3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ОСТАТКОВ ПО КРЕДИТНОЙ ЛИНИИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФИНАНСИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ В ОСНОВНЫЕ СРЕДСТВА КОМПАНИИ

Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор, с.н.с., отдел проектирования, Центр моделирования сложных систем НПО «РусБИТех», г. Тверь;
Лесик А.И., к.ф.-м.н., доцент, кафедра математической статистики и системного анализа, Тверского государственного университета, г. Тверь

Предлагается алгоритм определения остатков по кредитной линии, максимизирующих текущую стоимость собственного капитала компании за счет инвестиций в основные средства. Данная статья основывается на работе [10]. В отличие от модели Мищенко–Артеменко, где исследован случай планирования на один период, изучается произвольный конечный горизонт планирования. Работа является дальнейшим развитием динамической модели инвестиций, изученной в работе [11] в части учета ограничений по предельному левереджу, определяющему приемлемый уровень финансовой устойчивости компании, использующей долгосрочные займы. Выведено рекуррентное уравнение для оптимальных остатков по кредитной линии, получены достаточные условия существования режима устойчивого роста компании и оценки темпов роста. В заключение рассматриваются проблемы учета инфляции в прогнозном периоде. Получены условия согласования параметров модели обеспечивающих рост, использующие производные по направлению функции дохода, определяемые по формулам, предложенным в работе [6] и последующих работах по дифференциальным свойствам функции связанного максимума.

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается задача определения оптимальных остатков по кредитной линии в линейной динамической модели инвестиций, определенной и изученной в работе [11]. Отличие состоит в учете ограничений по предельному левериджу, определяющему приемлемый уровень финансовой устойчивости компании. Горизонт планирования составляет прогнозный период, который покрывает все предполагаемые инвестиции компании и достаточен для стабилизации ее денежного потока. Связь между доходом компании и текущими инвестициями в каждом периоде устанавливается через производственную задачу. Объем реализации выбирается из условия не превосходства его спросу и общих ограничений на производственные ресурсы. В работе предлагается алгоритм определения остатков по кредитной линии, максимизирующих текущую стоимость собственного капитала.

Данная статья основывается на работе [10] в части использования производной задачи управления ресурсами в классической производственной задаче для связи между доходом компании и текущими инвестициями в каждом периоде. В отличие от модели Мищенко–Артеменко, где исследован случай планирования на один период, изучается произвольный конечный горизонт планирования. Данное предположение потребовало доказательство дополнительных свойств модели. Если предприятие может выбирать не только объемы выпуска, но и цены реализации, то производственная задача становится квадратичной [13]. В случае, когда для определения подходящей ставки в методе дисконтирования дохода (***DDM***) используется модель оценки капитальных активов (***CAPM***) динамическая модель инвестиций в целом оказывается нелинейной [14], поскольку по теории Модильяни–Миллера стоимость собственного капитала компании будет зависеть от левериджа [2]. В этой работе изучается линейный случай, квадратичному и нелинейному случаю предполагается посвятить отдельную публикацию.

В общетеоретическом плане концепция инвестиционной стоимости лежит в основе современной теории оценки бизнеса в рамках доходно подхода (см. [4]). Дисконтированная стоимость денежного потока на собственный капитал компании представляет собой универсальный агрегированный критерий, который позволяет решать все вопросы, связанные со структурой и стоимостью капитала в зависимости от предполагаемых капитальных вложений согласно методологии компании Делойт и Туш (см. [8]). Оценке инвестиционной стоимости бизнеса посвящена большая литература (см. [3]). Однако до сих пор фундаментальный вопрос о связи инвестиций с операционной деятельностью компании остается открытым. Кроме того, как правило, одни специалисты занимаются дисконтированием, а другие прогнозированием и оптимизацией денежного потока. Поэтому актуальной является задача объединения дисконтирования, прогнозирования и оптимизации денежного потока инвестиций в одной динамической модели (см. [7, с. 64]).

Основной результат работы состоит в выводе рекуррентного уравнения для оптимальных остатков по кредитной линии, максимизирующих текущую стоимость собственного капитала компании. Освобождаясь от минимума в правой части на основе принципа сжимающих отображений и вытекающих из него условий монотонности остатков, можно получить достаточные условия существования режима устойчивого роста компании и оценки темпов роста, что и сделано в настоящей работе. В заключение рассматриваются проблемы учета инфляции в прогнозном периоде. Получены условия согласования параметров модели обеспечивающих рост, использующие производные по направлению функции дохода, определяемые по формулам, предложенным в работе [6] и последующих работах по дифференциальным свойствам функции связанного максимума.

1. Функция маржинального дохода компании

Рассмотрим задачу определения неявной функции маржинального дохода компании $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{V})$ без учета постоянных расходов $\boldsymbol{C_0}$:

$$\begin{aligned} &Q(V)=\max_{x,y}\langle \Delta c, x\rangle,\\ &Ax\le b+y,\ x\ge 0, \\ &\langle e,y\rangle\le V,\ y\ge 0. \end{aligned}\qquad(1)$$

где $\boldsymbol{A}$ – технологическая $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ – матрица производственной задачи (***ПЗ***);

$\Delta\boldsymbol{C}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c}$ – $\boldsymbol{n}$ – вектор столбец цен $\boldsymbol{p}$ на продукцию предприятия уменьшенных на удельные переменные расходы $\boldsymbol{c}$;

$\boldsymbol{b}$ – $\boldsymbol{m}$ – вектор столбец производственных ресурсов выраженных в соответствующих единицах измерения;

$\boldsymbol{e}$ – $\boldsymbol{m}$ – вектор столбец цен производственных ресурсов;

$\boldsymbol{x}$ – . $\boldsymbol{n}$ – вектор столбец выпуска продукции;

$\boldsymbol{y}$ – $\boldsymbol{n}$ – вектор столбец дополнительно приобретенных ресурсов за счет предполагаемого объема $\boldsymbol{V}$ финансирования инвестиционного проекта.

Из леммы 1.8 в книге [16] следует, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Функция маржинального дохода (1) будет вогнутой, неубывающей и кусочно-линейной функцией V и может быть представлена как минимум из конечного числа линейных функций:

$$Q(Z) = \min_{j=1,2,...,m} \left(Q_j^0 + k_j Z\right), \qquad (2)$$

где $O_1 \le O_2 \le ... \le O_m$;

$k_1 \ge k_2 \ge ... \ge k_m \ge 0$.

Например, в модельном примере, приведенном в работе [16]) была построена функция:

$$Q(Z) = \begin{cases} 570 + 0{,}875Z;\ 0 \le Z \le 80; \\ 623 + 0{,}207Z;\ 80 \le Z \le 1820; \\ 636 + 0{,}200Z;\ Z \ge 1820. \end{cases}$$

2. Постпрогнозная стоимость собственного капитала компании

Стоимость собственного капитала компании в постпрогнозный период может быть в простейшем случае получена методом прямой капитализации по формуле Гордона (см. [8]):

$$X = X(V) = \frac{q(V)(1+\tau)}{i-\tau} = = q(V)\left(\frac{1+\tau}{1+i} + \left(\frac{1+\tau}{1+i}\right)^2 + ...\right), \qquad (3)$$

где τ – постпрогнозный темп роста на уровне долгосрочного прогноза инфляции, i – предполагаемая (инвестором) доходность на собственный капитал (стоимость собственного капитала):

$$q(V) = (1-l)(Q(V) - C_0 - A(V)), \qquad (4)$$

величина чистой прибыли компании до уплаты процентов по займам, скорректированная на ставку l налога на прибыль, $A(V) = A_0 + aV$ амортизация, a – средняя норма амортизации основных средств компании, $A_0 = a\langle e, b\rangle$ – амортизация старых основных средств (ОС) до новых капитальных вложений. Предполагается, что структура ОС не измениться и в результате капитальных вложений объемом V и среднее значение нормы амортизации a останется на прежнем уровне.

Формула (3) метода прямой капитализации предполагает бесконечный период получения дохода и получается суммированием соответствующей геометрической прогрессии. Она применяется для стационарного периода, наступающего после завершения всех предполагаемых инвестиций в ОС и возврата основной суммы займа. Поэтому проценты по займам не учитываются. Формула (3) показывает потенциальные возможности по росту стоимости компании в долгосрочной перспективе в зависимости от располагаемых финансовых ресурсов. Интересно сравнить эту потенциальную стоимость с текущей стоимостью компании. Для этого построим модель нестационарного изменения дохода компании в прогнозном периоде, охватывающем по времени все предполагаемые инвестиции и стабилизацию структуры капитала.

3. Общая модель финансирования инвестиционного проекта

Финансирование инвестиций в ОС предполагается в форме кредитной линии, т.е. соглашения, по которому заемщик может брать новые кредиты, не погасив еще предыдущих, но так, чтобы остаток долга на конец каждого года был не менее нуля и не более оговоренного объема V потолка кредитной линии. Суммарные платежи p_t по кредитной линии, включающие проценты и части основного долга, можно представить в виде (см. [8]):

$$p_t = Z_{t-1}g - Z_t + Z_{t-1} = Z_{t-1}g - \Delta Z_t,\ t = 0,1,...,n. \qquad (5)$$

где g – средняя стоимость заемных средств.

Остаток долга должен находиться в пределах:

$$0 \le Z_t \le V,\ t = 1,...,n-1. \qquad (6)$$

Мы предполагаем в простейшем случае нулевые начальные и конечные значения остатков, необходимых для расчета платежей по формуле (5):

$$Z_0 = 0, Z_n = 0. \qquad (7)$$

Это позволяет считать остатки $Z_t, t = 1,2,...,n-1,$ по кредитной линии независимыми переменными. В частности, величина $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} > 0$ представляет собой новый кредит, увеличивающий общую задолженность, а величина $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} < 0$ – часть основного долга с обратным знаком, погашенного в t-м периоде. Поэтому значения $Z_t, t = 1,2,...,n-1$ не связаны друг с другом и могут быть выбраны независимо из условий (6). Предполагается, что вся величина $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} > 0$ идет в инвестиции в ОС.

Пусть d_t – прогноз денежного потока на инвестированный капитал на конец t-го года, который получается по формуле ([8]):

$$d_t = q_t - K_t - \Delta O_t, \qquad (8)$$

где $q_t = q(z_t)$ – величина чистой прибыли компании до уплаты процентов по займам, скорректированная на ставку l налога на прибыль, определяемая по формуле (4);

z_t – капитальные вложения нарастающим итогом, определяемые из рекуррентного уравнения:

$$z_t = z_{t-1} + \max(Z_t - Z_{t-1}; 0), t = 1,...,n;\ z_0 = 0;$$

$K_t = \Delta z_t$ – предполагаемые капитальные вложения в t-м году, $\Delta O_t = \nu\Delta Q_t$ – увеличение оборотного капитала O_t компании, привязанное к изменению $\Delta Q_t = \Delta Q(z_t)$ маржинального дохода, ν – соответствующий параметр линейной регрессии, построенный по ретроспективным данным по рекомендации компании Делой и Туш (см. [8]).

Предполагается, что амортизация $A(V) = A_0 + aV$, остающаяся фактически в распоряжении предприятия после уплаты налога на прибыль, идет по своему назначению, т.е. на ремонт и замещение выбывающих основных средств.

4. Простейшая динамическая модель инвестиций в прогнозный период

Предположим, что все инвестиции осуществляются до момента $T < n$ и по смыслу изучаемого периода $t = 1, 2, ..., T$ справедливо равенство $Z_T = V$ и дополнительно выполнено условие:

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} \geq 0, t = 1, 2, ..., T \ . \qquad (9)$$

Тогда $z_t = Z_t, \Delta z_t = \Delta Z_t$ и критерий текущей стоимости X_t собственного капитала компании на начало инвестиционного проекта принимает вид [11]:

$$X_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{\tilde{q}(Z_t) - (g' + a')Z_{t-1} - \nu \Delta Q(Z_t)}{(1+i)^t} + \frac{X_T}{(1+i)^T} \to max_{\{Z_t\}}, \qquad (10)$$

где обозначено для краткости

$$\tilde{q}(V) = (1-l)(Q(V) - C_0 - A_0),$$

$$g' = (1-l)g, a' = (1-l)a \ .$$

Таким образом, предполагается, что последовательность $\{Z_t\}$ монотонно не убывает и выполняется конечное условие:

$$Z_T = V \ . \qquad (11)$$

Предполагается, что разница между значениями вектора y_t и y_{t-1} приобретенных ОС при определении значений функции дохода $Q(Z_t)$ и $Q(Z_{t-1})$ в задаче (1) покомпонентно может быть погашена путем покупки недостающих активов и продажи лишних, как новых за счет накопленной амортизации. Этого всегда можно добиться, поскольку из целей максимизации (10) следует, что ограничения $\langle e, y_t \rangle \leq Z_t$ будут активны: $\langle e, y_t \rangle = Z_t$, и за счет очередного транша $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} > 0$ по кредитной линии можно погасить покомпонетно разницу $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$, продавая или покупая соответствующие ОС. Это вытекает из соотношения $\langle e, \Delta y_t \rangle = \Delta Z_t$, являющегося следствием активности указанных ограничений и означающего, что поступивших денег от транша и продажи избыточных активов хватит для покупки недостающих средств.

Постпрогнозную стоимость собственного капитала компании X_T в (10) с учетом возможного ненулевого остатка по займу и равенства $Z_T = V$ можно найти в простейшем случае по формуле прямой капитализации прибыли после уплаты налога на прибыль и процентов по займам, которые уменьшают базу налога на прибыль:

$$X_T = X(z_T) = \{q(V) - g'V\}(1+\tau)/(i-\tau), \qquad (12)$$

которая предполагается положительным для любых $V \geq 0$. Это означает, что функция $q(V)$ прибыли растет не медленней процентов по займам. Предполагается, что уровень левериджа L будет сохраняться на достигнутом уровне, т.е. сохраняться постоянная структура капитала компании. Более точно постпрогнозную стоимость собственного капитала компании X_T в (10) можно определить как отложенную продажу [11]:

$$X_T = \frac{X_n}{(1+i)^{n-T}}, \qquad (13)$$

где $X_n = q(V)(1+\tau)/(i-\tau)$ определяется по формуле Гордона (3) метода прямой капитализации;

$\Delta T = n - T$ – наискорейшее время погашения займа, которое определяется по формуле:

$$\Delta T = n - T = \frac{ln \dfrac{q(V)}{q(V) - g'V}}{ln(1+g')}. \qquad (14)$$

Это минимальное время, необходимое для полного погашения задолженности по кредитной линии за счет достигнутого на конец $(T+1)$-го периода денежного потока величины $d(V) = q(V) - g'V$. Подставляя (14) в (13), приходим к формуле:

$$X_T = \frac{q(V)(1+\tau)}{i-\tau} \left(1 - \frac{g'V}{q(V)}\right)^{log_{1+g'}(1+i)}. \qquad (15)$$

Заметим, что при условии положительности выражения в правой части (12) и неравенства $i > g$ терминальное значение X_T по формуле (15) будет меньше, чем по формуле (12). Это плата за восстановление финансовой устойчивости компании путем погашения возникшей задолженности V по кредитной линии.

Уравнение (10) равносильно рекуррентному уравнению:

$$X_{t-1} = \frac{\tilde{q}(Z_t) - (g' + a')Z_{t-1}}{1+i} - \frac{\nu \Delta Q(Z_t) + X}{1+i}, t = T, ..., 1, \qquad (16)$$

с конечным условием (12).

Перегруппировкой членов разностей $\nu \Delta Q(Z_t) = \nu Q(Z_t) - \nu Q(Z_{t-1})$ в (10) можно получить эквивалентное выражение:

$$X_0 = \frac{\nu Q(0)}{1+i} + \sum_{t=1}^{T} \frac{(1 - l - \nu i/(1+i))Q(Z_t)}{(1+i)^t} - \frac{C_0' - A_0' - (g' + a')Z_{t-1}}{(1+i)^t} + \frac{X_T - \nu Q(V)/(1+i)}{(1+i)^T}, \qquad (17)$$

где для краткости обозначено: $C_0' = (1-l)C_0$, $A_0' = (1-l)A_0$.

Введем величины $\tilde{X}_t = X_t - \nu Q(Z_t)/(1+i)$, $t = 0, 1, ..., T$. Тогда уравнение (17) равносильно рекуррентному уравнению:

$$\tilde{X}_{t-1} = \frac{(1 - l - \nu i/(1+i))q(Z_t)}{1+i} - \frac{C_0' - A_0' - (g' + a')Z_{t-1} + \tilde{X}_t}{1+i}, t = T, ..., 1, \qquad (18)$$

с конечным условием:

$$\tilde{X}_T = X_T - \nu Q(V)/(1+i) \ . \qquad (19)$$

Поскольку $O_t = \nu Q(Z_t)$ – оборотный капитал на конец t-го периода, то величины $\tilde{X}_t$ представляют собой стоимость собственного капитала компании, скорректированные на стоимость оборотного капитала, дисконтированного к началу t-го периода. Скорректированный собственный капитал естественно назвать внеоборотным капиталом, по аналогии с оборотным. Действительно, если ввести внеоборотный капитал как разницу внеоборотных активов и долгосрочных займов, то собственный капитал будет балансировать сумму внеоборотного и оборотного капитала. То, что оборотный капитал при этом дисконтируется на начало периода выражает особенность его влияния на денежный поток в принятой нами дискретной модели динамики инвестиционного процесса.

Лемма 2. Пусть $1 - l - \nu i/(1+i) > 0$. Тогда для неубывания критерия (17) по $Z_t; t = 1,2,...,T-1;$ достаточно выполнения неравенства:

$$Q(Z) \geq \frac{C_0' + A_0' + (g' + a')Z/(1+i)}{1 - l - \nu i/(1+i)}, \tag{20}$$

для любых $Z \geq 0$.

Доказательство следует из эквивалентности критерия (17) критерию:

$$\tilde{X}_0 = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(Z_t)}{(1+i)^t} - \\ -\frac{C_0' - A_0' - (g'+a')Z_t/(1+i)}{(1+i)^t} + \\ +\frac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(V) - C_0' - A_0' + \tilde{X}_T}{(1+i)^T}, \tag{21}$$

того обстоятельства, что при сделанных предположениях функция в числителе (21) под знаком суммы будет в силу леммы 1 вогнутой и неотрицательной, то есть не убывающей функцией от $Z_t; t = 1,2,...,T-1$.

Условие (20) означает, что функция $Q(V)$ маржинального дохода растет не медленней некоторой аффинной функции от объема инвестиций V.

5. Задача с ограничением по левериджу

С помощью уравнения (18) можно выразить дополнительное условие на предельный финансовый леверидж:

$$L_{t-1} = \frac{Z_{t-1}}{\tilde{X}_{t-1}} \leq L, t = T,...,1. \tag{22}$$

Условие (22) эквивалентно неравенству: $Z_{t-1} \leq L\tilde{X}_{t-1}$, $t = T,...,1$, которое равносильно условию:

$$Z_{t-1} \leq \left(\begin{array}{l} L\dfrac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(z^t)}{1+i+L(g'+a')} - \\ -\dfrac{C_0' - A_0' + \tilde{X}_t}{1+i+L(g'+a')} \end{array} \right); \tag{23}$$

$$t = T,...,2; Z_T = V.$$

Для решения задачи максимизации критерия (17) при ограничениях (6), (9) с дополнительным ограничением (23) на предельный леверидж компании рассмотрим рекуррентное уравнение:

$$Z_{t-1} = \min \left(\begin{array}{l} Z_t; L\dfrac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(z^t)}{1+i+L(g'+a')} - \\ -\dfrac{C_0' - A_0' + \tilde{X}_t}{1+i+L(g'+a')} \end{array} \right); \tag{24}$$

$$t = T,...,2; Z_T = V,$$

которое нужно решать совместно с уравнением (18) и которое гарантирует в частности выполнение условий (6), (9).

Лемма 3. Предположим, что выполнено условие рентабельности (20). Тогда решение $\tilde{Z}_t, t = 1,2,...,T-1$ задачи, полученное из уравнения (24), мажорирует сверху любое допустимое решение $Z_t, t = 1,2,...,T-1$, удовлетворяющее условию (23), в том смысле, что $Z_t \leq \tilde{Z}_t, t = 1,2,...,T-1.$

Доказательство получается из сравнения $\tilde{X}_t$ с $\hat{X}_t$, которое определяется как решение рекуррентного уравнения

$$\hat{X}_{t-1} = \frac{(1-l-\nu i/(1+i))q(Z_t)}{1+i} - \\ -\frac{C_0' - A_0' - (g'+a')Z_t}{1+i} / \\ /\frac{(1+i)+\hat{X}_t}{1+i}, t = T,...,1$$

с конечным условием:

$$\hat{X}_T = q(V) + \tilde{X}_T = q(V) + X_T - \nu Q(V)/(1+i). \tag{25}$$

Из сравнения (18) и (24) получим, что $\tilde{X}_t$ с $\hat{X}_t$ связано соотношением:

$$\tilde{X}_t = -\frac{(a'+g')Z_t}{1+i} + \hat{X}_t, t = T-1,...,0.$$

В частности, $\hat{X}_0$ совпадает с полученным ранее эквивалентным критерием $\tilde{X}_0$, поскольку $Z_0 = 0$ в силу условия (7).

Теперь ограничения (9), (23) задачи можно записать в виде:

$$0 \leq Z_{T-1} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} V, L\dfrac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(V)}{1+i+L(a'+g')} - \\ -\dfrac{C_0' - A_0' + \hat{X}_T}{1+i+L(a'+g')} \end{array} \right\}$$

и

$$0 \leq Z_{t-1} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} Z_t, L\dfrac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(Z_t)}{1+i+L(a'+g')} - \\ -\dfrac{C_0' - A_0' - (a'+g')Z_t/(1+i) + \hat{X}_t}{1+i+L(a'+g')} \end{array} \right\}, \tag{26}$$

при $t = T-1,...,2$.

где $\hat{X}_t$ – решение рекуррентного уравнения (24) с конечным условием (25), монотонно неубывающее покомпонентно по Z_t.

Это доказывается также как лемма 2 с использованием условия (20). Из (20) следует также, что справа в (26) стоят монотонно неубывающие функции от Z_t, то индукцией по $t = T-1,...,1$ устанавливается, что справедливо утверждение леммы.

С учетом леммы 2 отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 1. В условиях рентабельности (20) рекуррентное уравнение (24) с конечным условием (25) дает оптимальное решение задачи максимизации критерия (17) при ограничениях (6), (9) с дополнительным ограничением (23) на предельный левеВридж компании.

6. Режим постоянного роста

Исследуем, когда можно опустить Z_t в правой части уравнения (24). Подставляя полученное выражение в (18), приходим к следующему рекуррентному уравнению для стоимости скорректированного внеоборотного капитала:

$$\tilde{X}_{t-1} = \frac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(L\tilde{X}_t)}{1+i+L(g'+a')} - \\ -\frac{C_0' - A_0' + \tilde{X}_t}{1+i+L(g'+a')}, t = T,...,1, \quad (27)$$

с конечным условием (19). Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. Предположим, что последовательность $\tilde{X}_t$, построенная по уравнению (27), является убывающей в обратном времени, а условие (22) выполняется как равенство. Тогда последовательность Z_t, определяемая из (22), также будет убывающей, и Z_t в правой части уравнения (24) можно опустить.

Доказательство вытекает из того, что Z_t в правой части уравнения (24) введено для того, чтобы гарантировать убывание последовательность Z_t в обратном времени, а оно имеет место в силу (22), выполняемого как равенство в силу убывания последовательности $\tilde{X}_t$.

В частности, на одном участке линейности функции маржинального дохода $Q(L\tilde{X}_t) = Q_j^0 + Lk_j\tilde{X}_t$, где $Q_j = Q_{j(LX_t)}$ и $k_j = k_{j(LX_t)}$, а $j = j(Z)$ – индекс, реализующий минимум в (2). Тогда функция $F(\tilde{X}_t)$ в правой части (27) не зависит от t и является липшицевой с константой:

$$r_j = \frac{(1-l-\nu i/(1+i))Lk_j + 1}{1+i+L(g'+a')}. \quad (28)$$

Таким образом, при условии $0 < r_j < 1$ отображение $F(\tilde{X})$ имеет неподвижную точку $\tilde{X}^* = F(\tilde{X}^*)$, к которой сходится процесс (27), представляющий собой арифмо-геометрическую прогрессию со знаменателем меньше единицы. По формуле для ее t-го члена имеем для последнего участка линейности функции маржинального дохода:

$$X_{T-t} = (X_T - X^*)r_j^t + X^*, \quad (29)$$

что означает, что разность $X_{T-t} - X^*$ убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $r_j < 1$. В прямом времени получаем соответственно рост с темпом $1/r_j - 1 > 0$. При переходе от одного участка линейности к другому темп будет замедляться в обратном времени, т.е. расти в прямом времени.

Пусть $k = k_1$ – общая константа Липшица функции Q, а r константа Липшица функции $F(\tilde{X})$ в правой части (27) получающаяся заменой k_t на k в формуле (28).

Замечание 1. При условии $k < (i+L(a'+g'))/(L(1-l-\nu i/(1+i))$ выполнено неравенство $0 < r < 1$ и отображение $F(\tilde{X})$ является сжимающим и, следовательно, имеет неподвижную точку $\tilde{X}^*$.

Лемма 5. Для запуска процесса (27), (22) в условиях леммы 4 и замечания 1 достаточно, чтобы $\tilde{X}_T > (1+\varepsilon)\tilde{X}^*, V = L\tilde{X}_T$, где $\varepsilon > 0$ – параметр показывающий потенциал относительного роста компании. Тогда процесс можно закончить для любого t_0, при котором $\tilde{X}_{T-t_0} > (1+\varepsilon)\tilde{X}^*$ в этом случае темп роста процесса в прямом времени будет удовлетворять неравенству:

$$\frac{1}{1+1/\varepsilon}\left(\frac{1}{r}-1\right) \le \frac{\tilde{X}_{T-(t-1)}}{\tilde{X}_{T-t}} - 1. \quad (30)$$

Доказательство следует из сжимаемости отображения $F(\tilde{X})$:

$$0 \le \tilde{X}_{T-t} - \tilde{X}^* = \left|\tilde{X}_{T-t} - \tilde{X}^*\right| = \\ = \left|F(\tilde{X}_{T-(t-1)}) - F(\tilde{X}^*)\right| \le \\ \le r\left|\tilde{X}_{T-(t-1)}) - \tilde{X}^*\right| = r(\tilde{X}_{T-(t-1)} - \tilde{X}^*),$$

откуда следует неравенство:

$$\Delta\tilde{X}_{T-t} = \tilde{X}_{T-(t-1)} - \tilde{X}_{T-t} = \\ = (\tilde{X}_{T-(t-1)} - \tilde{X}^*) - (\tilde{X}_{T-t} - \tilde{X}^*) \ge \\ \ge \left(\frac{1}{r}-1\right)(\tilde{X}_{T-t} - \tilde{X}^*),$$

Отсюда следует искомая оценка:

$$\frac{\Delta\tilde{X}_{T-t}}{\tilde{X}_{T-t}} = \frac{\Delta\tilde{X}_{T-t}}{(\tilde{X}_{T-t} - \tilde{X}^*) + \tilde{X}^*} \ge \left(\frac{1}{r}-1\right) * \\ * \frac{1}{1+\frac{1}{\tilde{X}_{T-t}/\tilde{X}^* - 1}} \ge \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{r}-1\right).$$

Последнее неравенство следует из условия $\tilde{X}_{T-t_0} > (1+\varepsilon)\tilde{X}^*$.

Замечание 2. Предпоследнее неравенство для $\Delta\tilde{X}_{T-t}$ в доказательстве леммы 4 выполняется как равенство в случае (29), откуда получается верхняя оценка:

$$\frac{\Delta\tilde{X}_{T-t}}{\tilde{X}_{T-t}}=\frac{\Delta\tilde{X}_{T-t}}{(\tilde{X}_{T-t}-\tilde{X}^*)+\tilde{X}^*}=$$
$$=(\frac{1}{r_j}-1)*\frac{\tilde{X}_{T-t}-\tilde{X}^*}{(\tilde{X}_{T-t}-\tilde{X}^*)+\tilde{X}^*}\le\frac{1}{r_j}-1.$$

7. Задача с ограничения по спросу

Потребители на рынке предполагаются мелкими. Их поведение характеризуется суммарной линейной функцией спроса:

$$D(p)=D-Gp\,, \tag{31}$$

показывающей, какой объем каждого товара будет куплен при данном векторе цен. Фирма-монополист устанавливает цены на товары p и объемы производства товаров x. Здесь $p=(p_1,p_2,...,p_n)'$ – вектор-столбец цен $p_j\ge 0$, $D=(D_1,D_2,...,D_n)'$ – вектор-столбец предельных объемов спроса $D_j>0$, $G=$ $diag(d)$ - диагональная $n\times n$ -матрица, на диагонали которой стоят коэффициенты $d_j>0$, $d'=(d_1,d_2,$ $...,d_n)$ – вектор строка коэффициентов $d_j>0$.

Предположим, что технологическая матрица A имеет хотя бы один ненулевой элемент в каждой строке и столбце, что означает, что каждый товар использует хотя бы один вид ресурсов, и каждый ресурс используется для производства хотя бы одного товара. Тогда множество X допустимых решений задачи (1) будет не пусто и ограниченно. Добавим ограничения на параметры, связывающие предельные объемы спроса $D_j>0,\ j=1,2,...,n,$ и цены: $c_j\le p_j\le P_j=D_j/d_j,\ j=1,2,...,n.$ Предположим, что $D>Gc$. Это неравенство эквивалентно условию $c<P$, т.е. не вырожденности задачи.

Подобно (1) введем функцию дохода компании $Q=Q(Z)$, положив:

$$Q(Z)=max_{x,y}\langle p-c,x\rangle-C_0\,, \tag{32}$$

где максимум берется при ограничениях:

$$\begin{cases}Ax\le b+y;\ y\ge 0;\\ 0\le x\le D(p);\ \langle y,e\rangle\le Z\end{cases}. \tag{33}$$

В работе [11] было установлено, что функция дохода вогнута и не убывает. При этом, начиная с некоторого значения $Z=v_1$ она не увеличивается. Это значение можно получить по формуле:

$$v_1=\sum_{i=1}^{m}e_i(A_i(D-Gp)-b_i)_+\,,$$

где A_i – i -я строка технологической матрицы A и обозначено для краткости:

$$(A_i(D-Gp)-b_i)_+=$$
$$=max(A_i(D-Gp)-b_i;0),$$
$$i=1,2,...,m.$$

Предположим, что конечное условие к рекуррентному уравнению инвестиции (27) определяется по формулам (12), (19):

$$\begin{aligned}\tilde{X}_T&=X_T-\nu Q(V)/(1+i)=\\&=(q(V)-g'V)(1+\tau)/(i-\tau)-\nu Q(V)/(1+i).\end{aligned} \tag{34}$$

Для запуска процесса (27), (34) нужно определить объем инвестиций $V=L\tilde{X}_T$ из условия:

$$\tilde{X}_T=(q(L\tilde{X}_T)-g'V)(1+\tau)/$$
$$/(i-\tau)-\nu Q(L\tilde{X}_T)/(1+i).$$

которое приводит к уравнению для $\tilde{X}_T$:

$$\tilde{X}_T(\frac{i-\tau}{1+\tau}+g'L)=q(L\tilde{X}_T)-\frac{\nu Q(L\tilde{X}_T)(i-\tau)}{(1+i)(1+\tau)}. \tag{35}$$

С учетом формулы (4) $q(L\tilde{X}_T)=(1-l)Q(L\tilde{X}_T)-$ $-C_0'-A_0'-a'L\tilde{X}_T$, откуда уравнение (35) принимает вид:

$$\begin{aligned}&\tilde{X}_T(\frac{i-\tau}{1+\tau}+(a'+g')L)=\\&=(1-l-\frac{\nu}{1+i}*\frac{i-\tau}{1+\tau})Q(L\tilde{X}_T)-C_0'-A_0'.\end{aligned} \tag{36}$$

Лемма 6. В условиях (20) уравнение (36) имеет и притом единственное решение $\tilde{X}_T^*$.

Действительно, в силу (20) имеем неравенство:

$$Q(0)\ge\frac{C_0'+A_0'}{1-l-\nu i/(1+i)}\ge$$
$$\ge\frac{C_0'+A_0'}{1-l-\nu(i-\tau)/[(1+\tau)(1+i)]}.$$

т.е. правая часть неравенства (36) при $\tilde{X}_T=0$ больше левой. Но в силу ограниченности функции Q величиной $Q(V_1)$ при любом X_T, удовлетворяющем условию:

$$X_T>max(v_1/L;[(1-l-\frac{\nu(i-\tau)}{(1+i)(1+\tau})Q(V_1)-$$
$$-C_0'-A_0']/(\frac{i-\tau}{1+\tau}+L(a'+g'))=\hat{X}_T^*,$$

правая часть неравенства (36) меньше левой. Последнее вместе с условием леммы означает, что существует решение X_T^* уравнения (36) удовлетворяющее неравенству:

$$0<\tilde{X}_T^*<\hat{X}_T^*. \tag{37}$$

Единственность решения следует из неубывания функции Q и строгого возрастания функции в левой части условия (36).

При этом процесс (27), (36) может нарушать условие $L\tilde{X}_T\le V_1$. В последнем случае уравнение (27) должно иметь вид:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{t-1}&=\frac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(L\tilde{X}_t)}{1+i+L(1+g'+a')}-\\&-\frac{C_0'-A_0'+(1+L)\tilde{X}}{1+i+L(1+g'+a')},t=T,...,1.\end{aligned} \tag{38}$$

Это устанавливается, как уравнение (27), но в этом случае положительная разница Z_t-Z_{t-1} идет на увеличение денежного потока на собственный капитал предприятия. При этом платеж по кредитной линии равен $p_t = Z_{t-1}(1+g') - Z_t$. Если ввести функцию:

$$L(\tilde{X}_t) = \begin{cases} L, L\tilde{X}_t \geq V_1 \\ 0, L\tilde{X}_t < V_1 \end{cases} = L\theta(V_1 / L),$$

где $\theta(a)$ – индикаторная функция множества $x \geq a$, то уравнения (27), (38) можно записать единообразно:

$$\tilde{X}_{t-1} = \frac{(1-l-\nu i/(1+i))Q(L\tilde{X}_t)}{1+i+L(\tilde{X}_t)+L(g'+a')} - \\ - \frac{C_0' - A_0' + (1+L(\tilde{X}_t))\tilde{X}}{1+i+L(\tilde{X}_t)+L(g'+a')}, t = T,...,1. \quad (39)$$

При этом неподвижная точка X^* у процессов (27), (38) одна и та же и находится из уравнения:

$$\tilde{X}(i+(a'+g')L) = (1-l-\frac{\nu i}{1+i})Q(L\tilde{X}) - C_0' - A_0'. \quad (40)$$

Лемма 7. В условиях (20) уравнение (40) имеет и притом единственное решение $\tilde{X}^*$, удовлетворяющее неравенству:

$$0 < \tilde{X}^* < \tilde{X}_T^*. \quad (41)$$

Утверждение леммы следует из неравенства:

$$0 < \tilde{X}^*(\frac{i-\tau}{1+\tau} + L(a'+g')) < \tilde{X}^*(i+L(a'+g')) =$$
$$= (1-l-\frac{\nu i}{1+i})Q(L\tilde{X}^*) - C_0' - A_0' <$$
$$< (1-l-\frac{\nu i}{1+i}\cdot\frac{i-\tau}{1+\tau})Q(L\tilde{X}^*),$$

аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 5.

Для решения уравнений (36), (40) можно воспользоваться методом деления пополам отрезка $[0, \hat{X}_T^*]$, где $\hat{X}_T^*$ была определена в (35). При этом значение функции $Q(L\tilde{X})$ на каждом шаге находится при помощи решения задачи линейного программирования (32), (33).

8. Учет инфляции в прогнозном периоде

Для учета инфляции по модели, предложенной в работе [10], введем уровень инфляции μ, положив в определении функции дохода (32), (33): $p = \bar{p}(\mu), c = \bar{c}(\mu), e = \bar{e}(\mu)$, где $\bar{p}(\mu) = p + p^0\mu, \bar{c}(\mu) = c + c^0\mu, \bar{e}(\mu) = e + e^0\mu$. Параметры p, c, e будем явно указывать в обозначении функции дохода: $Q(Z) = Q(Z, p, c, e)$. Пусть $\mu_t, t = 1 ..., T$ – прогноз инфляции на плановый период нарастающим итогом. Тогда в уравнении инвестиций (39) следует положить $Q_t(Z) = Q(Z, p(\mu_t), c(\mu_t), e(\mu_t))$, где μ_t некоторая неубывающая последовательность. Обозначим, через $F_t(\tilde{X}_t)$ правую часть в (39). И пусть $\tilde{X}_t^*$ – неподвижная точка $\tilde{X}_t^* = F_t(\tilde{X}_t^*)$, $t = 1,...,T$.

Лемма 8. Предположим, что $F_t(0) > 0, t = 1,...,T$, и последовательность функций $F_t(\tilde{X})$ является неубывающей для любого $\tilde{X}$. Тогда последовательность $\tilde{X}_t^*$ не убывает.

Доказательство. В силу неубывания последовательности функций $F_t(\tilde{X})$ имеем неравенство $\tilde{X}_t^* = F_t(\tilde{X}_t^*) \geq F_{t-1}(\tilde{X}_t^*)$. Откуда с учетом $F_{t-1}(0) > 0$ и непрерывности функции $F_{t-1}(\tilde{X})$ получим неравенство $0 < \tilde{X}_{t-1}^* \leq \tilde{X}_t^*$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. В силу монотонности зависимости функции $F_t(\tilde{X})$ от $Q_t(L\tilde{X})$ достаточным условием неубывания последовательность $\tilde{X}_t^*$ является неубывание последовательность функций $Q_t(Z)$.

Лемма 9. Предположим, что $\tilde{X}_T > \tilde{X}_T^*$. Тогда в условиях леммы 7 последовательность $\tilde{X}_{t-1} = F_t(\tilde{X}_t)$ является неубывающей.

Доказательство. В силу условия $\tilde{X}_T > \tilde{X}_T^*$ имеем $\tilde{X}_{T-1}^* \leq \tilde{X}_T^* < \tilde{X}_{T-1} = F_T(\tilde{X}_T) \leq \tilde{X}_T$, т.е. $\tilde{X}_{T-1} > \tilde{X}_{T-1}^*$ и т.д. Лемма доказана.

В силу доказанной леммы проблема согласования параметров модели обеспечивающий устойчивый рост сводится к проверке условия следствия 1. При этом в леммах 6, 7 происходят следующие изменения. Значение объема инвестиций $V_T = L\tilde{X}_T$, зависят от T. Значения $Z = v_1^t$ начиная с которого функция $Q_t(Z)$ не увеличивается, будут зависеть от t. Причем последовательность v_1^t не возрастает. В уравнении (36) функция $Q(Z)$ заменяется на $Q_T(Z)$, после чего лемма 5 остается справедливой. В уравнении (40) функция $Q(Z)$ заменяется на $Q_t(Z)$. После чего лемма 6 остается справедливой для $\tilde{X}^* = \tilde{X}_t^*$. В частности, неравенство (41) будет иметь вид: $0 < \tilde{X}_t^* \leq \tilde{X}_T^*, t = 1,...,T$, что согласуется с леммой 7.

Лемма 10. Достаточным условием неубывания последовательность функций $Q_t(Z)$ является условие $\mu_T \geq \mu^*$, где μ^* определяется из условий:

$$\partial Q(Z, p + p^0\mu, c + c^0\mu, e + e^0\mu) /$$
$$/ \partial(p^0, c^0, e^0) > 0 \forall Z \in [0, V_T], \forall \mu \in [0, \mu^*].$$

Доказательство следует из возрастания функции $Q(Z, p + p^0\mu, c + c^0\mu)$ по μ в условиях леммы на отрезке $[0, \mu^*]$ для любого $Z \in [0, V_T]$ и неубывания последовательности μ_t.

Полученные достаточные условия неубывания последовательности функций $Q_t(Z)$ используют производные по направлению функции дохода, определяемые по формулам, предложенным в работе [6] и последующих работах по дифференциальным свойствам функции связанного максимума (см. [9, 5, 1]).

9. Модельный пример

Рассмотрим следующий модельный пример решения задачи согласования параметров инвестиций для предприятия монополиста. Поскольку в леммах 6-10 ничего не требуется от функции Q, кроме непрерывности и ограниченности, то полученные достаточные условия роста можно применить и к квадратичнским функциям дохода, изученным в работе [13]:

$$Q(Z) = max_{x,y} \left\langle -G^{-1}x + P - c, x \right\rangle - C_0,$$

где максимум берется при ограничениях:

$$\begin{cases} Ax \le b + y;\ y \ge 0; \\ 0 \le x \le D(c);\ \langle y, e \rangle \le Z \end{cases}.$$

Пример 1. В модельном примере монополии в работе [13], в котором были приняты следующие значения экзогенных параметров:

$$i = 0,186 = 18,6\%, g = 0,12 = 12\%,$$
$$L = 0,5, v_1 = 230, A_0 = a = \nu = l = 0,$$

была фактически построена кусочно-квадратичная функция дохода:

$$q(v) = -C_0 + \begin{cases} -13,33(1 - 0,01v)^2 + 653,75; \\ v \le v_0 = 44,63; \\ -0,66(1 - 0,0043v)^2 - \\ -5,59(1 - 0,0046v)^2 653,75; \\ v_0 \le v \le v_1; \\ 653,75;\ v \ge v_1 = 230. \end{cases} \quad (42)$$

где $C_0 = 600$ – постоянные расходы компании.

Пример 2. Найдем параметры режима роста в условиях примера 1.

Для функции (42) $q(0) = 40,42 > 0$ и условие леммы 6 выполнено. Решая численно уравнения (36), (40), находим:

$$X^* \approx 211,7;\ X_T^* \approx 263,3;\ V_T =$$
$$= LX_T^* \approx 131,8;\ \varepsilon^* \approx 0,24 = 24\%.$$

В табл. 1 приведено изменение стоимости собственного капитала компании в режиме устойчивого роста для $t = 0,1,...,9$ в обратном времени.

Таблица 1

ДИНАМИКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ МОНОПОЛИИ В РЕЖИМЕ РОСТА

t	X_{T-t}	LX_{T-t}	$q(LX_{T-t})$
0	263,30	131,65	52,76
1	253,66	126,83	52,64
2	245,83	122,91	52,55
3	239,47	119,73	52,47
4	234,30	117,15	52,40
5	230,09	115,05	52,34
6	226,67	113,34	52,30
7	223,89	111,95	52,26
8	221,63	110,81	52,23
9	219,79	109,89	52,20

При этом рост за 9 лет в прямом времени составил $19,8\%$, что дает в среднем $2,2\%$ в год при потенциале относительного роста $\varepsilon^* = 24\%$.

10. Практическое использование полученных условий роста

В силу неконструктивности условий леммы 10 интересно получить какие-то ориентиры в выборе величины μ^*. Заменяя функцию дохода ее верхней оценкой, получим неравенство: $Q_t(Z) \le \bar{Q}_t(Z) = \langle p_t - c_t, D - Gp_t \rangle - C_0$. И при $p_t \uparrow t$ и $p_t - c_t \ge 0$ функция $\bar{Q}_t(Z) \uparrow t$ до некоторого t_0 и убывает после t_0. Таким образом, если $t_0 > T$, то условия неубывания последовательности функций $\bar{Q}_t(Z)$ выполнены. Таким образом, достаточными при такой замене являются условия $p_t - c_t \ge 0$ и $t_0 > T$. При этом $p_t = p + p^0\mu_t, c_t = c + c^0\mu_t$, где $\mu_t \uparrow t$ – предполагаемая инфляция нарастающим итогом. Например, если $p^0 = p, c^0 = c$, то $\mu^* = \langle p - c, D - 2Gp \rangle / / \langle p - c, Gp \rangle$ и $t_0 > T$ эквивалентно $\mu_T < \mu^*$, т.е. инфляция за прогнозный период не слишком большая.

В общем случае нужно использовать формулу:

$$\mu^* = \frac{\langle p^0 - c^0, D - Gp \rangle - \langle p - c, Gp^0 \rangle}{\langle p^0 - c^0, Gp^0 \rangle}.$$

Возможен случай, когда $Q_t(Z) = \bar{Q}_t(Z) = \langle p_t - c_t, D - Gp_t \rangle - C_0, \forall Z \in [0, V_T]$. Это происходит когда $A(D - Gp) \le b$, но нужно понимать, что это соответствует случаю, когда инвестиции не приносят результата, потому что произведенный дополнительно товар не найдет спроса.

ВЫВОДЫ

В заключении отметим, что в настоящей работе предложена практически значимая методика согласований параметров инвестиций, обеспечивающих устойчивый рост собственного капитала компании и получены оценки темпа роста и общего потенциала относительного роста компании. Для решения уравнений (36), (40), определяющих базовые параметры режима роста, было предложено воспользоваться методом деления пополам отрезка $[0, \hat{X}_T^*]$, где величина $\hat{X}_T^*$ была определена в (35). При этом значение функции $Q(L\tilde{X})$ на каждом шаге находится при помощи решения задачи линейного программирования (32), (33) большой размерности. Задача (32), (33) допускает декомпозицию:

$$R(y) = max_x \langle p - c, x \rangle - \\ -C_0 \to max_y, \langle y, e \rangle \le Z, y \ge 0, \quad (43)$$

где внутренний максимум по x берется при ограничениях:

$$\begin{cases} Ax \le b + y; \\ 0 \le x \le D(p). \end{cases} \quad (44)$$

Переходя к двойственной задаче во внутренней задаче максимизации можно свести задачу (43), (44) к максиминной задаче с распадающимися переменными, которую можно решить методом проекции субградиентов, однако этому мешает сложность проектирования на множество допустимых решений y внешней задачи максимизации. Такие задачи с ограничениями типа неравенств лучше решать комбинированным методом субградиентов (см. [15]).

Литература

1. Ашманов С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях [Текст] / С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. – М. : Наука, 1991.
2. Брусов П.Н. и др. Стоимость и структура капитала в компании в post Модильяни-Миллеровскую эпоху [Текст] / П.Н. Брусов, Т.В. Филатова, Н.П. Орехова, П.П. Брусов, А.П. Брусова // Финансовая аналитика. – 2011. – №37. – С. 2-12.
3. Виленский П.Л. и др. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика [Текст] / П.Л. Виленский, В.Н. Лифшиц, С.А. Смоляк. – М. : Дело, 2004.
4. Дамодаран А. Инвестиционная оценка. Инструменты и методы оценки любых активов [Текст] / А. Дамодаран ; пер. с англ. – 6-е изд. – М. : Альпина паблишерз, 2010.
5. Завриев С.К. Метод стохастического обобщенного градиента для решения минимаксных задач со связанными переменными [Текст] / С.К. Завриев, А.Г. Перевозчиков // Ж-л вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т. 29 ; №4. – С. 491-500.
6. Макаров В.Л. Математическая теория экономической динамики и равновесия [Текст] / В.Л. Макаров, Ф.М. Рубинов. – М. : Наука, 1973.
7. Мезоэкономика: мезоэкономика развития [Текст] / под ред. Г.Б. Клейнера. – М. : Наука. 2011.
8. Методология (2003-2005): методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст] / Deloitte&Touche. – декабрь 2003 – март 2005.
9. Минченко Л.И. Дифференциальные свойства функции максимума при связанных ограничениях [Текст] / Л.И. Минченко // Ж-л вычисл. матем. и матем. физ. – 1984. – Т. 24 ; №2. – С. 210-217.
10. Мищенко А.В. Модели управления производственно-финансовой деятельностью предприятия в условиях привлечения заемного капитала [Текст] / А.В. Мищенко, О.А. Артеменко // Финансовая аналитика. – 2012. – №42.
11. Перевозчиков А.Г. Нестационарная модель инвестиций в основные средства предприятия [Текст] / А.Г. Перевозчиков, И.А. Лесик // Прикладная математика и информатика: тр. факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова / под ред. В.И. Дмитриева. – М. : МАКС Пресс, 2014. – №46. – С. 76-88.
12. Перевозчиков А.Г. Простейшая нестационарная модель инвестиций в основные средства предприятия [Текст] / А.Г. Перевозчиков, И.А. Лесик // Аудит и финансовый анализ. – 2015. – №3. – С. 291-294.
13. Перевозчиков А.Г. Определение оптимальных объемов производства и цен реализации в линейной модели многопродуктовой монополии / А.Г. Перевозчиков, И.А. Лесик [Текст] // Экономика и математические методы. – 2016. – Т. 52; №1. – С.140-148.
14. Перевозчиков А.Г. Смешанная модель DDM и CAPM для оценки стоимости некотируемых активов [Текст] / А.Г. Перевозчиков, С.А. Смирнов // Экономика и математические методы. – 2004. – Т. 4 ; №3. – С. 118-123.
15. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию [Текст] / Б.Т. Поляк. – М. : Наука, 1983.
16. Федоров В.В. Численные методы максимина [Текст] / В.В. Федоров. – М. : Наука, 1979.

Ключевые слова

Динамическая модель инвестиций; текущая стоимость собственного капитала; финансирование инвестиций; оптимальные остатки по кредитной линии.

Перевозчиков Александр Геннадьевич
E-mail: pere501@yandex.ru

Лесик Александра Ильинична
E-mail: lesik56@mail.ru

РЕЦЕНЗИЯ

Предлагается алгоритм определения остатков по кредитной линии, максимизирующих текущую стоимость собственного капитала компании за счет инвестиций в основные средства. Данная статья основывается на работе [10]. В отличие от модели Мищенко-Артеменко, где исследован случай планирования на один период, изучается произвольный конечный горизонт планирования.

Работа является дальнейшим развитием динамической модели инвестиций, изученной в работе [11] в части учета ограничений по предельному левериджу, определяющему приемлемый уровень финансовой устойчивости компании, использующей долгосрочные займы. Выведено рекуррентное уравнение для оптимальных остатков по кредитной линии, получены достаточные условия существования режима устойчивого роста компании и оценки темпов роста. В заключение рассматриваются проблемы учета инфляции в прогнозном периоде. Получены условия согласования параметров модели обеспечивающих рост, использующие производные по направлению функции дохода, определяемые по формулам, предложенным в работе [6] и последующих работах по дифференциальным свойствам функции связанного максимума.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.Г. Перевозчикова, А.И. Лесик может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н., профессор кафедры бухгалтерского учета, анализа и финансов, проректор по научной работе Тверской государственной сельскохозяйственной академии, г. Тверь.