# 3.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ В АКТУАРНЫХ РАСЧЕТАХ

Подчищаева О.В., к.ф.-м.н., доцент,
кафедра «Информационные системы
в финансово-кредитной сфере»;
Никулина Н.Н., к.э.н., доцент, кафедра «Финансы
и кредит», почетный работник высшего
профессионального образования РФ

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского – Национальный исследовательский университет, г. Нижний Новгород*

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ

Предлагается теория оптимизации взаимодействия «страховщик – страхователь» с применением функции полезности в актуарных расчетах.

Модель ожидаемой полезности может объяснить само существование института страхования. В этой модели страхователь является лицом, не склонным к риску и принимающим разумные решения. Механизм принятия решений при наличии неопределенности состоит в сравнении не ожидаемых платежей, возникающих в результате решений, а ожидаемых полезностей этих платежей.

Лицо, принимающее решения, связывает с размером своего капитала $w$ (от англ. welfare – «благосостояние») некоторое количество $u(w)$, обычно даже не подозревая об этом; функция $u(x)$ называется функцией полезности (utility function).

Страхователь готов платить страховую премию, большую, чем математическое ожидание страхового убытка. Теория полезности так объясняет это явление. Потенциальный страхователь собирается заключить договора страхования определенного объекта со случайной величиной ущерба $X$ при наступлении страхового случая. Известна вероятность возникновения ущерба $p$ и первоначальный капитал страхователя $w$.

Страхователь должен сделать выбор из двух вариантов (табл. 1.):

- заключить договор страхования и заплатить за него брутто-премию (БП);
- не заплатить БП и пойти на риск потери суммы $X$.

**Таблица 1**

**ВАРИАНТЫ РЕШЕНИЙ СТРАХОВАТЕЛЯ**

| Страховой случай | Наличие договора страхования | |
|---|---|---|
| | есть | нет |
| Нет | $w-БП$ | $w$ |
| Есть | $w-БП$ | $w-X$ |

Для страхователя лучше, когда его капитал $w$ растет. Однако ощущение полезности капитала не прямо пропорционально величине $X$. Если страхователь теряет значительную часть капитала, то это может быть для него катастрофично. Поэтому страхователю нужно внимательно взвесить исходы, при которых его капитал упадет до очень низкого уровня. Нежелательность событий, приводящих к большому ущербу, хорошо объясняется низким значением функции полезности. С другой стороны, растущий капитал обычно воспринимается как положительное событие, но чем богаче страхователь, тем меньше веса придается его желанию увеличить капитал на определенную фиксированную величину $\Delta w$.

Эта закономерность объясняется $u(x)$ – функцией полезности, оценивающей, насколько желательными являются различные исходы для того, кто принимает решение.

Если страхователь заключил договор полного страхования, то функция полезности будет иметь вид:

$$u_1=(1-p)u(w-БП)+ \\ +pu(w-БП)=u(w-БП). \quad (1)$$

Если страхователь не заключит договор страхования, функция полезности будет равна:

$$u_2=(1-p)u(w)+pu(w-X). \quad (2)$$

Если $u_1>u_2$, то страхователь принимает решение о необходимости заключить договор страхования, в противном случае – отказывается [2, с. 59].

У страхователя и страховщика существует у каждого своя функция полезности – $u(x)$ и $U(x)$ соответственно. С точки зрения страхователя, если необходимо выбрать один из двух убытков $X_1$ или $X_2$, то индивидуум сравнивает математические ожидания $M[u(w-X_1)]$ и $M[u(w-X_2)]$ и выбирает убыток с наибольшей ожидаемой полезностью.

Максимальная премия, которую он готов заплатить за страхование убытка $X$, определяется как решение относительно $БП_{max}$ уравнения равновесия полезности с точки зрения страхователя:

$$M[u(w-X)]=u(w-БП_{max}). \quad (3)$$

Это так называемая премия нулевой полезности [3, с. 5]. У страховщика есть своя функция полезности $U$ и свой капитал $W$, и он может определить аналогичным образом минимальную премию $БП_{min}$, которую должен внести страхователь. Уравнение равновесия полезности с позиции страховщика:

$$U(W)=M[U(W+БП_{min}-X)]. \quad (4)$$

Если $БП_{max}$ страхователя больше $БП_{min}$ страховщика, то обе стороны, выбрав премию между $БП_{min}$ и $БП_{max}$, увеличивают свою полезность, заключая договор страхования [3, с. 4].

Функция полезности – растущая функция капитала (рис. 1), она должна обладать следующими свойствами [1, с. 709].

*Первое*. Функция $u(x)$ должна быть неубывающей:

$$u'(x)\geq 0.$$

Первая производная функции полезности неотрицательна. Большему значению капитала обычно соответствует большее значение функции полезности, поэтому функция полезности должна быть неубывающей.

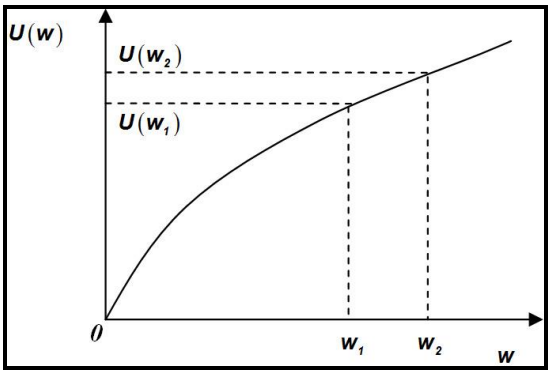


**Рис. 1. Вид типичной функции полезности не склонного к риску страхователя**

*Второе.* Скорость возрастания $u(x)$ должна убывать:

$$u''(x) \le 0.$$

Вторая производная функции полезности $u(x)$ меньше или равна нулю. Прирост благосостояния дает меньший (в относительном выражении) прирост полезности $u$, чем сокращение уровня благосостояния на ту же величину (см. рис. 1). Лиц с такой функцией полезности называют лицами с убывающей предельной полезностью [6, с. 335].

Третье. Функция инвариантна относительно линейного преобразования: $u(x)$ и $au(x)+b$ эквиваленты, так как одинаково ранжируют суммы.

Лицо, принимающее решение, осуществляет выбор между вариантами, содержащими неопределенность. С точки зрения сравнения случайных убытков $X_1$ и $X_2$, функция полезности $u_1(x)$ эквивалента функции $au_2(x)+b, a>0$.

Неравенство Йенсена гласит: если $v(x)$ – выпуклая вниз функция, а $X$ – случайная величина, то математические ожидания:

$$M\left[v(X)\right] \ge v\left(M(X)\right), \qquad (5)$$

причем равенство достигается тогда, и только тогда, когда $v(x)$ линейна на множестве, где сосредоточена случайная величина $X$, или когда $D(X)=0$ (т.е. $X=const$).

Из неравенства Йенсена вытекает, что для выпуклой вверх функции полезности $u(x)$:

$$M\left[u(w-X)\right] \le u\left(M(w-X)\right) = u\left(w-M(x)\right). \qquad (6)$$

Поэтому лица с убывающей предельной полезностью $\left(u''(x)<0\right)$ справедливо называют не склонными к риску (risk averse): они предпочитают детерминированный (неслучайный) платеж $БП$ случайному платежу $X$.

Принимаемое страхователем решение будет зависеть не только от $p, X$ и $БП$, но и от выбора функции полезности.

Наиболее часто используют следующие классы функции полезности [4, с. 452]:

- квадратичная функция: $u(w) = -(a-w)^2, w \le a$;
- логарифмическая функция: $u(w) = ln(a+w)$, $w > -a$;
- показательная функция: $u(w) = -a * e^{-a*w}, a > 0$;
- степенная функция: $u(w) = w^a, w > 0,\ 0 < a \le 1$.

Функция полезности применима для описания рационального поведения в простых ситуациях, трудно бывает обосновать ее вид в определенных случаях. На практике функцию полезности обычно определяют с помощью экспертных оценок, так как невозможно найти функцию полезности, которая бы удовлетворительно описывала все объекты страхования. Вообще вопрос выбора функции полезности является самым сложным и неопределенным в теории полезности, как отмечается во многих актуарных источниках.

Упрощенное определение премии, которую готов заплатить страхователь, можно узнать, задав ему вопрос, какую премию $БП$ готов он заплатить, чтобы избежать убытка размером $X$, который может возникнуть с вероятностью $p$, т.е. оценить $БП_{max}$ для риска $X$ при заданной функции $u(x)$.

Более точно оценить $БП_{max}$ можно на основании коэффициента несклонности к риску (risk aversion coefficient) функции полезности [1, с. 71]:

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}. \qquad (7)$$

Чем выше коэффициент несклонности к риску, тем большую премию готов заплатить страхователь за страхование одного и того же риска. Максимальная премия, которую будет готов заплатить страхователь, равна [5, с. 242]:

$$БП_{max} \approx M(X) - \frac{1}{2} D(X) \frac{u''\left(w-M(X)\right)}{u'\left(w-M(X)\right)}; \qquad (8)$$

$$БП_{max} \approx M(X) - \frac{1}{2} D(X) r\left(w+M(X)\right). \qquad (9)$$

*Пример 1.* Страховщик использует показательную функцию полезности $U(x) = -a * e^{-ax}$ с параметром $a>0$ и имеет капитал $W$.

- а) Найдите коэффициент несклонности к риску для данной функции полезности.
- б) Какова минимальная премия $БП_{min}$, за которую страховщик согласится принять риск $X$?

*Решение.*

- а) Коэффициент несклонности к риску для данной функции полезности найдем по формуле (7):

$$r(W) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = -\frac{-a^3 * e^{-a*x}}{a^2 * e^{-a*x}} = a.$$

Таким образом, для показательной функции полезности коэффициент несклонности к риску равен параметру функции полезности, постоянен и не зависит от начального капитала $W$.

- б) Минимальную премию, за которую страховщик может принять такой риск, руководствуясь данной функцией полезности, определим из уравнения (4):

$$U(W) = M\left[U(W + БП_{min} - X)\right];$$

$$-a * e^{-aW} = M\left[-a * e^{-a(W + БП_{min} - X)}\right].$$

Используя свойства математического ожидания, получим:

$$-a * e^{-aW} = -a * e^{-aW} * e^{-a*БП_{min}} M\left[e^{aX}\right];$$

$$e^{a*БП_{min}} = M\left[e^{aX}\right].$$

Таким образом, минимальная премия равна:

$$БП_{min} = \frac{1}{a} ln\left(M\left[e^{a\square X}\right]\right).$$

где $M\left(e^{aX}\right)$ – производящая функция моментов случайной величины $X$, аргументом которой является $a$.

Мы получили показательную премию. Показательная премия не зависит от текущего капитала страховщика $W$, и это согласуется с тем, что получено нами в пункте а) решения – коэффициент несклонности к риску показательной функции полезности является константой.

Использование функции полезности $u(x)$ при выборе наилучшего договора страхования (или отказа от страхования вообще) осуществляется следующим образом.

Напомним, что $w$ – начальный капитал страхователя (его уровень благосостояния); $БП$ – плата за страховой полис; $X$ – наступивший ущерб в течение действия срока договора (случайная величина, имеющая в общем случае определенный закон распределения ущерба с плотностью $f(x)$.

Тогда принцип эквивалентности в случае полной защиты выражается равенством значений функции полезности при страховании (левая часть равенства) и при отказе страхования (правая часть равенства) (так как убытки являются случайной величиной, мы можем оценить лишь среднее математическое ожидание функции полезности [2, с. 63]):

$$u(w - БП) = M\left(u(w - x)\right).$$

Страхователю выгодно страхование, если

$$u(w - БП) > M\left(u(w - x)\right).$$

Если мы имеем договор не полной, а частичной защиты, страхователь может еще и оплачивать часть убытков $X$. В этом случае необходимо найти математическое ожидание функции полезности от остатка от его капитала:

$$M\left(u(w_{ост})\right) = M\left(u(w - БП - x)_{частич}\right). \qquad (10)$$

Таким образом, вычислив функцию полезности для различных вариантов договоров страхования и отказа от страхования вообще, можно выяснить, какое поведение будет наиболее выгодно страхователю с точки зрения теории полезности.

Математическое ожидание функции полезности $u(x)$ для всех вариантов равно:

$$M\left(u(w_{ост})\right) = \int_a^b u(w_{ост}) f(x) dx. \qquad (11)$$

где $f(x)$ – плотность распределения ущерба на интервале от $a$ до $b$ (если ущерб ограничен, иначе $b = +\infty$); $w_{ост}$ – остаток от его капитала по прошествии года.

Прежде всего при решении задач определяются граничные условия $u(x)$:

$u_{min} = u(w - 0) = u(w)$ (страхователь не страховался, убытков не было вообще);

$u_{max} = u(w - X_{max}) = u(w - b)$ (страхователь не страховался, убытки максимальные).

Все значения функции полезности должны находиться в полученных пределах:

$$u_{min} \le u(x) \le u_{max}.$$

Отказ от страхования соответствует функции полезности:

$$M\left(u(w - x)\right).$$

При использовании договора частичного возмещения ущерба функция полезности вычисляется от остатка капитала $w_{ост}$ после уплаты страховой премии и убытка, оставленного на собственном удержании страхователя.

Значения функции полезности для различных вариантов договоров страхования определяются согласно условиям договоров – брутто-премиями и доле ответственности за риск.

Максимальное из найденных значений функции полезности и укажет на наиболее выгодный для страхователя договор.

*Пример 2.* Потенциальный страхователь имеет капитал $w = 500\ у.е.$, использует функцию полезности $u(x) = ln\, x$ для оценки своего выбора. Возможный ущерб по имеющемуся у него объекту страхования распределен равномерно на интервале $(0;400)\ у.е.$ Что ему выгоднее с точки зрения функции полезности:

- а) отказ от страхования;
- б) договор с полной защитой при страховой премии $200\ у.е.$;
- в) договор защиты с условной франшизой $L = 50\ у.е.$. с премией $140\ у.е.$;
- г) договор с безусловной франшизой $L = 60\ у.е.$ с премией $120\ у.е.$;
- д) договор частичной защиты на следующих условиях: полная компенсация ущерба до $200\ у.е.$ и возмеще-

ние половины ущерба после $200\ y.e.$ при страховой премии $100\ y.e.$

*Решение.* Необходимо вычислить функцию полезности для различных вариантов договоров страхования и отказа от страхования вообще и таким образом выяснить, какое поведение будет наиболее выгодное страхователю с точки зрения теории полезности.

Определим граничные условия:

$$u_{max} = u(w-0) = u(w) = ln(500) = 6,215$$

(убытков не будет вообще);

$$u_{min} = u(w - X_{max}) = u(w-400) = ln(100) = 4,605$$

(убытки максимальные).

Все значения функции полезности в данной задаче должны быть в интервале

$$4,605 \le u(x) \le 6,215.$$

Математическое ожидание функции полезности $u(w)$ равно (11):

$$M(u(w_{ост})) = \int_a^b u(w_{ост}) f(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность распределения ущерба на интервале от $a$ до $b$;

$w_{ост}$ – остаток от капитала после уплаты страховой премии по договору и убытков, оставшихся на собственном удержании страхователя.

По условию задачи ущерб распределен равномерно на интервале $[0;400]$, его функция плотности вероятностей, согласно равномерному закону распределения:

$$f(x) = \frac{1}{400}.$$

И тогда математическое ожидание функции полезности в данной задаче:

$$M(u(w_{ост})) = \frac{1}{400}\int_0^{400} u(w_{ост})dx,$$

- а) отказ от страхования означает оплату любого наступившего убытка из своего капитала, тогда математическое ожидание функции полезности

$$M(u(w-x)).$$

В условиях нашей задачи:

$$M(u_0) = M(u(500-x)) =$$

$$= 0,0025\int_0^{400} ln(500-x)dx =$$

$$= -0,0025\int_0^{400} ln(500-x)d(500-x) \approx 5,617.$$

Значения функции полезности для различных вариантов договоров страхования определяются согласно условиям договора – брутто-премиям и доле ответственности за риск.

- б) в договоре страхования с полной защитой при страховой премии $200\ y.e.$ страхователь уменьшит свой капитал на брутто-премию $200\ y.e.$, но зато ему будут оплачены все наступившие убытки $x$.

Капитал к концу срока составит:

$$w_{ост} = 500 - 200 - x + x = 300,$$

а значение функции полезности:

$$u_1 = u(300) = ln\,300 \approx 5,704.$$

- в) в договоре страхования с условной франшизой $L = 50\ y.e.$ с премией $140\ y.e.$ капитал в любом случае уменьшится на брутто-премию $140\ y.e.$, и при наступлении малых убытков, не превышающих франшизу, на величину этих убытков. Если же ущерб превысит франшизу, об будет возмещен полностью:

$$y = \begin{cases} 0, x \le L; \\ x, x > L; \end{cases} w_{ост} = \begin{cases} 500 - 140 - x, & X \le 50; \\ 500 - 140 - x + x, & X > 50. \end{cases}$$

Получаем значение функции полезности:

$$M(u_2) = 0,0025\int_0^{50} ln(360-x)dx +$$

$$+0,0025\int_{50}^{400} ln\,360dx =$$

$$= 0,0025(290,66 + 5,886 * 350) = 5,877.$$

- г) в договоре страхования с безусловной франшизой $L = 60\ y.e.$ и премией $120\ y.e.$ капитал в любом случае уменьшится на брутто-премию $120\ y.e.$ и при наступлении малых убытков, не превышающих франшизу, на величину этих убытков. Если же ущерб превысит франшизу, он будет возмещен за вычетом франшизы:

$$y = \begin{cases} 0, x \le L; \\ x - L, x > L; \end{cases} w_{ост} =$$

$$= \begin{cases} 500 - 120 - x, & X \le 60; \\ 500 - 120 - x + x - 60, & X > 60. \end{cases}$$

Получаем значение функции полезности:

$$y = \begin{cases} 0, x \le L; \\ x - L, x > L; \end{cases}$$

$$w_{ост} = \begin{cases} 500 - 120 - x, & X \le 60; \\ 500 - 120 - x + x - 60, & X > 60. \end{cases}$$

$$M(u_3) = 0,0025\int_0^{60} ln(380-x)dx +$$

$$+0,0025\int_{60}^{400} ln\,320dx =$$

$$= 0,0025(351,4 + 1961,23) = 5,782.$$

- д) В договоре страхования с частичной защитой при полной компенсации ущерба до $200\ y.e.$ и возмещение половины ущерба после $200\ y.e.$ при страховой премии $100\ y.e.$ капитал в любом случае уменьшится на брутто-премию $100\ y.e.$, и при наступлении малых убытков, не превышающих $200\ y.e.$, они будут полностью компенсированы. Если же ущерб превысит $200\ y.e.$, он будет возмещен наполовину:

$$y = \begin{cases} 0, x \le 200; \\ x/2, x > 2000; \end{cases}$$

$$w_{ост} = \begin{cases} 500 - 100 - x + x, & X \le 200; \\ 500 - 100 - x + \frac{x}{2}, & X > 200. \end{cases}$$

Получаем значение функции полезности:

$$M(u_4) = 0,0025 \int_0^{200} \ln 400 dx +$$

$$+0,0025 \int_{200}^{400} \ln\left(400 \frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= 0,0025(1198,29 + 1102,94) = 5,753.$$

Теперь сравним полученные результаты и выберем условия с максимальной функцией полезности (табл. 2).

**Таблица 2**

**СРАВНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ ДЛЯ РАЗНЫХ СЛУЧАЕВ**

| Граничные условия | Значение функции полезности | |
|---|---|---|
| Нет убытков | $u_{min}$ | 6,215 |
| Убытки *max* | $u_{max}$ | 4,605 |
| Договор страхования | - | - |
| Отказ от страхования | $u_0$ | 5,617 |
| Полная защита | $u_1$ | 5,704 |
| Условная франшиза | $u_2$ | 5,877 |
| Безусловная франшиза | $u_3$ | 5,782 |
| Частичная защита | $u_4$ | 5,753 |

Как видим, небольшое преимущество у договора с условной франшизой. Самым невыгодным из рассмотренных является договор полной защиты – видимо, за счет слишком высокой премии. Однако любой из предложенных договоров являются более выгодными для страхователя, чем отказ от страхования с точки зрения функции полезности.

Ответ: согласно теории функции полезности страхователю выгоднее оформить любой из предложенных страховщиком видов договоров страхования, чем отказаться от страхования вообще. Однако самым выгодным является договор с условной франшизой.

Таким образом, применение функции полезности в актуарных расчетах позволяет выработать страховщику и страхователю взаимовыгодные стратегии, что очень важно для процесса страхования.

## Литература


1. Воронина А.С. и др. Инновационное развитие российской экономики: проблемы и ближайшие перспективы [Текст] / А.С. Воронина, Ю.Н. Пыхтеев, А.М. Самочадин // Междунар. ж-л прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – №8. – С. 708-712.
2. Никулина Н.Н. Особенности организации оплаты труда менеджмента высшего звена и персонала дирекции страховой организации [Текст] / Н.Н. Никулина, О.В. Подчищаева // Страховое дело. – 2013. – №4-5. – С. 58-65.
3. Никулина Н.Н. Мотивационный менеджмент в страховом предпринимательстве [Текст] / Н.Н. Никулина, О.В. Подчищаева // Страховое дело. – 2013. – №3. – С. 3-7.
4. Подчищаева О.В. Оптимизация затрат факторов производства для фирмы, работающей на конкурентном рынке [Текст] / О.В. Подчищаева // Научное обозрение. – 2014. – №8-1. – С. 451-453.
5. Подчищаева О.В Нелинейная задача максимизации прибыли в условиях колебания рыночных цен [Текст] / О.В. Подчищаева, М.С. Бурова // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4-1. – С. 241-242.
6. Пыхтеев Ю.Н. Модель стремительно развивающегося сектора применительно к российской экономике [Текст] / Ю.Н. Пыхтеев, А.И. Эгамов // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2014. – №4-1. – С. 333-338.



## Ключевые слова

Страховщик; страхователь; капитал; ущерб; риск; страховой случай; функция полезности; предельная полезность; премия страховщика; коэффициент несклонности к риску.



*Подчищаева Ольга Вячеславовна*

*Никулина Надежда Николаевна*


## РЕЦЕНЗИЯ

Авторами выбрана актуальная тема исследования в свете «Стратегии развития страховой деятельности в РФ на период до 2020 г.» и последних (с 2013 г.) нормативно-правовых документов Центрального банка РФ – единого мегарегулятора финансового рынка. Авторы статьи, имея постоянные публикации в учебно-монографической и методической литературе, четко выразили свою позицию о необходимости целенаправленной политики в области оптимизации процесса взаимодействия страховщик – страхователь.

С помощью математического аппарата, в частности, через функцию полезности, показаны механизмы выбора оптимальных действий страховщика и страхователя, и, что самое главное, – приведена математическая модель процесса прихода страховщика и страхователя к взаимовыгодному соглашению.

Изложены основные принципы, лежащие в основе выбора оптимальных стратегий страховщика и страхователя, – принципы максимизации прибыли и полезности, приведены примеры использования изложенной математической теории на практике.

Таким образом, поднятые вопросы к рассмотрению в данной статье актуальны, по ним авторы предлагают свою математическую модель с соответствующим обоснованием и примерами. Рекомендую редакционной коллегии журнала «Аудит и финансовый анализ» статью авторов Подчищаевой О.В., Никулиной Н.Н «Использование функции полезности в актуарных расчетах» к рассмотрению и публикации.

*Кокин А.С., д.э.н., профессор кафедры «Финансы и кредит» Института экономики и предпринимательства Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород.*

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ