9. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

9.1. МЕТОДОЛОГИЯ ИЗМЕРЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА ДЕНЕЖНЫХ ДОХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ: АНАЛИЗ И ПРОГНОЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ И ПОЛЯРИЗАЦИИ[1]

Колмаков И.Б., д.э.н., профессор, кафедра информатики

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, г. Москва

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ

В настоящее время для оценки расслоения населения по уровню денежных доходов используется показатель, получаемый из кривой Лоренца н называемый индексом Джини. Но и кривая Лоренца, и индекс Джини, и однозначно их определяющая величина дисперсии логарифма денежных доходов в распределении населения по уровню среднемесячных среднедушевых денежных доходов (ССДД) остаются математическими научно-абстрактными обобщенными понятиями, оторванными от экономического содержания, что затрудняет общение и обсуждение проблем дифференциации доходов населения в общественных организациях и средствах массовой информации, затрудняют количественные оценки решений, принимаемых в органах исполнительной власти. Потенциал свойств кривой Лоренца позволяет дополнительно получать характеристики расслоения населения по уровню денежных доходов экономически более понятные, более простые и более точные, чем индекс Джини. Предлагается серия новых простых, экономически понятных и очень информативных характеристик дифференциации доходов населения, которые были названы полярными. Приведена простая и понятная трактовка индекса поляризации населения по уровню ССДД. Индекс поляризации – это отношение удельного дохода высокодоходных групп к удельному доходу низкодоходных групп. Границей раздела населения на две полярные группы – низкодоходную и высокодоходную – является величина среднего ССДД. В настоящей статье впервые приведена уточненная методология определения индекса поляризации населения по уровню ССДД. На основе этой методологии, используя разработанные инструментальные средства, впервые выполнены прогнозные расчеты показателей поляризации денежных доходов населения и приведены примеры результатов таких прогнозных расчетов.

ВВЕДЕНИЕ

Федеральная служба государственной статистики (Росстат) для оценок расслоения населения по уровню денежных доходов использует в основном два показателя: фондовый коэффициент и индекс Джини. Хотя содержание этих показателей не требует пространных комментариев, поскольку они описаны в справочниках по статистике и отражены в методологических положениях Росстата [9], расчеты этих показателей нуждаются в комментариях. В статье [6] было показано, что фондовый коэффициент, публикуемый Росстатом, не отражает реального положения оценок отношения денежных доходов 10% высокодоходных групп населения к доходам 10% низкодоходных групп населения.

Коэффициент концентрации Лоренца ID (индекс Джини). Дифференциация денежных доходов населения оценивается по кривой Лоренца, которая строится в относительных координатах (***F, D***) – доли населения, доли дохода. Диагональ квадрата ((0,0), (1,1)) определяет линию абсолютного равенства. Отклонение кривой Лоренца от линии абсолютного равенства определяет дифференциацию денежных доходов. Оценка удвоенной площади, ограниченной кривой Лоренца и линией абсолютного равенства, называется индексом Джини. Величина индекса Джини количественно определяет дифференциацию денежных доходов.

Переход от распределения населения по уровню среднедушевых доходов к кривой концентрации Лоренца. Чтобы осуществить переход к распределению Лоренца и поставить в соответствие координатам распределения дохода координаты кривой Лоренца, поступают следующим образом. Вычисляют функцию Лоренца $L(u)$:

$$L(u) = D(x(u)) = (1/X_c)\int_0^{x(u)} x\,dF(x) =$$

$$= (1/X_c)\int_0^{x(u)} xf(x)dx \quad L(u)\in[0,1]$$

для аргумента

$$u = F(x(u)) = \int_0^{x(u)} dF(x) = \int_0^{x(u)} f(x)dx$$

$$u\in[0,1],$$

где $x(u)$ – квантиль порядка u распределения $F(x)$; $f(x)$ – плотность вероятности распределения населения по уровню среднемесячных среднедушевых денежных доходов (ССДД).

Следовательно, чтобы получить кривую Лоренца, необходимо иметь функцию распределения долей численности населения $F(x)$ (относительной величины накопленной численности населения) и функцию распределения долей доходов населения $D(x)$ (относительной величины накопленного дохода населения) для одной и той же оси дохода X. Для выбранной определенным способом величины дохода X_j получают значения пары [$u_j, L(u)_j$], которая и определяет j-ю координату кривой Лоренца. Для удобства последующих преобразований введем обозначения: $F(X_j) = u_j$ – относительная величина накопленной доли численности населения – абсцисса кривой Лоренца; $D(X_j) = L(u)_j$ – соответствующая относительная величина накопленного дохода населения – ордината кривой Лоренца.

Коэффициент концентрации Лоренца (индекс Джини – ID). Коэффициент концентрации Лоренца вычисляется не по двум или нескольким дискретным точкам распределения, а по всей кривой – точкам всего ряда. Кривая Лоренца отличается не только наглядностью, но и позволяет подсчитать дифференциацию распределения доходов через величины площади между кривой Лоренца и границами крайних вариантов. Площадь между прямой

[1] Публикуется при поддержке гранта Российского гуманитарного научного фонда (конкурс 2016 г. «Проведение научных исследований, выполняемых научными коллективами», проект №16-02-00533, соглашение №16-02-00533/16 от 12 мая 2016 г.).

абсолютного равенства и кривой Лоренца обозначим ***SA***, а площадь под кривой Лоренца – ***SB***. Тогда

$$SA + SB = 0{,}5 \text{ или } 2\cdot(SA + SB) = 1.$$

*Индекс Джини (**ID**)* определяется как удвоенная площадь (чтобы нормировать к единице) между кривой Лоренца и прямой абсолютного равенства:

$$ID = 2\cdot SA = 1 - 2\cdot SB$$

$$0 < SA < 0{,}5;$$

$$0 < ID < 1.$$

Чем больше дифференциация распределения доходов, тем дальше кривая Лоренца отстоит от диагональной прямой, тем меньшая величина вычитается из единицы и тем больше коэффициент концентрации.

Для равномерного распределения в случае полного равенства ***ID = 0***. В случае полного неравенства ***ID = 1***.

Основная рабочая формула для расчета индекса Джини принимает вид:

$$ID = 1 - \sum_{1}^{n-1} (L_j + L_{j+1})(u_{j+1} - u_j), \qquad (1)$$

где $(u_{j+1} - u_j)$ – доля населения, относящаяся к j-му интервалу;

L_j, L_{j+1} – доли доходов, приходящиеся на начало и конец j-го интервала.

Для равномерных интервалов практически для подсчета площади под кривой Лоренца используется формула:

$$SB = \int_0^1 L(u)du \approx \Delta\cdot(0{,}5 + \sum_{1}^{n-1} L_j)$$

$$0 < SB < 0{,}5$$

$$u \in [0, 1]. \qquad (2)$$

где Δ – квантование оси абсцисс: $\Delta = 0{,}1$ или $\Delta = 0{,}2$ или другое значение (в зависимости от того, ведется ли расчет по децильным, квинтильным или другим группам деления оси абсцисс);

Lj – значения внутренних точек кривой Лоренца.

Для равномерных интервалов с учетом (2) формула (1) для расчета индекса Джини принимает вид [9]:

$$ID \approx 1 - \Delta - 2\cdot\Delta\cdot\sum_{1}^{n-1} L_j,. \qquad (3)$$

В этой формуле расчетное значение индекса Джини ***ID*** меньше фактического на величину погрешности, обусловленной заменой площади под плавной кривой Лоренца набором площадей соответствующих трапеций.

Площадь под кривой ***SB*** при таком способе расчетов получается завышенной и, соответственно, площадь ***SA*** заниженной. Величина погрешности зависит от величины кванта Δ.

Очевидно, что первоисточником определения индекса Джини является функция распределения населения по уровню ССДД – ***F(x)***.

Р. Лерман и Ш. Ицхаки [17] еще в 1984 г. предложили формулу, по которой индекс Джини вычисляется непосредственно по функции распределения ***F(x)***:

$$ID = (2 / X_c)\cdot cov_F(x, F(x)), \qquad (4)$$

где X_c – среднедушевой доход во всем диапазоне доходов;

$cov_F(x, F(x))$ – ковариация между уровнем дохода x и $F(x)$ – долей населения с доходами на душу не выше, чем x, рассматриваемыми как случайные переменные с одной и той же функцией распределения $F(x)$:

$$cov_F(x, F(x)) = \int_0^\infty (x - X_c)(F(x) - F_c)\, dF(x).$$

Доказывается формула (4) весьма просто. Используя стандартные определения индекса Джини (1) и (2), можем записать:

$$ID = 1 - 2 \cdot \int_0^1 L(u)du =$$

$$= 1 - (2/X_c)\int_0^1 \left(\int_0^{x(u)} x dF(x)\right)du, \qquad (5)$$

где $L(u) = (1/X_c)\int_0^{x(u)} x\, dF(x)$ – функция Лоренца;

$x(u)$ – квантиль порядка u распределения $F(x)$.

Интегрируя по частям первый из интегралов в двойном интеграле и выполнив подстановку $u = F(x(u))$, $x = x(u)$, получим:

$$\int_0^1 \int_0^{x(u)} x\, dF(x)du = X_c - \int_0^1 ux(u)\, dF(x(u)) =$$

$$= X_c - \int_0^\infty xF(x)dF(x) = X_c / 2 - \int_0^\infty (x - X_c)(F(x) -$$

$$- 0{,}5)\, dF(x) = X_c / 2 - cov_F(x, F(x)).$$

Подстановка последнего выражения в формулу (5) дает (4).

Обзор многочисленных индексов и критериев дифференциации доходов населения, методы их вычисления и результаты анализов применения приведены во многих источниках (например, [14, 11, 10; 8; 16] и др.). Подробный анализ вкладов различных источников доходов в общее неравенство денежных доходов приведен в работе [16, с.154-164].

На государственном уровне сегодня существуют два канала измерения денежных доходов населения: выборочное обследование бюджетов домашних хозяйств и косвенные оценки денежных доходов населения по данным макроэкономических измерений [9; 1; 11; 16].

Распределение населения по уровню денежных доходов – очень сложная функция, которую не удается математически описать некоторым одним законом распределения, хотя теоретические, методологические и даже практические предложения достаточно широко представлены в отечественных и зарубежных источниках. Известно, что существует группа обездоленного населения. М. Фридмен [15], исследуя в 1967 г. доходы жителей Чикаго, впервые «…сформулировал концепцию так называемых «отрицательных налогов», эффективную для тех, семейный доход которых находится за чертой бедности…». Вариант математического описания доходов этой группы приведен в [6]. Существуют группы бедного населения, малообеспеченные группы населения, средний класс, группы населения с высокими доходами и группы населения со сверхвысокими доходами. Для каждой группы, по-видимому, существует собственное распределение по уровню денежных доходов. Но инструментов прямого измерения доходов отдельно для каждой группы на сегодня не существует.

Выборочное обследование бюджетов домашних хозяйств оставляет за пределами обследования обездоленных. У этих 5-7% населения нет домашних хозяйств [11; 6]. Достаточно удачно выборочное обследование бюджетов домашних хозяйств охватывает и представляет группы бедного населения, малоимущих и частично (примерно половину) среднего класса. Если проследить данные распределения населения по уровню денежных доходов за последние 18-20 лет, публикуемые Росстатом, то обнаруживается четкая закономерность: поведение доходов 63-65% населения с совокупными денежными доходами в объеме 37-35% могут быть достаточно хорошо описаны логарифмически нормальным распределением [9; 1; 14; 10; 4].

Логарифмически нормальное распределение [10]. Плотность вероятностей для этого закона имеет математическое выражение, как и для нормального распределения, с той только разницей, что вместо случайной величины ***y*** берется ее логарифм ***lny*** и параметры μ и σ^2 (математическое ожидание и дисперсия) исчисляются соответственно для ее логарифма ***lny***. Иными словами, случайная переменная ***y*** имеет логарифмически нормальное распределение с параметрами μ и σ^2, если случайная переменная $x = \ln y$ имеет нормальное распределение с теми же параметрами μ и σ^2. Кривая плотности вероятностей логарифмически нормального распределения населения по уровню ССДД:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (6)$$

имеет правостороннюю асимметрию, которая тем сильнее, чем больше значения параметров μ и σ^2. Каждая кривая имеет один максимум и является положительно определенной для всех положительных значений дохода ***x***.

В Росстате обработка отчетной информации о распределении населения по уровню ССДД на основе методологических положений по статистике [9; 1], в итоге сводится к получению логнормального распределения с некоторыми корректировками. Логнормальное распределение и ряд функций, определяемых на его основе, имеют индикативные характеристики, которые легко вычисляются и приводятся в математических справочниках. Но здесь они воспроизводятся для того, чтобы дополнить математическое содержание этих индикативных характеристик экономическим.

Важнейшей индикативной характеристикой логнормального распределения является мода – модальное значение ССДД, т.е. то значение дохода, при котором плотность распределения населения достигает своего максимального значения. Очевидно, что $f'(X_{mod}) = 0$. Такое значение производной достигается при

$$X_{mod} = \exp(\mu - \sigma^2). \qquad (7)$$

Другой важнейшей индикативной характеристикой логнормального распределения является среднее значение. Вычисление математического ожидания случайной переменной с логарифмически нормальным распределением населения не составляет особых трудностей. X_c – первый момент – случайной величины ***x***, распределенной по логарифмически нормальному закону распределения:

$$X_c = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \exp(\mu + 0{,}5\sigma^2), \qquad (8)$$

Уравнения (7) и (8) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными μ и σ. Решая эту систему относительно μ и σ, получаем:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}\ln k_x} = \sqrt{\frac{2}{3}(\ln X_c - \ln X_{mod})}\,; \qquad (9)$$

$$\mu = = \frac{1}{3}\ln(X_{mod} \cdot X_c^2); \qquad (10)$$

Из формул (9) и (10) следует, что существует возможность определять все характеристики распределения населения по уровню ССДД через два параметра X_c и X_{mod}, имеющие явный экономический смысл.

X_c – математическое ожидание; по экономическому смыслу соответствует значению ССДД в генеральной совокупности, определяемому по доле денежных доходов населения в ВВП и среднегодовой численности населения.

X_{mod} – модальное значение ССДД в генеральной совокупности, соответствующее доходам наиболее многочисленной группы населения. Ретроспективно определяется на основе данных выборочного обследования. Расчетный прогноз (или экспертная оценка прогноза) производится на основе прогноза показателей структуры баланса денежных доходов и расходов населения [4].

Следует отметить, что любая пара значений из четырех (X_{mod}, X_c, μ и σ) определяет любую другую пару значений.

Между модальным значением X_{mod} и средним X_c существует параметрическая связь, определяемая коэффициентом связи индикаторов – аргументов плотности распределения населения по уровню ССДД – k_x:

$$k_x = (X_c / X_{mod}) = e^{\frac{3}{2}\sigma^2}. \qquad (11)$$

Уже сама величина этого отношения говорит об очень многом: чем выше значение k_x, (т.е. чем больше значение дисперсии логарифма дохода σ^2), тем больше степень неравномерности доходов и выше степень расслоения общества.

Для основной индикативной точки плотности кривой распределения населения – координаты модального значения X_{mod} – значение плотности вероятности равно:

$$f(x = X_{mod}) = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu} = \frac{1}{\sigma * X_c * \sqrt{2\pi}}\, e^{\sigma^2} =$$

$$= \frac{1}{\sigma * X_{mod} * \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}. \qquad (12)$$

Для другой основной индикативной точкой плотности кривой распределения населения – координаты среднего дохода X_c – значение плотности вероятности равно:

$$f(x = X_c) = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{5}{8}\sigma^2 - \mu} = \frac{1}{\sigma * X_c\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{8}\sigma^2} = \frac{1}{\sigma * X_{mod} * \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{13}{8}\sigma^2}. \qquad (13)$$

Отношение плотностей вероятности значений в точках X_{mod} и X_c , определим как коэффициент связи индикаторов – плотности распределения населения по уровню ССДД, обозначим k_f и вычислим его:

$$k_f = f(x = X_{mod}) / f(x = X_c) = e^{\frac{9}{8}\sigma^2}.$$

Отношение плотности вероятности в точке модального дохода к значению плотности вероятности в точке среднего дохода в логарифмически нормальном распределении зависит только от значения дисперсии логарифма дохода. Произведение коэффициентов связи $k_f * k_x = (21 / 8)\sigma^2$, как и отношение этих коэффициентов $k_f / k_x = (-3 / 8)\sigma^2$, является только функцией дисперсии логарифмов доходов σ^2 и, следовательно, по экономическому содержанию эти показатели тоже характеризует дифференциацию доходов населения.

Интегральной характеристикой плотности вероятностей логарифмически нормального распределения населения по уровню среднедушевых денежных доходов является функция распределения накопленных долей численности населения:

$$F(0 < x) = F(x) = \int_0^x f(u)du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{u} e^{-\frac{(\ln u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du. \qquad (14)$$

Для полноты оценок дифференциации, наряду с распределением численности населения необходимо рассматривать распределение доходов населения. Кривая распределения – плотность вероятности распределения доходов населения по уровню ССДД-функция – $\chi(x)$ – имеет вид (рис. 1):

$$\chi(x) = x \cdot f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (15)$$

Выражение (15) дает распределение доходов населения по уровню ССДД в денежном выражении. Чтобы выразить распределение денежных доходов населения (плотность вероятности распределения $\varphi(x)$) в относительных единицах, необходимо произведение $x \cdot f(x)$ нормировать к X_c.. Величина параметра нормировки X_c – среднего значения ССДД – была вычислена ранее в (8):

Тогда $\varphi(x) = \frac{1}{X_c}\chi(x) = \frac{1}{X_c} x \cdot f(x) =$

$$= \frac{1}{X_c\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (16)$$

Накопленные доли доходов населения по уровню ССДД есть интеграл или функция $D(x)$:

$$D(0<x) = D(x) = \int_0^x \varphi(u)du = \frac{1}{X_c\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{(\ln u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du. \qquad (17)$$

Построение этих функций принципиально необходимо для решения задач дифференциации и поляризации доходов населения. Поэтому, наряду с уже исследованными свойствами функции $f(x)$, столь же подробно исследуем свойства функции $\varphi(x)$ (17) и найдем для этой функции координаты индикативных точек.

Модальное значение $X_{\varphi mod}$ находим из условия $\varphi'(x) = 0$. Это же значение дохода $\varphi(x)$ в точности соответствует медианному значению дохода $f(x)$. Получаем:

$$X_{\varphi mod} = X_{med} = e^{\mu} \qquad (18)$$

Росстат, наряду с публикацией среднего ССДД X_c стал публиковать медианное значение X_{med} ССДД, [13, с. 85, 88, табл. 5.1]. Из формулы (18) следует, что медианное значение X_{med} ССДД однозначно определяет параметр μ.

Для индикативной точки плотности кривой распределения вероятности денежных доходов - координаты модального значения $X_{\varphi mod}$, – найдем значение плотности вероятности денежного дохода:

$$\varphi(x = X_{\varphi mod}) = \varphi(X_{med}) = \varphi(e^{\mu}) = \varphi_{max} = \frac{1}{X_c\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\mu-\frac{1}{2}\sigma^2}. \qquad (19)$$

Вычислим математическое ожидание $X_{\varphi c}$ случайной величины x, распределенной по закону распределения $\varphi(x)$ – среднее значение плотности дохода:

$$X_{\varphi c} = \frac{1}{X_c\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} x dx = e^{\mu+\frac{3}{2}\sigma^2} = X_c e^{\sigma^2} = X_{\varphi mod} e^{\frac{3}{2}\sigma^2}. \qquad (20)$$

Из (20) следует, что между модальным значением $X_{\varphi mod}$ и средним значением $X_{\varphi c}$ плотности вероятности распределения денежного дохода существует точно такая же параметрическая связь, как и между X_{mod} и X_c:

$$k_{x\varphi} = \frac{X_{\phi c}}{X_{\phi mod}} = e^{\frac{3}{2}\sigma^2} = k_x. \qquad (21)$$

Между средними значениями плотностей численности и доходов обнаруживается очень важная связь:

$$k_{cf\varphi} = \frac{X_{\phi c}}{X_c} = e^{\sigma^2}. \qquad (22)$$

Из формулы (22) следует, что отношение средних значений плотностей численности и доходов ССДД однозначно определяет параметр σ:

$$\sigma = \sqrt{(\ln X_{\phi c} - \ln X_c)}.$$

Найдем значение плотности вероятности распределения денежного дохода $\varphi(x)$ в точке среднего значения $X_{\varphi c}$:

$$\varphi(X_{\varphi c}) = \frac{1}{X_c} X_{\varphi c} \cdot f(X_{\varphi c}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{9}{8}\sigma^2}. \qquad (23)$$

Теперь, когда известны $\varphi(X_{\varphi mod})$ (19) и $\varphi(X_{\varphi c})$ (23) найдем коэффициент связи индикаторов – плотности распределения дохода по уровню ССДД, обозначим k_φ и вычислим его:

$$k_\varphi = \varphi(x = X_{\varphi mod})/\varphi(x = X_{\varphi c}) = e^{\frac{9}{8}\sigma^2} = k_f. \qquad (24)$$

Из (24) следует, что между $\varphi(X_{\varphi mod})$ и $\varphi(X_{\varphi c})$ существует точно такая же параметрическая связь, как в и между $f(X_{mod})$ и $f(X_c)$.

На рис. 1 приведены кривая логарифмически-нормального распределения населения по уровню среднедушевого среднемесячного денежного дохода – плотность вероятности распределения $f(x)$ и кривая логарифмически-нормального распределения доходов по уровню среднедушевого среднемесячного денежного дохода – плотность вероятности распределения $\varphi(x)$. На этих же графиках обозначены основные индикативные точки этих кривых: модальное и среднее значение денежного дохода для плотности вероятности распределения численности населения $f(x)$; значения $f(x)$ в этих точках; модальное и среднее значение денежного дохода для плотности вероятности распределения денежного дохода $\varphi(x)$; значения $\varphi(x)$ в этих точках.

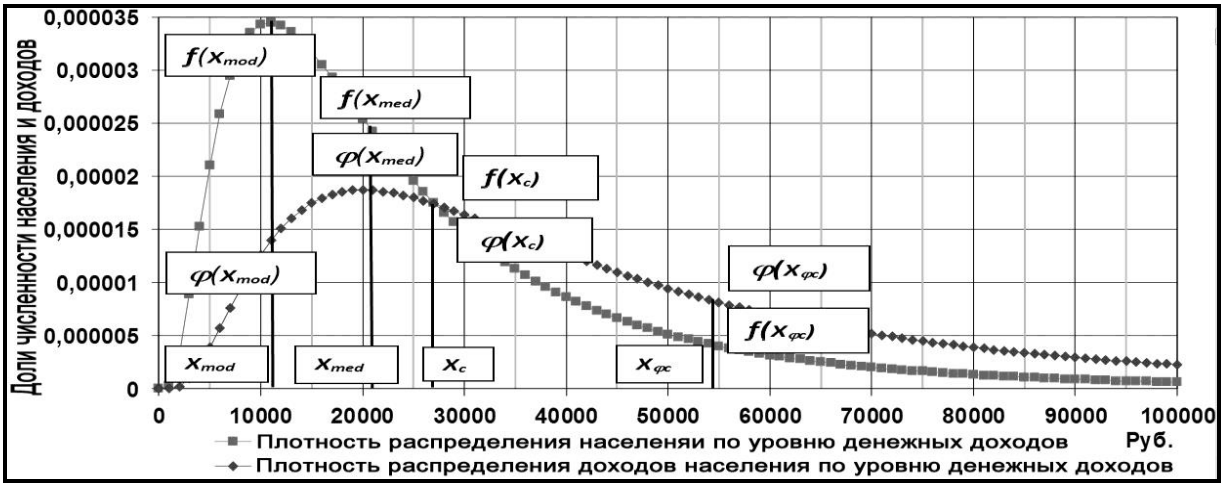

Рис. 1. Плотности распределения долей численности населения – *f(x)*, долей денежного дохода – *φ(x)* по уровню ССДД, и индикативные точки этих кривых

Восстановление параметров распределения по отчетным данным функции распределения. В работах [2; 7; 8] на примерах распределения населения по уровню денежных доходов, публикуемых Росстатом, показано вычисление параметров распределения по известной методике [9; 1].

Используются данные о распределении населения по размеру среднемесячного среднедушевого денежного дохода. Рассматриваемый способ определения параметров логарифмически нормального распределения населения по уровню среднедушевого дохода сводится к отысканию параметра σ из публикуемых Росстатом данных [9], содержащих сведения о функции распределения в следующем виде. Для диапазона дохода (от левой границы X_j до правой границы X_{j+1}) приводится доля населения, имеющего доход в этом диапазоне (приращение функции распределения $\Delta F(X_i)$). Математически это означает, что диапазону доходов (от 0 до X_j) ставится в соответствие значение функции логарифмически нормального распределения населения по уровню среднедушевого дохода $F(0 < x < X_i)$, как накопленной сумме долей численности (приращениям функции распределения $\Delta F(X_i)$) со всеми доходами (от нуля до X_j):

$$F(0 < x < X_i) = \sum_i \Delta F(X_i) = F(X_i).$$

Предполагается, что публикуемые отчетные данные – функция распределения $F(X_i)$ и ее приращения $\Delta F(X_i)$ – могут быть аппроксимированы двухпараметрическим логарифмически нормальным распределением [9, с. 79; 4, с. 20]. Один из параметров – среднее значение душевого денежного дохода X_c – всегда известен. Для определения второго параметра – среднеквадратического отклонения логарифма доходов – используется теоретически известная связь параметров логарифмически нормального распределения с параметрами нормированной функции Лапласа [2; 7; 8].

Другой метод отыскания параметров распределения оказывается значительно проще, если публикуется величина медианного значения дохода X_{med}. Тогда:

$$\mu = \ln(X_{med}) \text{ и } \sigma = \sqrt{2(\ln X_c - \ln X_{med})}. \qquad (25)$$

Расчеты фактических параметров отчетных распределений на данных Росстата за 2014 г. дают значения, близкие к следующим: $\sigma = 0{,}7733..$, $\mu = 9{,}932...$

Анализ расчетных параметров распределений для отчетных данных каждого года показывает, что реальное распределение населения по уровню ССДД отличается от идеализированного.

Параметры сохраняются в средней части распределений, отличаясь на правой ветви по мере удаления от среднего значения весьма существенно. Выполненные расчеты показывают, что начальный участок (от нуля до X_{mod}) «сравнительно удачно» аппроксимируется логарифмически нормальным распределением.

«Достаточно хорошо» аппроксимируется основная часть распределения, заканчивая значениями несколько большими среднего значения среднедушевого дохода X_c. Правая, финальная, часть кривой распределения от X_c до ∞ аппроксимируется «неудачно» по двум основным причинам: отсутствует информация об этой части кривой в выборочных обследованиях и имеют место косвенные оценки информации об этой части кривой в показателях баланса денежных доходов и расходов населения [9, с. 93-109]. В показателях баланса доходов эта недостающая часть информации экспертно досчитывается из балансовых уравнений по расходной части баланса.

Полученные параметры μ и σ отчетных значений распределений позволяют получать количественные оценки многих других параметров и показателей, необходимых для решения аналитических задач отчетных периодов и решения проблем прогнозирования дифференциации и поляризации денежных доходов населения.

Прогнозирование параметров распределения населения по уровню среднедушевого среднемесячного денежного дохода. Подробнейшим образом методы и модели прогноза параметров распределения населения по уровню ССДД рассмотрены в [4; 7]. Используются: либо пара прогнозных макроэкономических показателей – среднее значение X_{ci+1} и модальное значение X_{modi+1} ССДД (или медианное значение; X_{medi+1}), либо пара соответствующих им прогнозных формальных параметров μ_{i+1} и σ^2_{i+1} математического ожидания и дисперсии логарифма денежных доходов населения.

Прогнозное значение X_{ci+1} – среднедушевой среднемесячный денежный доход в генеральной совокупности – определяется по макропоказателям:

$$X_{ci+1} = PI_{i+1} / (12N_{i+1}) = (ВВП_{i+1} dPI_{i+1}) / (12N_{i+1})),$$

где $ВВП_{i+1}$ – валовой внутренний продукт в текущих ценах;

PI_{i+1} – годовой денежный доход населения в текущих ценах (или dPI_{i+1} – доля денежных доходов населения в ВВП);

N_{i+1} – среднегодовая численность населения.

В работах [4; 7] подробнейшим образом изложена методология прогноза модального значения X_{modi+1} и σ^2_{i+1} – дисперсии логарифма денежных доходов. Структура доходной части баланса денежных доходов и расходов населения (БДДРН) представлена в следующем виде (в РФ отсутствует законодательная база для прямого измерения доходов. Доходы населения измеряются с 1997 г. косвенно, экспертно, по показателям и измерениям расходов):

- W_i – доля оплаты труда (включая скрытую);
- TR_i – доля трансфертов населению;
- PR_i – доля прочих доходов;
- $DS_i = W_i + TR_i$ – суммарный агрегированный доход долей оплаты труда и трансфертов.

В работах [4; 7] показано, что динамическое выражение для коэффициента связи аргументов k_{xi+1} (12) приобретает вид:

$$k_{xi+1} = k_{xi} (DS_i / DS_{i+1}).$$

Независимый способ нахождения параметра σ^2_{i+1}, основан на использовании темпа изменения коэффициента связи. Действительно, темп изменения реальной агрегированной структуры доходов БДРН зависит только от параметра σ:

$$\frac{DS_{i+1}}{DS_i} = e^{\frac{3}{2}(\sigma_i^2 - \sigma_{i+1}^2)} \text{ или } e^{(\sigma_{i+1}^2 - \sigma_i^2)} = \sqrt[3]{\left(\frac{DS_i}{DS_{i+1}}\right)^2}.$$

Для расчета дисперсии σ^2_{i+1} – индикатора дифференциации – получим:

$$\sigma_{i+1}^2 = \sigma_i^2 - \frac{2}{3} \ln \frac{DS_{i+1}}{DS_i}, \qquad (26)$$

Проблемы прогноза параметров распределения населения по уровню среднедушевого среднемесячного денежного дохода $f_{i+1}(x)$ решены полностью [4; 7].

Аналитические методы исследования характеристик дифференциации доходов населения. Индекс Джини однозначно определяется величиной дисперсии логарифма дохода в распределении населения по уровню ССДД. Величина индекса Джини, как и величина дисперсии логарифма денежных доходов в распределении населения по уровню ССДД, количественно определяют дифференциацию денежных доходов [9; 13; 14; 4-7].

Обратимся к функции $DF(x) = R_0(x)$, определяемой разностью интегралов $F(x)$ и $D(x)$:

$$DF(x) = R_0(x) = F(x) - D(x) = \int_0^x f(v)dv -$$

$$- \int_0^x \varphi(v)dv = \int_0^x (f(v) - \varphi(v))dv. \qquad (27)$$

Именно эта функция определяет степень расслоения населения по уровню денежных доходов и количественно определяет величину индекса Джини. Поэтому исследуем эту функцию детально. Вид этой функции приведен на рис. 2.

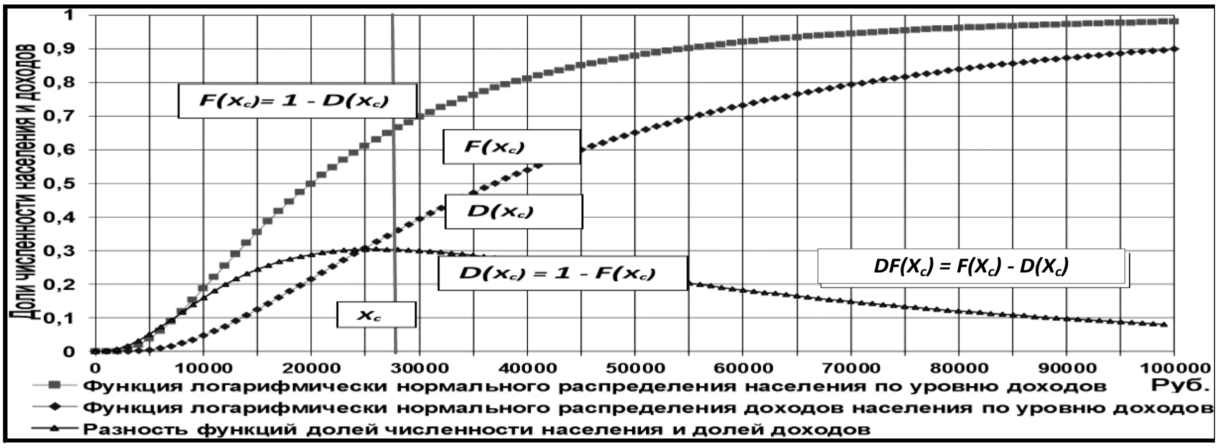

Рис. 2. Функции распределений долей численности населения – *F(x)*, долей денежного дохода – *D(x)* по уровню среднедушевых денежных доходов и разности этих функций – *DF(x)*

DF(x) – одномодальное распределение случайной величины ***X*** (ССДД) с правой асимметрией. Автору неизвестны результаты аналитических исследований этой функции. Поэтому в настоящей статье выполнено такое исследование.

Найдем вид уравнения для функции ***DF(x)***. Логично предположить, что эта функция имеет множитель $K(\mu, \sigma)$, зависящий от параметров распределения, и содержит не исчезающий при интегрировании множитель-экспоненту:

$$e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

В общем виде эта функция может быть представлена следующим образом:

$$DF(x) = R(x) = K(\mu,\sigma)\, x^{\lambda}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (28)$$

Вид этой функции и условия экстремума $R'(x) = 0$ в точке $x = X_c$ позволяют установить, что $\lambda = ½$. И тогда функция (28) принимает вид:

$$R(x) = K(\mu,\sigma)\, x^{1/2}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (29)$$

Так как функция ***R(x)*** является безразмерной, то коэффициент $K(\mu,\sigma)$, чтобы удовлетворять условиям нормирования должен содержать размерный нормирующий множитель $1/X_c^{1/2} = \exp(-(0,5\mu + 0,25\sigma^2))$, что позволяет записать $K(\mu, \sigma)$ в виде произведения безразмерного множителя $r(\sigma)$ на размерный $1 / X_c^{1/2}$:

$$K(\mu,\sigma) = r(\sigma) / X_c^{1/2}.$$

В общем виде функция разности интегралов ***R(x)*** примет вид:

$$R(x) = r(\sigma)(x / X_c)^{1/2} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (30)$$

Уравнению (30) может соответствовать несколько аналитических вариантов описания в зависимости от условий определения безразмерного множителя $r(\sigma)$.

Первое определение. Вычисление значения $r_1(\sigma)$ из условия известного равенства функции $R(x = X_c)$ в точке среднего дохода значению $F_c – D_c$:

$$R(X_c) = F_c - D_c = 2F_c - 1 = 2\Phi(0,5\sigma) - 1. \qquad (31)$$

При $X_c = \exp(\mu + 0,5\sigma^2)$ с учетом значения экспоненты в точке X_c:

$$e^{-\frac{(\ln x_c-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \exp(-0,125\sigma^2), \qquad (32)$$

получаем вид коэффициента $r(\sigma)$, который определится из формул (30-32) следующим образом:

$$r_1(\sigma) = (2\Phi(0,5\sigma) - 1) \exp(0,125\sigma^2). \qquad (33)$$

Из (33) видно, что безразмерный коэффициент разности функций численности и доходов населения – $r_1(\sigma)$, зависит только от σ. И тогда уравнение (30) для $R_1(x)$ с учетом (33) примет вид:

$$R_1(x) = (2\Phi(0,5\sigma) -1) \exp(0,125\sigma^2)\,(x/X_c)^{1/2}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (34)$$

Уравнение $R_1(x)$ (34) является точным аналитическим описанием эталонного уравнения $R_0(x)$ (27), но в уравнении $R_1(x)$ для нахождения разности интегралов уже не требуется применять численные методы для вычисления значений функций численности и доходов населения.

Второе определение. Очевидно, что разность интегралов, определяемая выражением (27), содержит не исчезающие множители $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и $e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Поэтому аналитическое выражение разности $R_2(x)$ можно представить в виде:

$$R_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^{\alpha} \exp(\beta\sigma^2)\, (x / X_c)^{1/2}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (35)$$

Параметры α и β находятся из условия $R_1(x) = R_2(x)$. Оказалось, что $\alpha = 1$, и $\beta = 1/12$. И тогда уравнение разности $R_2(x)$ принимает вид:

$$R_2(x) = r_2(\sigma)\,(x/X_c)^{1/2}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad (36)$$

$$\text{где } r_2(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma \exp(\sigma^2/12); \quad (37)$$

Сравнивая (34) и (36) отмечаем, что эти формулы определяют поведение одной и той же функции $R_0(x)$ (27), и, следовательно, вычисленные значения в каждой точке равны между собой. То есть $R_0(x) = R_1(x) = R_2(x)$. Отсюда получаем:

$$(2\Phi(0{,}5\sigma) - 1)\exp(0{,}125\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma^*\exp(\sigma^2/12).(38)$$

Уравнение (38) многоаспектно. Из него следует ряд важных утверждений

$$\Phi(0{,}5\sigma) = F_c = 0{,}5 + 0{,}5\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma^*\exp(-\sigma^2/24); \quad (39)$$

$$\Phi(-0{,}5\sigma) = D_c = 0{,}5 - 0{,}5\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma^*\exp(-\sigma^2/24); \quad (40)$$

$$\Phi(0{,}5\sigma) - \Phi(-0{,}5\sigma) = (F_c - D_c) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma^*\exp(-\sigma^2/24). \quad (41)$$

Точность расчетов по формулам (39-41) оказалась достаточно высокой для практических вычислений. Расчеты по этим формулам могут заменять вычисления интегралов вероятностей $\Phi(0{,}5\sigma)$ или $\Phi(-0{,}5\sigma)$.

Третье определение. Поведение коэффициентов $r_1(\sigma) = r_2(\sigma)$ можно представить линейным трендом. Уравнение линейного тренда – коэффициента $r_3(\sigma)$ имеет вид:

$$r_3(\sigma) = 0{,}45\sigma - 0{,}02364$$
$$R^2 = 0{,}9999. \quad (42)$$

Линейная аппроксимация коэффициента плотности разности интегралов численности и доходов $r_3(\sigma)$ дает высокую точность расчетов в реальном диапазоне значений дисперсии $0{,}6 < \sigma < 0{,}8$. Практически расчет разности интегралов в этом диапазоне значений дисперсии можно вести по формуле:

$$R_3(x) = (0{,}45\sigma - 0{,}02364)\,(x / X_c)^{1/2}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.(43)$$

Графики эталонной функции $R_0(x)$ и расчетных функций $R_1(x)$, $R_2(x)$ и $R_3(x)$ – плотностей распределения разности интегралов представлены на рис. 3.

Для удобства дальнейших вычислений представим три вида функций $R_i(x)$ в общем виде:

$$R_i(x) = K_i(\mu,\sigma)\, x^{1/2}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad i = 1, 2, 3. \quad (44)$$

где $K_i(\mu,\sigma) = r_i(\sigma) / X_c^{1/2}$.

Найдем интегралы $S_i(\mu,\sigma)$ функций $R_i(x)$ в общем виде:

$$S_i(\mu,\sigma) = K_i(\mu,\sigma)\int_0^\infty x^{1/2}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$
$$= K_i(\mu,\sigma) * G(\mu,\sigma) \qquad i = 1, 2, 3. \quad (45)$$

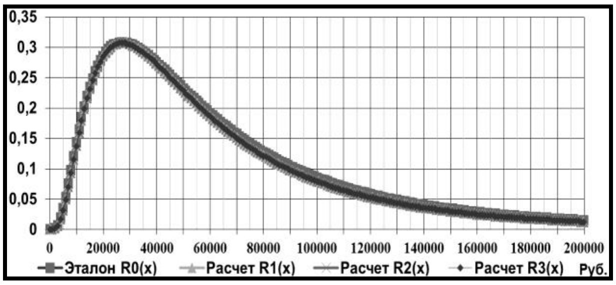

Рис. 3. Эталонная функция $R_0(x)$ и расчетные функции $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ – плотностей распределения разности интегралов

Здесь $G(\mu,\sigma)$ – интеграл, общий для всех функций $S_i(\mu,\sigma)$.

$$G(\mu,\sigma) = \int_0^\infty x^{1/2}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$
$$= \sqrt{2\pi}\,\sigma * X_c^{3/2}\exp(0{,}375\sigma^2). \quad (46)$$

Формула (46) позволяет получить выражения интегралов $S_i(\mu,\sigma)$ в конечном виде

$$S_1(\mu,\sigma) = \sqrt{2\pi}\,\sigma\,(F_c - D_c)\,X_c\exp(0{,}5\sigma^2); \quad (47)$$

$$S_2(\mu,\sigma) = \sigma^2 X_c\exp(11\sigma^2 / 24); \quad (48)$$

$$S_3(\mu,\sigma) = \sqrt{2\pi}\,\sigma\,(0{,}45\sigma - 0{,}02364)$$
$$X_c\exp(0{,}375\sigma^2). \quad (49)$$

Установлено, что значения интегралов $S_i(\mu,\sigma)$, нормированных к среднему значению дохода X_c и равных соответственно $N_i(\sigma)$, зависят только от σ.

$$N_1(\sigma) = \sqrt{2\pi}\,\sigma\,(F_c - D_c)\exp(0{,}5\sigma^2); \quad (50)$$

$$N_2(\sigma) = \sigma^2\exp(11\sigma^2/24); \quad (51)$$

$$N_3(\sigma) = \sqrt{2\pi}\,\sigma\,(0{,}45\sigma - 0{,}02364)\exp(0{,}375\sigma^2). \quad (52)$$

Все интегралы $N_i(\sigma)$ равны между собой, так как определяют интеграл одной и той же функции $DF(x) = F(x) - D(x)$. Отсюда следует, например, приравняв (50) и (52), что долю численности населения с доходами ниже среднего уровня – F_c, можно определять в реальном диапазоне значений дисперсии $0{,}6 < \sigma < 0{,}8$, не прибегая к вычислению интегралов Лапласа:

$$F_c = 0{,}5 + (0{,}225\sigma - 0{,}01182)\exp(-0{,}125\sigma^2). \quad (53)$$

Поведение нормированных интегралов разноси $N_i(\sigma)$ с высокой точностью описывается уравнением тренда:

$$N_2(\sigma) = 3{,}26\sigma^2 - 2{,}317\sigma + 0{,}6313 \qquad R^2 = 0{,}9996$$

Используя известную связь индекса Джини с ковариацией x и $F(x)$ можем получить формулу связи ID с $D(x)$ и $F(x)$:

$$ID = 1 - 2\cdot\int_0^1 L(u)du = 1 - (2/X_c)$$
$$\int_0^\infty \int_0^{x(u)} D(x)dF(x).$$

Но ни эта формула, ни формулы (5) не позволяют получить аналитическое выражение, пригодное для прямых расчетов, и для вычисления индекса Джини приходится использовать численные методы. Разработанная методология позволяет считать индекс Джини численными методами с высокой точностью по основной рабочей формуле (1). Для вычисления долей населения и соответствующих им долей доходов используются встроенные функции EXCEL: нормальные стандартные функции распределения Лапласа (НОРМ.СТ.РАСПР). Расчеты выполнялись для диапазона денежных доходов $0 < x < 500000$ руб. Результаты расчетов представлены в табл. 1 для показателя ***ID(500)***.

Для индекса Джини удается отыскать аппроксимирующую функцию вида:

$$IDA(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\sigma\exp(-\sigma^2/12). \qquad (54)$$

Зная $r_2(\sigma)$, можем записать аналитическое выражение для индекса Джини:

$$IDAr_2(\sigma) = \sqrt{2}\;r_2(\sigma)\exp(-\sigma^2/6)$$

Используя равенство (50, 51) и функцию (54), получаем аналитическое выражение, устанавливающее связь индекса Джини с долей населения, имеющей доходы ниже среднего уровня F_c:

$$IDF(\sigma) = \sqrt{2}\;(2F_c - 1)\exp(-\sigma^2/24). \qquad (55)$$

С другой стороны, достаточно точные расчетные значения индекса Джини ***ID(500)***, позволяют получить для индекса Джини линейный тренд вида ***IDT(σ)***:

$$IDT(\sigma) = 0{,}486\sigma + 0{,}0364 \qquad R^2 = 0{,}9999. \qquad (56)$$

Имея аналитические выражения коэффициентов плотности разности интегралов $r(\sigma)$ и нормированных значений разности интегралов $N(\sigma)$, находим множители связи этих показателей с индексом Джини $IDA(\sigma)$. Можно выбирать любые виды формул из $r_i(\sigma)$ и $N_i(\sigma)$, но расчеты выполнены для $r_2(\sigma)$ и $N_2(\sigma)$ только потому, что формулы этих показателей при сравнительно одинаковой точности, наиболее простые. Линейный тренд множителя связи индекса Джини с $r_2(\sigma)$ имеет вид:

$$Mr_2(\sigma)L = IDA(\sigma)/r_2(\sigma) = -0{,}319\sigma + 1{,}512 \qquad R^2 = 0{,}9937. \qquad (57)$$

И, соответственно, линейный тренд множителя связи с $N_2(\sigma)$ имеет вид:

$$MN_2(\sigma)L = IDA(\sigma)/N_2(\sigma) = 1{,}65\sigma^2 - 3{,}764\sigma + 2{,}4584 \qquad R^2 = 0{,}9991. \qquad (58)$$

И тогда индекс Джини $IDM(\sigma)$ может быть найден либо как

$$IDMr_2(\sigma) = r_2(\sigma)*Mr_2(\sigma)L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma\exp(\sigma^2/12)*(-0{,}319\sigma + 1{,}512), \qquad (59)$$

либо как

$$IDMN_2(\sigma) = N_2(\sigma)*MN_2(\sigma)L = \sigma^2\exp(11\sigma^2/24)*(1{,}65\sigma^2 - 3{,}764\sigma + 2{,}4544). \qquad (60)$$

На рис. 4 представлены расчетные аналитические $IDA(\sigma)$ и трендовые значения индекса Джини $IDT(\sigma)$, коэффициент разности интегралов $r_2(\sigma)$, множитель связи этого коэффициента с индексом Джини $Mr_2(\sigma)$, тренд этого множителя связи $Mr_2(\sigma)L$ и расчетное значение индекса Джини $IDMr_2(\sigma)$.

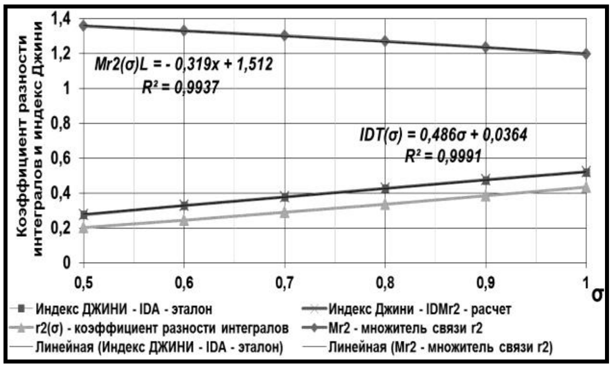

Рис. 4. Индекс Джини – эталон, линейный тренд и расчетное значение – произведение коэффициента разности интегралов и множителя связи

Отметим, что представляют интерес интегралы произведения функций:

$$f(x)*\varphi(x) = q_1(x) \text{ и } f(x)*\zeta(x) = q_2(x)$$

где $\zeta(x) = (1/X_c^2)x^2 f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}X_c^2}\,x\,e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$Q_1(\mu,\sigma) = \int_0^\infty q_1(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2 X_c}\int_0^\infty (1/x)\,e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{\sigma^2}}\,dx$$

Безразмерный интеграл в правой части равенства при замене переменной:

$(\ln x - \mu)/\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2}}v$ и $dx/x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sigma dv$ дает значение $\sqrt{\pi}\,\sigma$. И тогда $Q_1(\mu,\sigma) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma X_c}$.

$$Q_2(\mu,\sigma) =$$

$$= \int_0^\infty q_2(x)\,dx = \frac{1}{2\pi\sigma^2 X_c^2}\int_0^\infty e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{\sigma^2}}\,dx.$$

Интеграл в правой части равенства при замене переменной $(\ln x - \mu)/\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2}}v$. $dx/x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sigma\,dv = \exp(\mu + \dfrac{1}{\sqrt{2}}v\sigma)$ дает значение

$\sqrt{\pi}\,\sigma * \exp(-0{,}25\sigma^2)X_c$.

И тогда

$$Q_2(\mu,\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma X_c}\exp(-0{,}25\sigma^2) = Q_1(\mu,\sigma)\exp(-0{,}25\sigma^2)$$

Умножив $Q_1(\mu,\sigma)$ и $Q_2(\mu,\sigma)$ на X_c, получим безразмерные значения этих интегралов, $Q_1(\sigma)$ и $Q_2(\sigma)$, зависящих только от σ. Сравнивая выражения для $IDA(\sigma)$, $Q_1(\sigma)$ и $Q_2(\sigma)$, можно записать:

$$IDA(\sigma) = Q_1(\sigma)*2\sigma^2 \exp(-\sigma^2/12) = Q_2(\sigma)*2\sigma^2 \exp(\sigma^2/6).$$

Результаты рассмотренных вариантов расчетов сведены в табл. 1.

Таблица 1

ВАРИАНТНЫЕ РАСЧЕТЫ ИНДЕКСА ДЖИНИ

Значения индикаторов дифференциации					
Дисперсия логарифма ССДД					
0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$ID(\sigma)(500)$ – индекс Джини					
0,276104	0,328446	0,379236	0,428322	0,475716	0,521669
$IDA(\sigma)$ – индекс Джини (54)					
0,276278	0,328509	0,379131	0,427910	0,474627	0,519079
$IDF(\sigma)$ – индекс Джини (55)					
0,276291	0,328539	0,379194	0,428031	0,474842	0,519437
$IDT(\sigma)$ – индекс Джини (56)					
0,2794	0,328	0,3766	0,4252	0,4738	0,5224
$r_2(\sigma)$ – точный (37)					
0,20367	0,24666	0,29090	0,33664	0,38412	0,43361
$Mr_2(\sigma)L = IDA(\sigma) / r_2(\sigma)$ (57)					
1,3665	1,3346	1,3027	1,2708	1,2389	1,2070
$IDMr2(\sigma)$ (59)					
0,27832	0,32919	0,37895	0,42780	0,479786	0,52337
$N_2(\sigma)$ – точный (51)					
0,280351	0,424481	0,613382	0,858169	1,174132	1,581436
$MN_2(\sigma)L = IDA(\sigma) / N_2(\sigma)$ (58)					
0,9849	0,7900	0,6281	0,4992	0,4033	0,3404
$IDMN2(\sigma)$ (60)					
0,276118	0,335419	0,385265	0,428398	0,473527	0,538320

Анализ показателей табл. 1 убеждает, что для практических целей пригодными оказываются все предложенные способы вычисления индекса Джини, но для простоты и оперативности расчетов рекомендуются расчеты по формуле (54).

Разработанная методология расчета индекса Джини открывает новые возможности получения показателей дифференциации денежных доходов населения, значительно упрощая расчеты и повышая надежность расчетов за счет выполнения взаимопроверок.

Полярные характеристики доходов населения. Определения и примеры применения. И кривая Лоренца, и индекс Джини, и величина дисперсии логарифма денежных доходов, характеризуя расслоение населения по уровню ССДД, остаются математически отвлеченными, научно-абстрактными обобщенными понятиями, которые затрудняют общение и обсуждение проблем дифференциации населения по уровню денежных доходов в СМИ и в общественных организациях. И в конечном итоге затрудняют принятие решений в органах исполнительной власти.

В действительности кривая Лоренца обладает значительно большей информативностью, чем та, что использовалась до настоящего времени. Потенциал свойств кривой Лоренца позволяет дополнительно получать характеристики дифференциации денежных доходов населения не менее информационно-емкие, чем индекс Джини, и более точные. Существует серия простых, но очень информативных характеристик расслоения населения по уровню доходов, не применявшихся ранее. Назовем эти характеристики полярными и исследуем их применительно к логарифмически нормальному закону распределения населения по уровню ССДД. Первые определения полярных характеристик были приведены в [3; 6]. Однако только в статье [2] в 2015 г. автору впервые удалось доказать более простую трактовку одного из индексов поляризации населения по уровню ССДД. В этой же статье описывалась методология расчета индекса поляризации среднего дохода на основе отчетной информации, публикуемой Росстатом. Поэтому в настоящей статье воспроизводятся основные результаты работ [2; 6], для того чтобы показать методологию выполнения расчетов других показателей поляризации денежных доходов населения и привести примеры результатов анализа и прогнозных расчетов.

Социальная устойчивость общества среди множества критериев и индексов, определяется численностью и доходами среднего класса. Из двух официально используемых характеристик дифференциации доходов никак не следуют характеристики среднего класса, кроме очевидного утверждения: «…чем меньше индекс Джини, тем выше численность «среднего класса»».

В процессе обсуждений проблем социальной устойчивости общества настоятельно выявлялась необходимость иметь такие характеристики доходов, которые позволяли бы оценивать расслоение населения по уровню денежных доходов относительно неких индикативных показателей доходов населения. Если индикативный доход X_i считать границей раздела доходов населения, то логично рассматривать характеристики (долю численности, долю дохода и средний доход) тех, кто имеет доходы ниже индикативного дохода X_i и характеристики тех, кто имеет доходы выше, и сравнивать их между собой. Поскольку эти характеристики полярно отличаются по знаку оцениваемых параметров, то назовем эти характеристики расслоения населения по уровню денежных доходов полярными. При разработке полярных характеристик требования к ним были весьма простые: не противоречить общепринятым, не заменять, а дополнять их, отличаться простотой и ясностью экономической трактовки, и прозрачностью вычислений.

Само понятие поляризации денежных доходов населения не является новым и широко использовалось на интуитивном уровне уже в работах Римашевской Н.М. [11]. Хотя математического определения понятия поляризации денежных доходов там не предлагалось и количественные оценки поляризации не использовались, но экспертный анализ и выводы были весьма убедительными. В качестве индикативных границ деления населения и, соответственно, доходов, выберем очевидные показатели, имеющие явный экономический смысл.

1. Модальный доход (7) $X_{mod} = \exp(\mu - \sigma^2)$.
2. Медианный доход (18) $X_{med} = \exp(\mu)$.
3. Средний доход (8) $X_c = \exp(\mu + 0{,}5\sigma^2)$.
4. Среднее значение плотности дохода (20) $X_{\varphi c} = \exp(\mu + 1{,}5\sigma^2)$.

Экономически фиксация границы расслоения на уровне выбранного индикативного дохода выявляет поляризацию населения и определяет, какая часть населения имеет доходы ниже выбранного уровня, какой частью доходов владеет и какой средний доход образуется в этой группе. Точно так же определяются характеристики группы населения, имеющего доходы выше выбранного уровня. Сравнение средних доходов этих полярных групп населения не менее емко характеризуют дифференциацию доходов, чем индекс Джини. Поэтому предлагается наряду с уже используемыми показателями дифференциации рассматривать новые показатели: индексы поляризации денежных доходов населения. Получим четыре индекса поляризации, соответствующие выбранным индикативным границам дохода.

1. Индекс поляризации модального дохода – ***IMD***.
2. Индекс поляризации медианного дохода – ***IME***.
3. Индекс поляризации среднего дохода – ***ISD***.
4. Индекс поляризации среднего значения плотности дохода – ***ISS***.

Так как методология определения индексов поляризации одинакова для всех перечисленных индексов, рассмотрим ее на примере определения индекса поляризации среднего дохода (***ISD***), а для остальных индексов поляризации приведем результаты исследования.

Индекс поляризации среднего дохода (***ISD***). Если средний доход X_c считать границей раздела доходов населения, то логично рассматривать характеристики тех, кто имеет доходы ниже среднего дохода и характеристики тех, кто имеет доходы выше среднего, и сравнивать их между собой. Индекс поляризации среднего дохода денежных доходов населения предлагается определять, как отношение среднего дохода в высокодоходной группе населения (ВДГ) к среднему доходу в низкодоходной группе (НДГ). Прежде чем рассматривать индекс поляризации доходов, рассмотрим несколько дополнительных характеристик поляризации доходов населения, которые играют вспомогательную роль, но оказываются простыми и полезными при вычислении ***ISD***. К дополнительным характеристикам поляризации отнесем такие.

1. Координаты поляризации среднего дохода: X_c, F_c, D_c, $DF(X_c)$.
2. Поляризатор населения ***KNL***.
3. Поляризатор доходов ***KDL***.

Рассмотрим каждую из этих характеристик.

Координаты поляризации среднего дохода: X_c, F_c, D_c, $DF(X_c)$.

X_c – граница раздела – средний ССДД (8); F_c, – доля населения с доходами ниже среднего уровня; D_c, – доля доходов населения с доходами ниже среднего уровня; $DF(X_c)$ – объем долей делегируемых доходов от низкодоходных групп к высокодоходным.

Весьма просто можно получить оценку численности населения с доходами ниже (или выше) среднего уровня. Строим функцию:

$$DF(u) = F(u) – D(u);\ F(u) \in [0, 1];$$
$$D(u) \in [0, 1]\ DF(u) \in [0, 1].$$

Затем находим ее экстремум, т.е. ту величину $U_э$, при которой

$$dDF(U_э)/du = 0.$$

Величина $U_э$ определяет экстремум функции ***DF*** и показывает, какая доля населения имеет доходы ниже среднего уровня. Отметим тот факт, что максимальное удаление кривой Лоренца от прямой «абсолютного равенства» для логарифмически нормального закона распределения достигается в точке среднего дохода X_c. В этой точке касательная к кривой Лоренца параллельна прямой абсолютного равенства и, следовательно, в этой точке производная $(F(u) – D(u))'_u = 0$.

Докажем это утверждение. С этой целью построим разность $DF(x)$ функций $F(x)$ и $D(x)$ и покажем, что экстремум функции ***DF*** достигается в точке среднего дохода X_c:

$$(F(u) – D(u))= DF(x) = F(x) - D(x) =$$
$$= \int_0^x f(v)dv - \int_0^x \varphi(v)dv = \int_0^x (f(v) - \varphi(v))dv. \qquad (61)$$

Для того чтобы найти максимум этой разности, вычислим производную функции $DF(x)$ и, приравняв ее нулю $(DF(x))_x' = 0$, найдем координату x, в которой достигается это равенство. Производная выражения (57) по x дает условие $f(x) – \varphi(x) = 0$, которое удовлетворяется в единственной точке $x = X_c$.

В этой точке $\varphi(X_c) = \dfrac{1}{X_c} X_c{\cdot}f(X_c) = f(X_c)$ и значения функций $\varphi(X_c)$ и $f(X_c)$ совпадают. Этот вывод доказывает фундаментальное утверждение.

Для логарифмически нормального распределения наибольшая разность функций $F(x)$ и $D(x)$ (функций долей численности и долей доходов населения) достигается в точке среднего дохода (при $x = X_c$):

$$\max /(F(u) – D(u)) /_u = \max /F(x) - D(x) /_{x=Xc}=$$
$$= DF(X_c) = F_c – D_c. \qquad (62)$$

Точное значение $F_c(X_c)$ определяется соответствующим значением стандартной нормированной функции Лапласа Φ_c. Для этого используется теоретически известная связь параметров логарифмически нормального распределения с параметрами нормированной функции Лапласа Φ_c. Если к функции логарифмически нормального распределения $F_c(X_c)$:

$$U_э = U_c = F_c(X_c) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{X_c} \frac{1}{u} e^{-\frac{(\ln u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

применить замену переменной $v = \dfrac{\ln u - \mu}{\sigma}$ при $dv = \dfrac{1}{\sigma * u} du$ и учесть, что в точке среднего дохода $X_c= \exp(\mu + 0{,}5\sigma^2)\ \ln u_c = \mu + 0{,}5\sigma^2$:

$$v_c = ((\mu + 0{,}5\sigma^2 – \mu)/\sigma = 0{,}5\sigma,$$

то получим, что

$$F_c(X_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{v_c} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \Phi_c(v_c) = \Phi(0{,}5\sigma). \qquad (63)$$

Так как $F_c(X_c)$ – оценка доли населения с доходами ниже среднего дохода X_c, то $1 – F_c(X_c)$ – оценка доли населения с доходами выше среднего дохода X_c. Характеристика $F_c(X_c)$ сама по себе очень информативна. Величина $F_c(X_c)$ для логарифмически нормального распределения при $\sigma > 0$ всегда больше 0,5.

Чтобы получить оценку доходов населения с доходами ниже X_c для координаты $D(X_c) = D_c$, находим соответствующее значение дохода. В частном случае, для двухпараметрического логарифмически нормального закона распределения известно, что доля объема денежных доходов населения с доходами до X_c составит:

$$D_c = D(X_c) = \int_0^{X_c} \varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{X_c\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{X_c} e^{-\frac{(\ln\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\tau. \qquad (64)$$

Интеграл (46) тоже вычисляется с помощью нормированной функции Лапласа. При замене переменной $t = \frac{\ln\tau-\mu}{\sigma} - \sigma$ и, учитывая, что $dt = \frac{1}{\sigma\cdot\tau}d\tau$, и $\ln\tau_c = \mu + 0{,}5\sigma^2$, получим $t_c = -0{,}5\sigma$.

Интеграл D_c переводится в нормированную функцию Лапласа $\Phi(-0{,}5\sigma)$

$$\Phi(-0{,}5\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-0{,}5\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (65)$$

И тогда

$$D_c = D(X_c) = \Phi_c(t_c) = \Phi(-0{,}5\sigma). \qquad (66)$$

Из свойств функции Лапласа $\Phi(z)$ известно, что $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, т.е. $\Phi(-0{,}5\sigma) = 1 - \Phi(0{,}5\sigma)$. Но ранее в (63) было доказано, что $\Phi(0{,}5\sigma) = F_c(X_c)$.

Отсюда следует, что

$$D_c(X_c) = 1 - F_c(X_c). \qquad (67)$$

Доказано важнейшее свойство логарифмически нормального распределения.

Доля доходов населения с доходами ниже среднего уровня в точности равна доле численности населения с доходами выше среднего уровня.

Утверждение (67) носит фундаментальный характер, и отсюда с неизбежностью следует симметричное фундаментальное утверждение.

Доля доходов населения с доходами выше среднего уровня в точности равна доле численности населения с доходами ниже среднего уровня. То есть:

$$1 - D_c(X_c) = F_c(X_c). \qquad (68)$$

Выше (62) было доказано, что максимум доли накопленного дефицита доходов групп населения с доходами ниже среднего уровня DF_c достигается в точке среднего дохода X_c:

$$DF_c = F_c - D_c,$$

где DF_c – дефицит доли дохода групп населения с доходами ниже среднего уровня, или, иначе, - DF_c – перераспределенная доля дохода.

Подставим в выражение для DF_c соответствующие значения и получим:

$$DF_c = (1 - D_c) - D_c = 1 - 2D_c =$$
$$= F_c - (1 - F_c) = 2F_c - 1. \qquad (69)$$

Именно величина DF_c – перераспределенная доля дохода, равная $2F_c - 1$, (или $1 - 2D_c$) – дает еще одну оценку расслоения населения и показывает дефицит доходов в низкодоходных группах, т.е. какая доля денежных доходов оказывается делегированной от низкодоходных групп к высокодоходным группам.

Поляризатор населения ***KNL***. Определяется отношением численности населения с доходами ниже среднего уровня N_H к численности населения с доходами выше среднего уровня N_B:

$$KNL = N_H / N_B.$$

Так как отношение численности низкодоходных и высокодоходных групп при нормировке к общей численности населения соответствует отношению долей этих групп, то *поляризатор населения* определяется соотношением:

$$KNL = \frac{F_c}{1-F_c} = \frac{1-D_c}{D_c}. \qquad (70)$$

Поляризатор доходов ***KDL***. Этот показатель определяется отношением доходов населения с доходами выше среднего уровня DN_B к доходам населения с доходами ниже среднего уровня DN_H:

$$KDL = DN_B / DN_H.$$

Совокупные доли доходов населения с доходами ниже среднего уровня определяются величиной D_c по (66). Если известна доля доходов D_c, то тогда доля доходов населения с доходами выше среднего уровня определяется величиной $1 - D_c$. Выше было доказано, что координаты F_c и D_c соответствуют точке максимального удаления кривой Лоренца от линии равномерного дохода и вычисляются по среднеквадратическому отклонению исходного распределения. И тогда формула для *поляризатора доходов* приобретает вид:

$$KDL = \frac{1-D_c}{D_c} = \frac{F_c}{1-F_c}. \qquad (71)$$

Из формул (70) и (71) в принятой системе обозначений следует, что значения поляризатора населения **KNL** и поляризатора доходов **KDL** равны.

Индекс поляризации среднего дохода ***ISD***. Предлагается экономически понятная трактовка индекса поляризации среднего дохода – **ISD**. Этот показатель определяется отношением средних доходов населения в группе с доходами выше среднего уровня, к средним доходам населения в группе с доходами ниже среднего уровня:

$$ISD = \left(\frac{DN_B}{N_B}\right)/\left(\frac{DN_H}{N_H}\right) = KNL \cdot KDL.$$

Вычисляем среднее значение дохода в группе населения с доходами ниже среднего D_c / F_c и среднее значение дохода в группе населения с доходами выше среднего $(1 - D_c)/(1 - F_c)$. Тогда с учетом (70) и (71), индекс поляризации среднего дохода определяется так:

$$ISD = \frac{(1-D_c)}{D_c}\,\frac{F_c}{(1-F_c)} = \frac{F_c^2}{(1-F_c)^2} =$$

$$= \frac{(1-D_c)^2}{D_c^2} = \frac{\Phi^2(0{,}5\sigma)}{\Phi^2(-0{,}5\sigma)}. \qquad (72)$$

Такое определение дает очень простую и наглядную процедуру построения индекса поляризации среднего дохода (рис. 5). Через точку с координатами среднего дохода (F_c, D_c) проводятся горизонталь и вертикаль до пересечения с осями координат. В левом верхнем углу и правом нижнем образуются два квадрата. Площадь левого верхнего квадрата $H = (1 - D_c) * F_c$, трактуется как условный средний доход населения с доходами выше среднего (богатых), а площадь квадрата в правом нижнем углу $L = (1 - F_c) * D_c$ трактуется как условный средний доход населения с доходами ниже среднего (бедных). Отношение площадей этих квадратов и есть индекс поляризации среднего дохода ***ISD***:

$$ISD = H / L = F_c \cdot (1 - D_c)/ /(1 - F_c) \cdot D_c = \Phi^2(0{,}5\sigma)/\Phi^2(-0{,}5\sigma).$$

В экономическом смысле индекс поляризации доходов среднего дохода населения трактуется как отношение среднего дохода высокодоходных групп населения к среднему доходу низкодоходных групп населения (в точности соответствует отношению площадей квадратов ***H*** и ***L*** (рис. 5)).

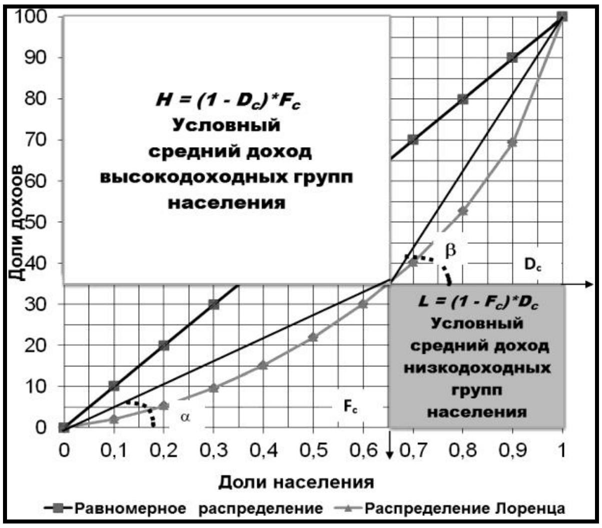

Рис. 5.Трактовка и определение параметров поляризации

В случае абсолютного равенства $H = L$ и индекс поляризации $ISD = 1$. В случае абсолютного неравенства $H \to 1$ и $L \to 0$ и индекс поляризации $ISD \to \infty$. Теоретический диапазон изменения индекса поляризации среднего дохода денежных доходов населения $1 < ISD < \infty$, а фактический рабочий диапазон изменения значительно меньше и ограничен значениями $3 < ISD < 4$.

Формула (72) допускает еще несколько трактовок. Из рис. 5 следует, что $\frac{D_c}{F_c} = tg\alpha$ – средний доход в низкодоходной группе, а $\frac{1-D_c}{1-F_c} = tg\beta$ – средний доход в высокодоходной группе. Тогда индекс поляризации среднего дохода денежных доходов населения определяется отношением тангенсов этих углов:

$$ISD = tg\beta / tg\alpha \text{ или } ISD = tg^2\beta \text{ или } ISD = ctg^2\alpha$$

Величина индекса поляризации среднего дохода ***ISD*** аналог коэффициента фондов, так как определяется отношением средних доходов высокодоходных групп населения (с доходами выше среднего уровня) и низкодоходных (с доходами ниже среднего уровня). В отличие от коэффициента фондов здесь граница раздела групп населения не остается постоянной величиной, зависит от величины среднеквадратического отклонения логарифма доходов и сама является дополнительной информативной характеристикой поляризации распределения населения по уровню доходов. Оценка точности вычисления индекса поляризации денежных доходов населения ***ISD*** зависит только от точности определения величины среднеквадратического отклонения логарифма дохода.

График поведения индекса поляризации денежных доходов населения ***ISD*** как функции среднеквадратического отклонения логарифма дохода σ, приведен на рис. 6. Полиномиальный тренд в реально допустимом диапазоне среднеквадратического отклонения логарифма дохода $0{,}65 < \sigma < 0{,}85$ с высокой точностью аппроксимирует оценку индекса поляризации денежных доходов населения ***ISD***:

$$IKL_p = 5\sigma^2 - 2{,}06\sigma + 2{,}0581 \qquad R^2 = 1{,}0. \qquad (73)$$

Индекс поляризации среднего дохода ***ISD*** является экономически аргументированной, более емкой и более точной характеристикой расслоения, чем коэффициент фондов, и, наряду с индексом Джини, рекомендуется для оценки поляризации и дифференциации распределения населения по уровню денежных доходов.

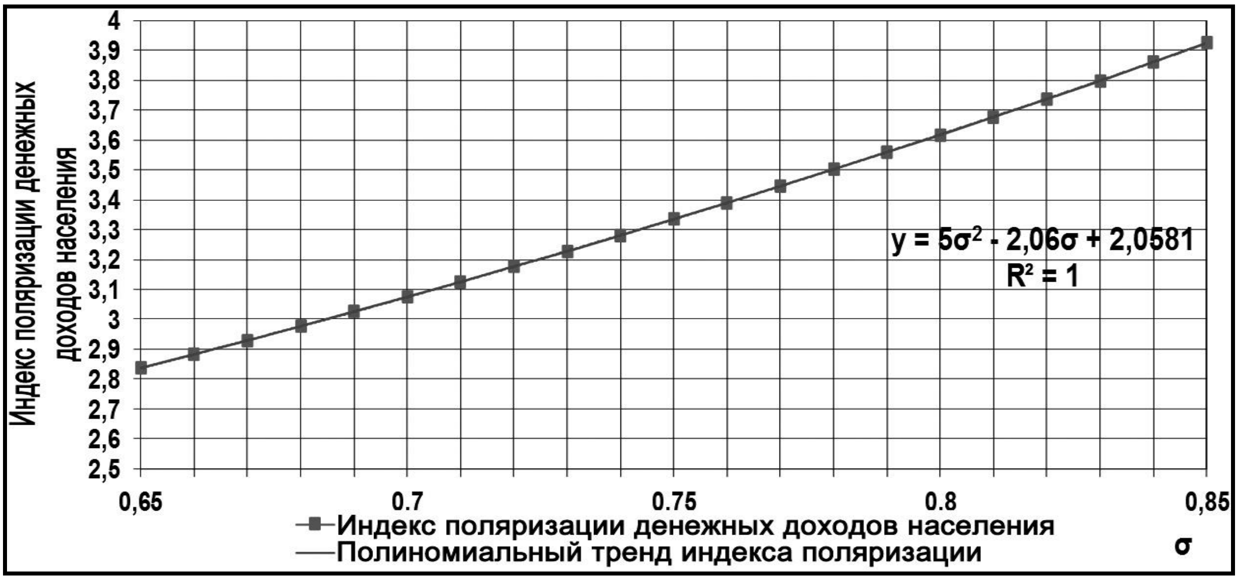

Рис. 6 График индекса поляризации среднего дохода денежных доходов населения – *ISD* и линейного тренда индекса поляризации среднего дохода

Теперь, когда известны зависимости и индекса Джини и индекса поляризации среднего дохода от дисперсии логарифма ССДД, используя эту зависимость найдем связь между индексом Джини и индексом поляризации среднего дохода. Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Таблица 2

СВЯЗЬ МЕЖДУ ИНДЕКСОМ ДЖИНИ И ИНДЕКСОМ ПОЛЯРИЗАЦИИ СРЕДНЕГО ДОХОДА

Значения индикаторов				
Дисперсия логарифма ССДД				
0,65	0,7	0,75	0,8	0,85
***IDA*(*σ*) – индекс Джини (54)**				
0,354036	0,379131	0,403765	0,427910	0,451539
Индекс поляризации *IKL*(*σ*) (72)				
2,835557	3,074889	3,335058	3,617978	3,925754
Отношение *IKL / IDA* факт				
8,009232	8,110360	8,259897	8,454993	8,694153
***IKL/IDA*(*σ*) тренд**				
8,0088	8,1114	8,26	8,4546	8,6952

Коэффициентом связи между индексом Джини и индексом поляризации среднего дохода является полиномиальный тренд высокой точности.

$$IKL/IDA(\sigma) = 9{,}2\sigma^2 + 10{,}368\sigma + 10{,}861$$
$$R^2 = 1.$$

Из табл. 2 видно, что разница между коэффициентом связи и трендом обнаруживается лишь в четвертом-пятом знаке.

Индекс поляризации модального дохода – ***IMD***. Если границей раздела доходов населения считать модальный доход X_M, то следует рассматривать характеристики тех, кто имеет доходы ниже модального дохода и характеристики тех, кто имеет доходы выше модального, и сравнивать их между собой. Индекс поляризации модального дохода денежных доходов населения предлагается определять, как отношение среднего дохода в высокодоходной группе населения (ВДГ) к среднему доходу в низкодоходной группе (НДГ).

Выполнив соответствующие преобразования получим, что доля численности тех, кто имеет доходы ниже модального равна $\Phi(-\sigma) = 1 - \Phi(\sigma)$.

Объем долей дохода низкодоходной группы составит $D_{Lmod}(X_{mod})$:

$$D_{Lmod}(X_{mod}) = \Phi(-2\sigma) = 1 - \Phi(2\sigma).$$

Средний доход в низкодоходной группе SD_{Lmod} равен:

$$SD_{Lmod} = \Phi(-2\sigma) / \Phi(-\sigma) =$$
$$= (1 - \Phi(2\sigma)) / (1 - \Phi(\sigma)).$$

Доля численности тех, кто имеет доходы выше модального, равна $F_{Hmod}(X_{mod})$:

$$F_{Hmod}(X_{mod}) = 1 - \Phi(-\sigma) = \Phi(\sigma).$$

Объем долей дохода этой высокодоходной группы $D_{Hmod}(X_{mod})$ составит:

$$D_{Hmod}(X_{mod}) = 1 - \Phi(-2\sigma) = \Phi(2\sigma).$$

Средний доход в высокодоходной группе SD_{Hmod} равен:

$$SD_{Hmod} = \Phi(2\sigma) / \Phi(\sigma) = (1 - \Phi(-2\sigma)) / (1 - \Phi(-\sigma)).$$

Индекс поляризации модального дохода ***IMD*** принимает вид:

$$IMD = (\Phi(2\sigma) / \Phi(\sigma)) / (\Phi(-2\sigma) / \Phi(-\sigma)) =$$
$$= (\Phi(2\sigma) / (\Phi(-2\sigma)) * (\Phi(-\sigma) / \Phi(\sigma)).$$

Индекс поляризации медианного дохода ***IME***. Аналогичным образом определяются исходные данные для расчета индекса поляризации медианного дохода ***IME***.

Выполнив соответствующие преобразования получим, что доля численности тех, кто имеет доходы ниже медианного равна $\Phi(0) = 0{,}5$:

$$F_{Lmed}(X_{med}) = \Phi_{Lmed}(v_{med}) = 0{,}5.$$

Объем долей дохода низкодоходной группы $D_{Lmed}(X_{med})$ составит:

$$D_{Lmed}(X_{med}) = \Phi(-\sigma) = 1 - \Phi(\sigma).$$

Средний доход в низкодоходной группе SD_{Lmed} равен:

$SD_{Lmed} = \Phi(-\sigma) / 0,5 = (1 - \Phi(\sigma)) / 0,5.$

Доля численности тех, кто имеет доходы выше медианного $F_{Hmed}(X_{med})$ равна:

$F_{Hmed}(X_{med}) = 0,5.$

Объем долей дохода этой высокодоходной группы составит $D_{Hmed}(X_{med})$:

$D_{Hmed}(X_{med}) = 1 - \Phi(-\sigma) = \Phi(\sigma).$

Средний доход в высокодоходной группе SD_{Hmed} равен:

$SD_{Hmed} = \Phi(\sigma) / 0,5 = (1 - \Phi(-\sigma)) / 0,5.$

Индекс поляризации медианного дохода ***IME*** принимает вид:

$IME = \Phi(\sigma) / \Phi(-\sigma).$

Индекс поляризации среднего значения плотности дохода ***ISS***. Аналогичным образом определяются исходные данные для расчета индекса поляризации *среднего значения плотности дохода* ***ISS***. Границей раздела населения является доход, определяемый формулой (20) $X_{\varphi c} = exp(\mu + 1,5\sigma^2)$.

Выполнив соответствующие преобразования получим, что доля численности тех, кто имеет доходы ниже *среднего значения плотности дохода*, равна $\Phi(1,5\sigma)$:

$F_{\varphi c}(X_{\varphi c}) = \Phi_{\varphi c}(v_{\varphi c}) = \Phi(1,5\sigma).$

Объем долей дохода низкодоходной группы $D_{\varphi c}(X_{\varphi c})$ оставит:

$D_{\varphi c}(X_{\varphi c}) = \Phi(0,5\sigma).$

Средний доход в низкодоходной группе $SD_{\varphi c}$ равен:

$SD_{\varphi c} = \Phi(0,5\sigma) / \Phi(1,5\sigma).$

Доля численности тех, кто имеет доходы выше *среднего значения плотности дохода* $F_{\varphi c}(X_{\varphi c})$, равна:

$F_{\varphi c}(X_{\varphi c}) = 1 - \Phi(1,5\sigma) = \Phi(-1,5\sigma).$

Объем долей дохода этой высокодоходной группы $D_{\varphi c}(X_{\varphi c})$ составит:

$D_{\varphi c}(X_{\varphi c}) = 1 - \Phi(0,5\sigma) = \Phi(-0,5\sigma).$

Средний доход в высокодоходной группе $SD_{\varphi c}$ равен:

$SD_{\varphi c} = \Phi(-0,5\sigma) / \Phi(-1,5\sigma).$

Индекс поляризации *среднего значения плотности дохода* ***ISS*** принимает вид:

$$IMD = (\Phi(-0,5\sigma) / \Phi(-1,5\sigma)) / / (\Phi(0,5\sigma) / \Phi(1,5\sigma)) = =(\Phi(-0,5\sigma) / (\Phi(0,5\sigma)) * * (\Phi(1,5\sigma) / \Phi(-1,5\sigma)).$$

Полученные здесь методы расчета индексов поляризации могут и должны применяться в зависимости от поставленных целей анализа. Для оценок поляризации на федеральном или региональном уровнях рекомендуется использование индексов медианного или среднего дохода.

Примеры расчетов для ***ISD***. Основываясь на данных прогноза Минэкономразвития РФ (2016 г.), составим расчетную таблицу: численность населения, ВВП, долю денежных доходов населения в ВВП, структуру денежных доходов (сумму оплаты труда и трансфертов). Используя приведенные в настоящей статье расчетные формулы методологии прогноза и разработанные инструментальные средства, найдем параметры распределения: $\sigma 2016 = 0,7714$, $\mu 2016 = 10,072$.

Найденные значения среднеквадратического отклонения логарифма дохода попадают в диапазон, определяемый уравнением (73), и позволяют рассчитать прогнозные значения индекса поляризации населения по уровню ССДД ***IKL2016 = 3,453*** и получить оценки дефицита доходов НДГ: ***DF2016 = 0,3003.*** Результаты анализа и прогноза показателей поляризации представлены в табл. 3

Таблица 3

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗА ПОЛЯРИЗАЦИИ НАСЕЛЕНИЯ ПО УРОВНЮ ССДД

№ п/п	Показатели	Годы 2012	2013	2014	2015	2016
1	Численность населения ***N***, млн. чел.	143,213	143,7	143,7	146,5	146,6
2	ВВП ***VVP***, трлн. руб.	62,356	66,689	77,893	80,4126	87,673
3	Доля ДДН в ВВП ***dPI***, %	62,86	65,80	61,52	66,15	64,00
4	ДДН ***PI***, трлн. руб.	39,201	43,884	47,919	53,139	56,115
5	Доля оплаты труда в БДДРН ***W***, %	66,10	65,30	65,80	65,90	65,40
6	Доля трансфертов в БДДРН ***TR***, %	18,30	18,60	18,00	18,20	18,10
7	Сумма долей ***W*** и ***TR*** в БДДРН ***DS***, %	84,40	83,90	83,80	84,10	83,50
8	Средний ССДД X_c, руб.	23 221	25 928	27 766	30 306	31 872
9	Модальный ССДД X_{mod}, руб.	9 362	10 449	11 324	12 659	13 056
10	Параметр μ, о.е.	9,7480	9,8601	9,9320	10,039	10,072
11	Параметр σ, о.е.	0,7799	0,7783	0,7733	0,7700	0,7714
12	Доля населения с доходами ниже X_c, ***Fc***, о.е.	0,6517	0,6514	0,6505	0,6499	0,6501
13	Дефицит дохода НДГ ***DF***, о.е.	0,3034	0,3028	0,3010	0,2998	0,3003
14	Индекс поляризации ***ISD***, о.е.	3,5014	3,4923	3,4637	3,4453	3,4530

Основные преимущества предлагаемой методологии состоят в том, что новые показатели, характеризуя, как и индекс Джини, расслоение населения по уровню ССДД, являются экономически более понятными, прозрачными, обоснованными и позволяют получать более точные количественные оценки. Оценки поляризации получаются из анализа поведения распределения населения по уровню ССДД в том диапазоне денежных доходов, где они описывают поведение распределения наилучшим образом. Плотность распределения населения по уровню ССДД может описываться любым законом. Для полноты расчетов достаточно сведений о доле численности и доле объема доходов или низкодоходной, или высокодоходной группы. Они должны быть эквивалентны показателям, получаемым из макроэкономических балансов и баланса денежных доходов и расходов населения. Единственное требование к данным любого распределения – возможность получения оценок численности населения и объема доходов исследуемых групп населения.

Литература

1. Великанова Т.Б. и др. Совершенствование методики и моделей распределения населения по среднедушевому доходу [Текст] / Т.Б. Великанова, И.Б. Колмаков, Е.Б. Фролова // Вопросы статистики. --- 1996. – №5. – С. 50-58 с.
2. Колмаков И.Б. Методология анализа интегральных оценок показателей поляризации денежных доходов населения [Текст] / И.Б. Колмаков // Вопросы статистики. – 2015. – №2. – С. 23-36.
3. Колмаков И.Б. Методы расчета показателей поляризации денежных доходов населения [Текст] / И.Б. Колмаков // Вопросы статистики. – 2007. – №9. – С. 28-35.
4. Колмаков И.Б. Методы и модели прогнозирования показателей дифференциации денежных доходов населения [Текст] / И.Б. Колмаков. – М.: Ин-т микроэкономики, 2004. – 168 с.
5. Колмаков И.Б. Прогнозирование показателей дифференциации денежных доходов населения [Текст] / И.Б. Колмаков // Проблемы прогнозирования. – 2006. – №1. – С. 136-162.
6. Колмаков И.Б. Методы прогнозирования показателей уровня бедности с учетом обездоленных групп населения [Текст] / И.Б. Колмаков // Проблемы прогнозирования. – 2008. – №5. – С. 95-109.
7. Колмаков И.Б. Методы и модели прогнозирования показателей дифференциации и поляризации денежных доходов населения [Текст]: автореф. дис. … д-ра экон. наук / И.Б. Колмаков. – М., 2008.
8. Колмаков И.Б. Сопряжение логарифмически нормального распределения населения по уровню денежных доходов с распределением Парето [Текст] / И.Б. Колмаков // Аудит и финансовый анализ. – 2015. – №2. – С. 47-56.
9. Методологические положения по статистике [Текст] / Госуд. комитет по статистике. – М., 1996 г. – Вып. 1. – 674 с.
10. Павловский З. Введение в математическую статистику [Текст] / З. Павловский. – М.: Статистика, 1967. – 285 с.
11. Римашевская Н.М. Четыре принципиальных вопроса преодоления бедности в России [Текст] / Н.М. Римашевская // Народонаселение. – 2006. – №2. – С. 9-13.
12. Социально-экономическое положение России [Текст]: стат. сб. / Федер. служба госуд. статистики. – М., 2000-2016.
13. Социальное положение и уровень жизни населения России [Текст]: стат. сб. / Федер. служба госуд. статистики. – М., 2000-2016.
14. Суринов А.Е. Доходы населения. Опыт количественных измерений [Текст] / А.Е. Суринов. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 432 с.
15. Фридмен М. Если бы деньги заговорили… [Текст] / Милтон Фридмен; пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Дело, 2002. – 160 с.
16. Шевяков А.Ю. Измерение экономического неравенства [Текст] / А.Ю. Шевяков, А.Я. Кирута. – М.: Лето, 2002. – 320 с.
17. Lerman R.I. A note on the calculation and interpretation of the Gini index [Text] / R.I. Lerman, Sh. Yitchaki // Economic letter. – 1984. – Vol. 15. – Pp. 363-368.

Ключевые слова

Расслоение населения по уровню денежных доходов; индекс Джини; распределение населения по уровню среднемесячных среднедушевых денежных доходов (ССДД); логарифмически нормальное распределение населения; поляризация денежных доходов населения; индекс поляризации денежных доходов населения; методы расчета показателей поляризации; фундаментальная связь функций распределения населения и доходов для среднего значения среднедушевого дохода низкодоходных и высокодоходных групп населения.

Колмаков Игорь Борисович

РЕЦЕНЗИЯ

Статья посвящена исследованию актуальных проблем, а именно, методологии измерения неравенства денежных доходов населения. В настоящее время для оценки расслоения населения по уровню денежных доходов используется показатель, получаемый из кривой Лоренца н называемый индексом Джини. Но, и кривая Лоренца, и индекс Джини, и однозначно их определяющая величина дисперсии логарифма денежных доходов в распределении населения по уровню среднемесячных среднедушевых денежных доходов (ССДД), остаются математическими научно-абстрактными обобщенными понятиями, оторванными от экономического содержания, что затрудняет общение и обсуждение проблем дифференциации доходов населения в общественных организациях и СМИ, затрудняют количественные оценки решений, принимаемых в органах исполнительной власти.

Автор впервые нашел практическое решение проблемы получения характеристик расслоения населения по уровню денежных доходов экономически более понятных, более простых и более точных, чем индекс Джини. Предложена серия новых информативных характеристик дифференциации доходов населения, которые названы полярными. Автор вводит понятие и определение индекса поляризации населения по уровню ССДД. Границей раздела населения на две полярные группы: низкодоходную и высокодоходную определена величина среднего ССДД. Предложена методология расчета индекса поляризации населения, на основе которой, используя разработанные инструментальные средства, автор впервые выполнил прогнозные расчеты показателей поляризации денежных доходов населения (2012-2016 гг.). Приведенные примеры результатов таких прогнозных расчетов, иллюстрирующие их графики и таблицы, подтверждают работоспособность предлагаемой автором методологии.

Основные преимущества предлагаемой методологии состоят в том, что новый показатель, характеризуя, как и индекс Джини, расслоение населения по уровню ССДД, является экономически более понятным, прозрачным, обоснованным и позволяет получать более точные количественные оценки расслоения. Оценки поляризации получаются из анализа поведения распределения населения по уровню ССДД в том диапазоне денежных доходов, где они описывают поведение распределения наилучшим образом.

Статья актуальна, отличается новизной исследования и полученными результатами и может быть рекомендована к опубликованию в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Бобков В.Н., д.э.н., Заслуженный деятель науки Российской Федерации, профессор, Генеральный директор ОАО «Всероссийский центр уровня жизни».

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ