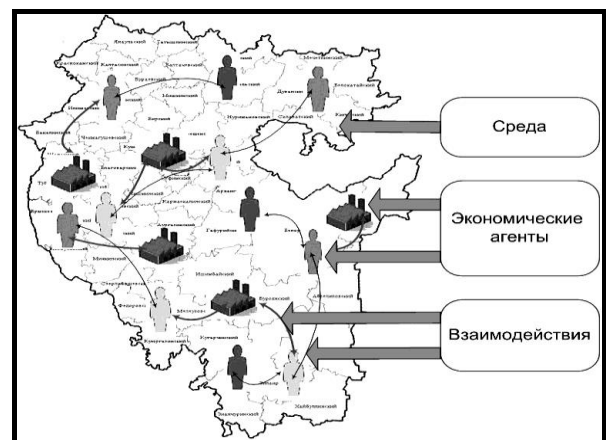
Развитие в области информационных технологий, искусственного интеллекта и компьютерной техники способствовало появлению и развитию агент-ориентированных моделей [3]. Для анализа и прогноза развития территориальной социально-экономической системы (регионального или муниципального уровня), которая характеризуется большим числом разноуровневых экономических агентов, сложной структурой зависимостей между ними, несовпадением их интересов, а также неполной их информированностью, максимальное приближение к реальной системе могут обеспечить многоагентные (или мультиагентные) модели. Многоагентные системы состоят из наборов агентов схожей структуры со сложной иерархией, помещенных во внешнюю среду, взаимодействующих друг с другом и со средой для достижения своих целей. Необходимость разработки многоагентной модели территориальной социально-экономической системы обусловлена потребностью в создании инструментария, позволяющего прогнозировать динамические изменения ее состояния, анализировать последствия управленческих решений, исследовать эффективность принимаемых мер на различных уровнях власти. Спектр проблем, для решения которых создаются территориальные мультиагентные модели, на сегодняшний день достаточно широк: управление в условиях стихийных бедствий; управление природными ресурсами; управление расширением территории; управление транспортной инфраструктурой территории; управление сегрегацией населения; управление деловой активностью; управление распространением инфекционных заболеваний и др. [6].

Проблема разработки многоагентной системы территориального образования является междисциплинарной, и подходы к ее решению базируются на методах системного анализа, теории управления и принятия решений, экономико-математического моделирования, имитационного моделирования, экономической статистики, теории вероятностей и математической статистики, социологии, психологии и др.

Важным этапом при разработке агент-ориентированной модели является ее калибровка (или идентификация) относительно глобальной статистики [5], которая предполагает проверку достоверности значений функции отклика. (Здесь и далее под функцией отклика будем понимать совокупность результирующих показателей, выбранных в качестве индикаторов для оценки степени адекватности модели.) Выбор функции отклика определяется в соответствии с целью исследования, а также с учетом имеющейся статистической информацией. В данной статье раскрываются проблемы калибровки многоагентной модели региона, разработанной для воссоздания социально-экономической структуры региона с учетом его территориального устройства и апробированной на данных Республики Башкортостан.

#### Постановка задачи и характеристика объекта моделирования

В основе разработки агент-ориентированной модели развития Республики Башкортостан, реализуемой в Институте социально-экономических исследований Уфимского научного центра Российской Академии наук (ИСЭИ УНЦ РАН), лежит концепция, согласно которой модель должна воссоздать социально-экономическую систему региона как сложную многоуровневую систему, состоящую из множества неоднородных агентов, взаимодействующих между собой и со средой (рис. 1) (вид экономической деятельности и человек как агенты, муниципальное образование и регион как среда), обладающих набором индивидуальных характеристик и способных совершать действия с учетом собственных интересов в рамках общепринятых правил поведения. Такая модель экономики региона позволяет описывать и прогнозировать динамику на микро- и мезоуровне с учетом неоднородности экономических агентов, а также апробировать различные варианты управляющих воздействий на агентов и отследить их ответное влияние с целью разработки и обоснования различных стратегий социально-экономического развития региона.



**Рис. 1. Основные элементы агент-ориентированной модели регионального развития**

Одним из ключевых элементов разрабатываемой модели регионального развития является агент типа «человек». Для него предполагаются несколько

жизненных стадий: он рождается (создается) в определенном муниципальном образовании региона, взрослеет, учится, выбирает сферу деятельности, при достижении трудоспособного возраста работает, выходит на пенсию, умирает (удаляется). За время всего жизненного цикла он может поменять работу, поступить учиться, обзавестись семьей, стать безработным, переехать в другое, более комфортное для него муниципальное образование и др. Численность агентов типа «человек» в модели соответствует реальным статистическим данным о численности постоянного населения по муниципальным образованиям Республики Башкортостан с заданным масштабом, при этом и половозрастная структура полностью повторяет половозрастную структуру населения по данным Всероссийской переписи населения 2010 г. по Республике Башкортостан в разрезе каждого муниципального образования региона с тем же масштабом.

Агент типа «человек» в модели имеет определенные виды доходов (заработную плату или пенсию), распределяет свой бюджет. Размер заработной платы оказывает влияние на большое количество параметров, характеризующих социальные и экономические аспекты развития региона. К числу таких характеристик могут быть отнесены налоговые отчисления, средняя заработная плата по видам экономической деятельности, средний размер назначенных пенсий, распределение населения по децильным группам в зависимости от среднедушевого денежного дохода в целом по региону, в разрезе муниципальных образований и / или видов экономической деятельности. Таким образом, задача генерирования (назначения) значений заработной платы агентам типа «человек» является одной из ключевых. Ниже будут рассмотрены подходы к ее решению и исследованы результаты применения некоторых из них.

Целью поставленной задачи является определение такого распределения заработной платы агентов типа «человек», при котором обеспечивается:

- соответствие расчетных и фактических данных средних уровней заработной платы агентов типа «человек» в каждом муниципальном образовании и по региону в целом в разрезе рассматриваемых видов экономической деятельности;
- соответствие расчетных и фактических данных относительно распределения численности работников по размеру начисленной заработной платы по видам экономической деятельности в целом по региону.

Выбор названных целевых ориентиров обусловлен их значимостью для проведения всестороннего исследования, а также особенностями собираемой статистической информации.

В соответствии со сформулированной выше целью и имеющимися статистическими данными в качестве экзогенных факторов, определяющих размер заработной платы агента типа «человек», целесообразно принять следующие его характеристики: место жительства («муниципальное образование»); род занятости («вид экономической деятельности»); пол.

Вид функции отклика также определяется поставленной целью: ее первая компонента должна со-

держать средние уровни заработной платы в региональном и муниципальных разрезах для рассматриваемых видов экономической деятельности; а вторая – распределение численности работников по размерам начисленной заработной платы по видам экономической деятельности в целом по региону. Сравнение функции отклика с соответствующими данными статистической отчетности позволит судить о степени адекватности построенной модели.

Особенности Республики Башкортостан как объекта моделирования в основном обусловлены существующим территориальным устройством муниципальных образований (МО) и структурой экономики. В республике выделяются 54 муниципальных района и девять городских округов, которые отличаются по численности и плотности населения, половозрастному, образовательному составу, а также по социально-экономическому развитию. Экономика региона характеризуется многоотраслевой структурой, в которой представлены все виды экономической деятельности (ВЭД), при этом преобладающий вклад в структуру ВРП вносят обрабатывающие производства, оптовая и розничная торговля, транспорт и связь (36,2%, 16,7% и 7,3% от валового регионального продукта (ВРП) региона в 2013 г. соответственно). Перечисленные особенности в силу необходимости учета большого количества вариантов задания характеристик агентов типа «человек» (в зависимости от его места жительства, рода занятости, гендерного признака, образования и пр.) могут стать причиной существенных вычислительных трудностей.

### **Вероятностно-статистические подходы к решению задачи**

Традиционно для генерирования значения заработной платы в многоагентных территориальных системах широко используется вероятностно-статистический подход, который реализуется с помощью случайной величины на основе модели стандартных и нестандартных законов распределения вероятностей. Так, в модели «Губернатор» [8], имитирующей социально-экономическое состояние региона на основе реконструкции его внутренней структуры, а также структуры и поведения действующих на его территории самостоятельных экономических агентов (предприятия, муниципальные районы, люди), реализованной для Вологодской области, вероятностно-статистический подход успешно реализуется для генерирования значения заработной платы агента-человека на основе бета-распределения. Агенту-человеку в зависимости от его характеристик (так называемого потенциала) назначается заработная плата с помощью бета-распределения в одном из интервалов: от минимальной до средней заработной платы или от средней до максимальной для соответствующей категории. В модели Urban Dynamics Agent Based [9], представляющей собой модель населения, жилищной и транспортной инфраструктуры маленького города с такими активными объектами как люди и бизнес-предприятия, вероятностное распределение задается нестандартным генератором случайных чисел с помощью табличной функции, полученной

на основе экспериментальных данных и устанавливающей сложнейшие нелинейные зависимости между эндогенными и экзогенными переменными.

Применительно к сформулированной выше задаче генерирования заработной платы агентам типа «человек» использование табличных функций не представляется возможным в силу особенностей официальных статистических данных Федеральной службы государственной статистики (Росстат), обусловленных неполнотой существующей информации и периодичностью ее сбора. Так, например, имеющиеся статистические данные на основе выборочных обследований населения по Республике Башкортостан, собираемые в том числе и по видам экономической деятельности, позволяют задать уровни заработной платы агентам типа «человек» таким образом, чтобы обеспечивалось соответствие среднереспубликанским показателям, но при этом в многоагентной модели не обеспечивается достижение средних показателей в разрезе муниципальных образований и видов экономической деятельности.

Использование моделей стандартных законов распределения вероятностей в рамках вероятностно-статистического подхода для решения задачи назначения заработной платы агентам типа «человек» предполагает, во-первых, идентификацию типа закона распределения и, во-вторых, – определение его параметров. Вид функции распределения вероятностей должен соответствовать реальным данным о моделируемых факторах. При этом с учетом поставленной задачи, определению подлежат функции распределения вероятностей размеров заработной платы для каждого муниципального образования по всем рассматриваемым видам деятельности, т.е. общее количество функций распределения составляет как минимум  $62 \cdot 15 = 930$  ( $62$  – количество МО,  $15$  – количество ВЭД).

Фактическое распределение численности работников по размерам начисленной заработной платы в Республике Башкортостан характеризуется отсутствием симметрии вследствие существенного превышения численности низкодоходных групп над численностью высокодоходных. В отсутствие специальных исследований будем предполагать, что перечисленные особенности имеют место и в муниципальных образованиях РБ.

Следует отметить, что в социально-экономической статистике стандартной является задача оценки функции распределения доходов населения, предполагающей восстановление закона распределения вероятностей на основе данных выборочных обследований. Анализ моделей законов распределения вероятностей, используемых при описании генезиса данных и при реализации техники статистических вычислений [1, 2, 7], позволил выявить в качестве обладающих необходимыми свойствами для генерирования размеров заработных плат агентов следующие:

- логарифмически-нормальное (логнормальное распределение), закон распределения которого описывается функцией плотности:

$$f_{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * \sigma * x} * e^{-\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0,$$

где  $a$  – математическое ожидание,  
 $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение логарифмов значений признака (рис. 2 а);

- бета-распределение (В-распределение) с функцией плотности распределений следующего вида:

$$f_{\beta} = \begin{cases} \frac{\Gamma(a_1 + a_2)}{\Gamma(a_1) * \Gamma(a_2)} * x^{a_1-1} * (1-x)^{a_2-1}, & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{при остальных } x, \end{cases}$$

где  $0 < a_1 < \infty, 0 < a_2 < \infty$  (рис. 2 б);

- гамма-распределение (Г-распределение), для которого плотность распределения задается функцией:

$$f_{\gamma} = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} * x^{a-1} * e^{-bx}, & \text{при } 0 \leq x < \infty; \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где  $\Gamma(a)$  – функция Эйлера,

$a > 0$  – параметр «формы»,

$b > 0$  – параметр масштаба (рис. 2в).

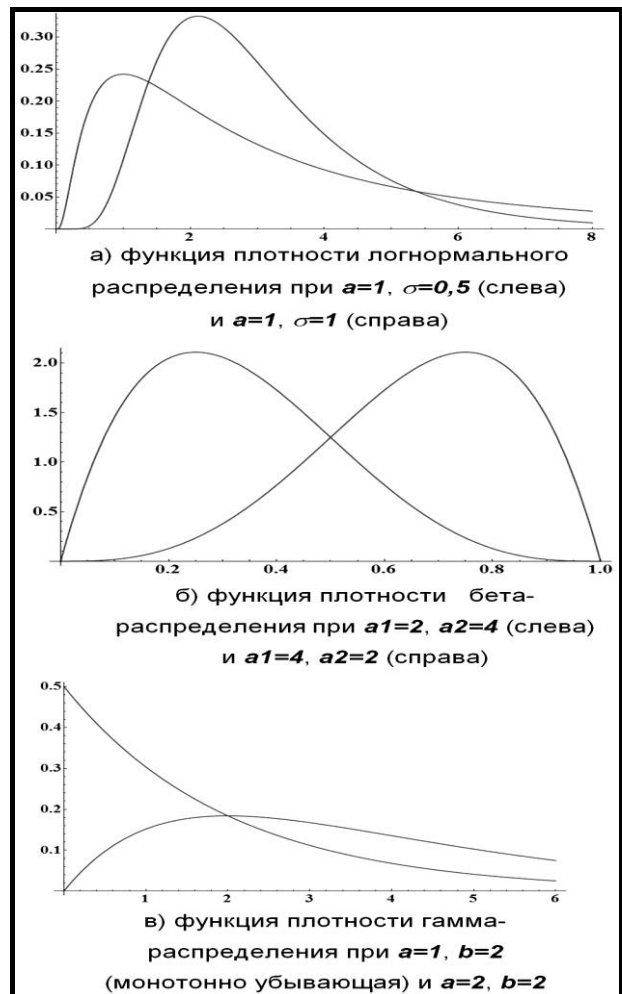


Рис. 2. Графики функций плотности

Следует отметить, что использование логнормального распределения оправдано при описании в социально однородных группах населения с низкими доходами, гамма-распределения – в группах со средними доходами, показательного – в группах с высокими доходами [4]. В социально неоднородной группе требуется применение семейств моделей распределения различных классов, что будет способствовать повышению вычислительной сложности. Использование логнормального и гамма-распределения в силу их неограниченности сверху приводит к появлению группы «супербогатых» в многоагентной системе, что идет в разрез с официальной региональной статистикой. Ниже приводятся результаты моделирования назначения заработной платы агентам типа «человек» на основе вероятностно-статистического подхода с использованием одного класса моделей бета-распределения, гамма-распределения и логнормального распределения.

### Описание алгоритма подбора параметров закона распределения вероятностей



**Рис. 3. Этапы алгоритма для генерирования заработной платы агентам типа «человек» с использованием стандартных законов распределений**

Как было сказано выше, для генерирования значения заработной платы агентов типа «человек» в территориальной социально-экономической системе на примере Республики Башкортостан определению подлежат значения параметров 930 наборов функций распределения. Очевидно, что подбор необходимых параметров вручную является практически неосуществимой задачей. Поэтому для ее решения были разработаны специальные вычисли-

тельные процедуры для каждого класса моделей функций распределения (рис. 3). Подбор параметров моделей распределения осуществлялся для каждого муниципального образования в разрезе всех видов экономической деятельности.

Перебор значений параметров  $a_1$  и  $a_2$   $B$ -распределения проводился в диапазоне от 0,5 до 7 с шагом в 0,1. Экспериментально было установлено, что значения параметров, лежащие за пределами рассматриваемого интервала, не повышают точности приближения расчетных значений средней заработной платы к реальной. Уменьшение величины шага также не приводило к повышению точности получаемых результатов.

Определение параметров  $\Gamma$ -распределения с учетом выражений для математического ожидания и дисперсии было сведено к перебору значений одного параметра в диапазоне от 0,01 до пяти с шагом 0,01. Эксперименты с вариацией верхней границы диапазона этого параметра показали, что при ее увеличении происходил существенный рост средней заработной платы, что делало нецелесообразным рассмотрение значений верхней границы, превышающих пять. Выбранный размер шага позволил осуществить достаточно плотное покрытие интервала  $[0,01; 5]$  без существенных временных затрат на проведение численного эксперимента.

Наилучшими считались наборы значений параметров распределений вероятностей, которые обеспечивали минимальные расхождения расчетных и фактических значений средних размеров заработной платы по республике в целом (без учета видов экономической деятельности и деления на муниципальные образования).

### Обсуждение результатов

Результаты проведенных расчетов позволили определить параметры трех классов стандартных распределений при генерировании заработной платы агентам типа «человек» в зависимости от его принадлежности к муниципальному образованию и виду деятельности. Это позволило рассчитать также и оценки средних уровней заработной платы по видам деятельности для региона в целом. Сравнение с имеющимися статистическими данными (табл. 2) показало достаточно неплохую близость расчетных и фактических средних уровней заработной платы и позволило, по сути, оценить первую компоненту функции отклика.

Значения же второй компоненты функции отклика показали существенные расхождения фактических и расчетных значений средних заработных плат агента типа «человек» в определенных диапазонах в разрезах муниципальных образований и видов экономической деятельности (рис. 4) и по региону в целом (рис. 5).

Таблица 2

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПОДХОДОВ СРЕДНИХ УРОВНЕЙ ЗАРАБОТНОЙ ПО ВИДАМ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

%

Вид деятельности	Погрешности (min; max; среднее значение)								
	В-распределение			Г-распределение			Логнормальное распределение		
	min	max	среднее	min	max	среднее	min	max	среднее
Сельское хозяйство, охота и лесное хозяйство	0,02	20,83	3,20	0,01	8,89	2,20	0,11	12,77	2,74
Рыболовство, рыбоводство	0,00	16,61	0,44	0,00	3,06	0,09	0,00	70,98	1,28
Добыча полезных ископаемых	0,11	46,13	7,52	0,00	313,66	5,56	0,08	334,05	36,36
Обрабатывающие производства	0,04	37,49	5,52	0,02	18,46	3,14	0,08	32,62	8,91
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	0,03	233,06	10,04	0,04	31,94	5,95	0,13	167,76	10,96
Строительство	0,03	32,54	5,80	0,02	9,49	2,58	0,20	51,00	3,67
Оптовая и розничная торговля	0,09	35,06	6,18	0,02	10,51	2,69	0,03	26,33	3,27
Гостиницы и рестораны	0,18	66,74	11,24	0,07	99,90	15,28	0,26	78,61	14,38
Транспорт и связь	0,06	18,79	3,25	0,00	40,58	2,32	0,27	8,47	2,59
Финансовая деятельность	0,09	33,77	13,45	0,14	148,86	5,75	0,02	245,04	34,19
Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг	0,09	23,30	5,79	0,08	8,94	3,02	0,06	20,07	3,80
Государственное управление и обеспечение военной безопасности	0,05	14,55	2,75	0,06	3,43	1,35	0,00	3,92	2,10
Образование	0,04	5,56	1,44	0,01	2,96	1,09	0,18	3,10	1,85
Здравоохранение и предоставление социальных услуг	0,03	7,33	2,22	0,03	6,16	1,26	0,53	4,76	2,10
Предоставление прочих коммунальных, социальных и персональных услуг	0,13	22,20	4,99	0,03	19,95	3,05	0,05	13,51	3,17

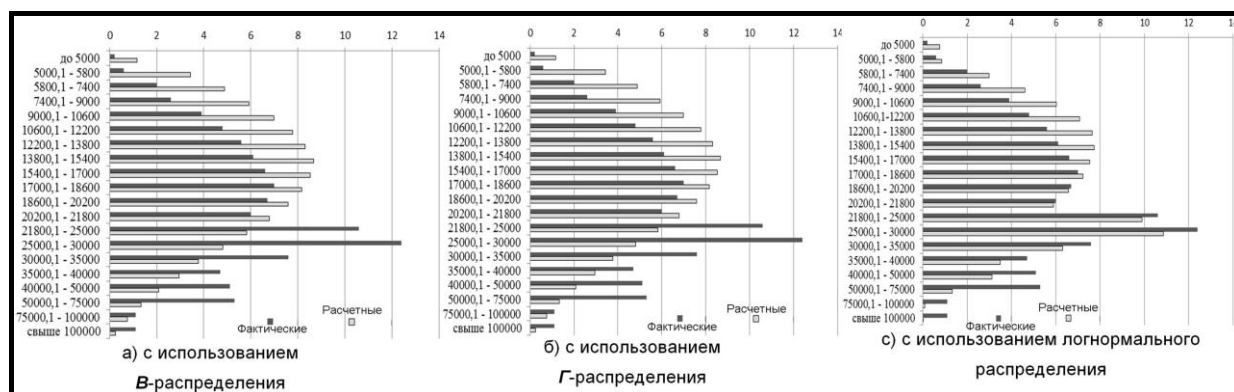


Рис. 4. Распределения численности работников Республики Башкортостан по размеру начисленной заработной платы по виду экономической деятельности «Обрабатывающие производства»

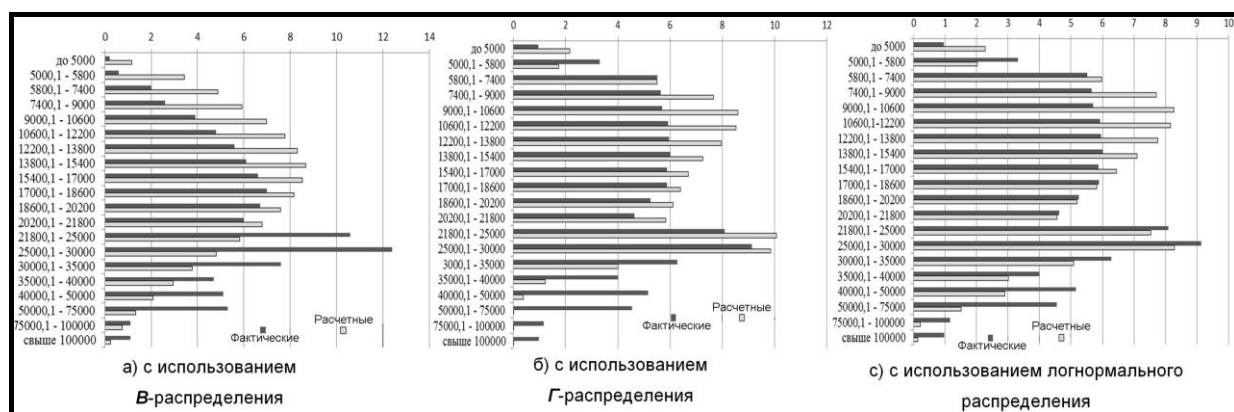


Рис. 5. Распределения численности работников Республики Башкортостан по размеру начисленной заработной платы (по всем видам экономической деятельности)

Можно предположить, что полученные неудовлетворительные результаты объясняются высокой социальной неоднородностью населения региона по уровню дохода. Для повышения точности описания в рамках вероятностно-статистического подхода применяются схемы, основанные на использовании семейств распределений [4], что, очевидно, ведет к определенным вычислительным трудностям. Применительно к решаемой задаче, в условиях необходимости определения большого количества моделей распределения вероятностей, вычислительные проблемы могут привести к существенным временным затратам и при этом не гарантировать достижение поставленной цели.

## ВЫВОДЫ

В ходе проведения численных экспериментов с использованием логнормального, бета- и гамма-распределений при генерировании заработной платы агентам типа «человек» в многоагентной региональной системе было установлено следующее:

- рассмотренные классы стандартных законов распределения вероятностей плохо описывают заработную плату занятых с низким и средним уровнями доходов;
- использование вероятностно-статистических методов в каждом отдельном имитационном эксперименте может приводить к различным исходам и соответственно к различным средним уровням заработной платы по видам экономической деятельности в региональном или муниципальном разрезах;
- вероятностно-статистические методы позволяют описать с высокой степенью достоверности распределение по уровню заработной платы для нескольких муниципальных образований, но не для всего региона в целом в рассматриваемых разрезах;
- вероятностные методы не позволяют учитывать гендерную дифференциацию по уровню заработной платы, а также разрывы в заработной плате по видам экономической деятельности.

Таким образом, экспериментально было установлено, что использование вероятностно-статистического подхода при генерировании заработной платы агентам типа «человек» в рамках работы по созданию многоуровневой агент-ориентированной модели развития региона (на примере Республики Башкортостан) не позволяет достигнуть адекватных значений функции отклика, характеризующей параметры всех уровней, и, следовательно, не является эффективным. Поэтому для адекватного описания исследуемой региональной системы целесообразным являются разработка и реализация специальных (не вероятностных) алгоритмов, способных учесть все необходимые аспекты, подлежащие отражению в компоненте функции отклика.

## Литература

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики [Текст] : учеб. для вузов / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
2. Айвазян С.А. Уровень бедности и дифференциация населения России по расходам [Текст] / С.А. Айвазян, С.О. Колеников. – М. : РПЭИ, 2001. – 74 с.
3. Бахтизин А.Р. Агент-ориентированные модели экономики [Текст] / А.Р. Бахтизин. – М. : Экономика, 2008. – 279 с.
4. Бородин Ф.М. и др. Стабильность распределения доходов в современной России (1994-2004) [Текст] / Ф.М. Бородин, В.А. Брагин, М.В. Шпак // Прикладная эконометрика. – 2006. – №3. – С. 17-67.
5. Карпов Ю. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5 [Текст] / Ю. Карпов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 400 с.

6. Макаров В.Л. и др. Компьютерное моделирование взаимодействия между муниципалитетами, регионами, органами государственного управления [Текст] / В.Л. Макаров, А.Р. Бахтизин, Е.Д. Сушко // Проблемы управления. – 2013. – №6. – С. 31-40.
7. Методика расчета показателей распределения и дифференциации по уровню дохода [Электронный ресурс] // Федер. служба госуд. статистики: официальный сайт. URL: [http://www.gks.ru/bgd/free/B99\\_10/lssWWW.exe/Stg/d000/i000150r.htm](http://www.gks.ru/bgd/free/B99_10/lssWWW.exe/Stg/d000/i000150r.htm).
8. Сушко Е.Д. Мультиагентная модель региона: концепция, конструкция и реализация [Текст] : препринт # WP / Е.Д. Сушко. – М. : ЦЭМИ РАН, 2012. – 54 с.
9. Anylogic. Многоподходное имитационное моделирование [Электронный ресурс] // Anylogic: официальный сайт. URL: <http://www.anylogic.ru>.

## Ключевые слова

Агент-ориентированное моделирование; мультиагентное моделирование; агент; моделирование развития территориальных социально-экономических систем; логнормальное распределение; гамма-распределение; бета-распределение; распределение доходов населения; модель регионального развития; моделирование распределения заработной платы/

*Гафарова Елена Аркадьевна*

*Кантор Ольга Геннадиевна*

*Кульмухаметов Мурат Булатович*

## РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность проблемы. Одним из наиболее эффективных подходов к моделированию территориальных социально-экономических систем (ТСЭС) на сегодняшний день является имитационное моделирование, в частности агент-ориентированные модели, основанные на индивидуальном поведении множества агентов и создаваемые для компьютерных симуляций. Процесс разработки агент-ориентированной модели ТСЭС оценивается как трудоемкий и долгий. Разработчик должен иметь глубокие знания в предметной области, а также программировании, теории вероятностей, статистике и пр. Для исследователей в области экономико-математического моделирования интерес представляют вопросы, связанные с проверкой корректности реализации (валидацией), калибровкой агентных моделей, планированием и проведением экспериментов. В свете этого тема рецензируемой статьи является актуальной.

Научная новизна и практическая значимость. В статье Гафаровой Е.А., Кантор О.Г., Кульмухаметова М.Б. описаны проблемы, связанные с моделированием заработной платы в региональной многоагентной системе, а также приводятся результаты моделирования заработной платы на основе вероятностно-статистического подхода. Для повышения степени достоверности многоагентной региональной системы в условиях полного отсутствия или низкого качества необходимой статистической информации для решения поставленной задачи широко используются вероятностно-статистические методы. Представленные в статье расчеты по оценке средней заработной платы на региональном или муниципальном уровне показывают несостоятельность этих методов в условиях ТСЭС с внутренней неоднородностью. Считаю, что статья представляет интерес как в научном, так и практическом плане.

Заключение. Рецензируемая статья отвечает требованиям, предъявляемым к научным публикациям, и может быть рекомендована к опубликованию в журнале «Аудит и финансовый анализ».

*Бахитова Р.Х., д.э.н., доцент, заведующий кафедрой математических методов в экономике Института экономики финансов и бизнеса, профессор Башкирского государственного университета.*