9.6. О КОРРЕКТНОМ ПРИМЕНЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ПРОГРЕССИЙ ФИШБЕРНА ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ГИББСА–ДЖЕЙНСА

Сигал А.В., д.э.н., доцент, профессор, кафедра бизнес-информатики и математического моделирования;
Ремесник Е.С., преподаватель, кафедра бизнес-информатики и математического моделирования

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, г. Симферополь

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ

В статье рассматриваются последовательности, удовлетворяющие линейным отношениям порядка, называемые обобщенными прогрессиями Фишберна, и их свойства. Приведены и доказаны утверждения о значениях параметров обобщенных прогрессий Фишберна, максимизирующих значение энтропии Шеннона. Эти утверждения и обосновывают корректность принятия управленческих решений в условиях третьей информационной ситуации, когда значения вероятностей состояний экономической среды неизвестны и должны удовлетворять соответствующим отношениям, а лицо, принимающее решения, придерживается принципа Гиббса–Джейнса максимума энтропии.

ВВЕДЕНИЕ

А. Вальд, основоположник последовательного анализа [1], считал основной моделью теоретико-игрового принятия решений статическую модель принятия решений [13, с. 9-14], которую еще называют статистической игрой. Если закон распределения вероятностей состояний «природы», т.е. экономической среды, неизвестен, но известны некоторые соотношения между вероятностями этих состояний, то согласно классификации информационных ситуаций (ИС), предложенной Р.И. Трухаевым [13, с. 13], имеет место третья ИС. Принимая решения в поле третьей ИС, целесообразно использовать некоторые упрощенные формулы оценки неизвестных вероятностей состояний экономической среды, что позволяет в процессе принятия управленческих решений эффективно применять конструктивные методы теории вероятностей и математической статистики.

Третья ИС характеризуется заданием так называемых отношений порядка для возможных значений вероятностей состояний экономической среды. Р.И. Трухаев указывает: «Определенный тип отношения порядка задается органом принятия решения ***Y*** на основе имеющейся в его распоряжении информации, его опыта, интуиции и условий обстановки принятия решений. Установление отношений порядков является более естественной и простой операцией, имитирующей опыт и знания органа управления, чем непосредственный расчет распределения вероятностей» [13, с. 77].

Итак, в поле третьей ИС на основе вербальной (или статистической) информации можно на качественном уровне установить приоритетность (отношения порядка) состояний экономической среды. Это означает, что для каждой пары состояний экономической среды можно указать, какое из них имеет больший приоритет (собственно, характеризуется бóльшим значением вероятности своей реализации) или что они являются эквивалентными (имеют одинаковую вероятность своей реализации). Кроме того, следует учитывать, что компоненты вектора, характеризующего распределение вероятностей возможных состояний экономической среды, обязаны удовлетворять следующим основным требованиям: условию нормировки и требованиям неотрицательности всех вероятностей.

Наиболее важными типами отношений порядка на компонентах вектора априорного распределения вероятностей возможных состояний экономической среды являются следующие два отношения порядка: простое линейное отношение порядка и частично усиленное линейное отношение порядка. Эти отношения порядка были подробно изучены П. Фишберном [15-17] и приведены, например, в монографии Р.И. Трухаева [13, с. 77-80]. Заметим, что Р.И. Трухаев применял написание фамилии П. Фишберна через букву «о»: Фишборн. Однако, начиная с 1978 г., когда в СССР был издан перевод [14] на русский язык монографии [18] этого автора, в русскоязычной литературе принято написание этой фамилии через букву «е»: Фишберн.

Формулы, предложенные Фишберном и приведенные в монографии Р.И. Трухаева [13, с. 77-80], можно, например, применять для вычисления значений компонент априорного распределения вероятностей возможных состояний фондового рынка, что, как показано в работе А.В. Сигала [10], позволяет приводить обобщенные модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля, заданные в поле третьей ИС, к классической модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля. В работе А.В. Сигала [10] рассматриваются две основные обобщенные модели Марковица задачи поиска эффективного портфеля в поле третьей ИС: одна – с простым линейным отношением порядка, другая – с частично усиленным линейным отношением порядка. В работе А.В. Сигала [10] обоснована корректность приведения обобщенных моделей Марковица в поле третьей ИС к классической модели Марковица на основе оценки значений вероятностей значениями элементов соответствующей обобщенной прогрессии Фишберна.

В статье последовательности, обобщающие формулы, предложенные Фишберном–называются обобщенными прогрессиями Фишберна. Цель статьи – разработка утверждений о значениях параметров (разности арифметической прогрессии и знаменателя геометрической прогрессии) обобщенных прогрессий Фишберна, максимизирующих значение энтропии Шеннона. Применение обобщенных прогрессий Фишберна со значениями параметров, позволяющих максимизировать значение энтропии Шеннона, означает корректное принятие управленческих решений в экономике в случаях, когда лицо, принимающее решения, придерживается принципа Гиббса–Джейнса максимума энтропии.

Сразу отметим, что формулы, предложенные Фишберном и приведенные в монографии Р.И. Трухаева [13, с. 77-80], для вычисления значений членов последовательностей, удовлетворяющих соответствующим линейным отношениям порядка, применяются не только для оценки значений компонент априорного распределения вероятностей возможных состояний экономической среды. В частности, эти формулы часто применяют для вычисления оценок значений удельных весов критериев или показателей, рассматриваемых при принятии решений в экономике и техники.

Например, А.О. Недосекиным [4] была предложена нечетко-множественная модель корпоративного финансового менеджмента, в которой для комплексной оценки финансового состояния предприятия разработаны две системы весов для свертки отдельных элементов матрицы в единый комплексный показатель, при этом в качестве одной из этих систем им предложена система весов Фишберна, т.е. коэффициентов, вычисляемых согласно так называемой первой формуле Фишберна [4, с. 14]. Д.К. Потапов и В.В. Евстафьева, анализируя в работе [5] различные методики определения весовых коэффициентов на примере конкретных коммерческих банков, рассматривают, в частности, определение весов с помощью шкалы Фишберна, основанной на первой формуле Фишберна. А А.Е. Сазонов, Г.С. Осипов и В.Д. Клименко в своей статье [7] предлагают использовать первую формулу Фишберна для построения нечетких множеств с целью оценки уровня совершенства систем управления безопасностью морских судов. Эти и другие исследования, в которых используются точечные оценки Фишберна, свидетельствуют о том, что эти формулы представляют определенный интерес для математического моделирования социально-экономических и технических систем, процессов и явлений, в частности, для принятия управленческих решений в экономике.

Последовательности, удовлетворяющие линейным отношениям порядка

Введем следующие обозначения: $q=(q_1; q_2; ...; q_j; ...; q_n)$ – вектор априорного распределения вероятностей возможных состояний экономической среды, для компонент которого не известны их точные истинные значения; $\hat{q}_1,\ \hat{q}_2, ...,\ \hat{q}_j, ...,\ \hat{q}_n$ – оценки неизвестных значений компонент вектора $q=(q_1; q_2; ...; q_j; ...; q_n)$, найденные по формулам Фишберна или по формулам, обобщающим формулы Фишберна (собственно, по формулам вычисления членов соответствующей обобщенной прогрессии Фишберна).

Простым линейным отношением порядка называют соотношения, которым должны удовлетворять значения членов последовательности, выражающиеся неравенствами $q_1 \ge q_2 \ge ... \ge q_j \ge ... \ge q_n$ или $q_1 \le q_2 \le ... \le q_j \le ... \le q_n$.

Частично усиленным линейным отношением порядка называют соотношения, которым должны удовлетворять значения членов последовательности, выражающиеся неравенствами $q_j \ge q_{j+1} + ... + q_n$, $j=\overline{1, n-1}$, или $q_j \ge q_1 + ... + q_{j-1}$, $j=\overline{2, n}$.

Усиленным линейным отношением порядка называют соотношения, которым должны удовлетворять значения членов последовательности, выражающиеся неравенствами $q_{j+1} + ... + q_{j+\alpha(j)} \le q_j \le q_{j+1} + ... + q_{j+\alpha(j)} + q_{j+\alpha(j)+1}$, $j=\overline{1, n-2}$, $\alpha(j) \in \{1; 2; ...; n-1-j\}$, или $q_{j-\alpha(j)} + ... + q_{j-1} \le q_j \le q_{j-\alpha(j)-1} + q_{j-\alpha(j)} + ... + q_{j-1}$, $j=\overline{3, n}$, $\alpha(j) \in \{1; 2; ...; j-2\}$, где $\alpha(j)$ – заданные натуральные числа, принимающие значения из указанных множеств.

Однородным линейным отношением порядка называют соотношения, которым должны удовлетворять значения членов последовательности, выражающиеся неравенствами $A \cdot q^T \le q^T \le B \cdot q^T$, где A, B – заданные неотрицательные матрицы, т.е. $A = A_{n\times n} = (a_{ij})$, $a_{ij} \ge 0$, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, n}$, $B = B_{n\times n} = (b_{ij})$, $b_{ij} \ge 0$, $i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, n}$.

Полным линейным отношением порядка называют соотношения, которым должны удовлетворять значения членов последовательности, выражающиеся неравенствами $A \times q^T + a \le q^T \le B \times q^T + b$, где A, B – заданные квадратные матрицы соответствующего порядка; a, b – заданные векторы-столбцы соответствующей размерности.

Очевидно, однородное линейное отношение порядка можно представить в покомпонентном виде: $\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} \times q_j) \le q_i \le \sum_{j=1}^{n}(b_{ij} \times q_j)$, $i=\overline{1, n}$. Частным случаем общего линейного отношения порядка является интервальное отношение порядка, согласно которому справедливы соотношения $a_j \le q_j \le b_j = a_j + \varepsilon_j$, $j=\overline{1, n}$, где a_j, b_j – заданные числа такие, что $a_j > 0$, $j=\overline{1, n}$, $\varepsilon_j = b_j - a_j \ge 0$, $j=\overline{1, n}$.

Как отмечает Р.И. Трухаев, «линейные отношения порядка приведены в порядке возрастания общности. Например, простое и усиленное линейные отношения порядка содержатся в однородном при соответствующем задании матриц A и B» [13, с. 78]. Р.И. Трухаев приводит основные точечные оценки распределения априорных вероятностей состояний экономической среды в поле третьей ИС, т.е. для приведенных выше отношений порядка [13, с. 84-85]. Эти оценки распределения априорных вероятностей состояний экономической среды в монографии Р.И. Трухаева названы «точечными оценками Фишборна», т.е. оценками Фишберна. Р.И. Трухаев отмечает, что «Фишборн основывал свои оценки неконструктивным способом на основе аксиом теории аддитивной полезности» [13, с. 85]. Формулы Фишберна позволяют простым и естественным способом вычислить оценки значений вероятностей состояний экономической среды, если для этих вероятностей задан тот или иной вектор приоритетов, т.е. то или иное отношение порядка.

Для случая простого линейного отношения порядка П. Фишберн предложил считать, что величины (оценки) $\hat{q}_j$ образуют арифметическую прогрессию, а для случая частично усиленного линейного отношения порядка – монотонную геометрическую прогрессию. Если соответствующие последовательности представляют собой убывающие прогрессии, то формулы:

$$\hat{q}_j = \frac{2\times(n-j+1)}{n\times(n+1)},\ j=\overline{1, n}, \tag{1}$$

и

$$\hat{q}_j = \frac{2^{n-j}}{2^n-1},\ j=\overline{1, n}, \tag{2}$$

принято называть первой и второй формулой Фишберна, соответственно. Формулы (1) и (2) приведены, например, в монографии Р.И. Трухаева [13, с. 84], где они называются «точечными оценками Фишборна» для соответствующего линейного отношения порядка.

Предварительно отметим некоторые характерные свойства прогрессий (1) и (2). Последовательность (1) является строго убывающей арифметической прогрессией, разность которой равняется числу

$x=-\frac{2}{n\times(n+1)}$, при этом выполняется равенство $\hat{q}_n=\frac{2}{n\times(n+1)}=-x=|x|$. Последовательность (2) является строго убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой равняется числу $x=0,5$, при этом выполняется равенство $\hat{q}_{n-1}-\hat{q}_n=\hat{q}_{n-1}-\hat{q}_{n-1}\times0,5=\hat{q}_{n-1}\times0,5=\hat{q}_n=\frac{1}{2^n-1}$. Последовательности, задаваемые первой и второй формулами Фишберна, назовем арифметическими и геометрическими прогрессиями Фишберна, соответственно. Сформулируем строгое определение вводимых понятий.

Прогрессией Фишберна будем называть последовательность $\left\{\hat{q}_j\right\}_{j=1}^n$, заданную формулой (1) или (2): арифметической прогрессией Фишберна – последовательность, заданную формулой (1), геометрической прогрессией Фишберна – последовательность, заданную формулой (2).

Очевидно, для всех членов произвольной прогрессии Фишберна выполняется условие нормировки: $\sum_{j=1}^{n}\hat{q}_j=1$, значения всех членов соответствующей прогрессии Фишберна однозначно определяются значением количества n членов этой прогрессии и являются положительными числами. Приведем примеры арифметических прогрессий Фишберна (табл. 1) и геометрических прогрессий Фишберна (табл. 2) для нескольких первых значений n.

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК, НАЙДЕННЫХ ПО ПЕРВОЙ ФОРМУЛЕ ФИШБЕРНА

n	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-	-	-
3	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	-	-
4	0,4	0,3	0,2	0,1	-
5	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

Таблица 2

ЗНАЧЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК, НАЙДЕННЫХ ПО ВТОРОЙ ФОРМУЛЕ ФИШБЕРНА

n	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	–	–	–
3	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	–	–
4	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	–
5	$\frac{16}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{31}$

Непосредственно из формулы (2) для значений членов геометрической прогрессии Фишберна следуют соотношения $\lim_{n\to+\infty}\hat{q}_j=0,5^j$, $j\in N$.

Рассмотрим ситуацию, когда соответствующие последовательности представляют собой возрастающие прогрессии. В этом случае приведенные формулы Фишберна принимают следующий вид:

$$\hat{q}_j=\frac{2\times j}{n\times(n+1)},\ j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$\hat{q}_j=\frac{2^{j-1}}{2^n-1},\ j=\overline{1,n}. \tag{4}$$

Очевидно, разность возрастающей арифметической прогрессии (3) равна $x=\frac{2}{n\times(n+1)}$, при этом выполняется равенство $\hat{q}_1=\frac{2}{n\times(n+1)}=x$. Знаменатель возрастающей геометрической прогрессии (4) равен $x=2$, откуда $\hat{q}_2-\hat{q}_1=\hat{q}_1*2-\hat{q}_1=\hat{q}_1=\frac{1}{2^n-1}$.

В основе формул (1) и (3) лежит равенство $\sum_{j=1}^{n}2\times j=n\times(n+1)$, позволяющее значениям оценок вероятностей, найденным по этим удобным и простым формулам, удовлетворять условию нормировки. Аналогично, в основе формул (2) и (4) лежит равенство $\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}=2^n-1$.

В экономических исследованиях принято считать, что формула (1) отражает тот факт, что об уровне значимости альтернатив (возможных состояний экономической среды; моделируемых систем; рассматриваемых показателей; анализируемых проектов и т.п.) неизвестно ничего, кроме того, что они расположены по порядку убывания значимости. Формула (2) отражает тот факт, что уровень значимости очередной альтернативы не меньше, совокупного (суммарного) уровня значимости всех предшествующих альтернатив, вместе взятых. Аналогично можно интерпретировать формулы (3) и (4). Заметим, в определенных ситуациях применение формул (3) и (4) предпочтительнее применения формул (1) и (2). Например, при исследовании динамических рядов, когда натуральные значения индекса j задают дискретные моменты времени, применение формул (3) и (4) явно предпочтительнее применения соответствующих формул (1) и (2). Во-первых, в связи с тем, что, как правило, ситуация, сложившаяся в предшествующий момент времени, более удаленный от настоящего момента времени, оказывает на нынешнюю ситуацию меньшее влияние, чем ситуация, сложившаяся в предшествующий момент времени, более приближенный к настоящему моменту времени. Во-вторых, по причине нежелательности перенумерации, упорядоченных хронологически, дискретных моментов времени.

Формулы (1) и (3), как, соответственно, и формулы (2) и (4), несложно обобщить на случай монотонных прогрессий, удовлетворяющих лишь условию нормировки и требованиям неотрицательности всех членов прогрессии, а именно соотношениям:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{q}_j = 1, \qquad (5)$$

$$\hat{q}_j \ge 0, \; j = \overline{1, n}. \qquad (6)$$

Обобщенной прогрессией Фишберна будем называть прогрессию $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^{n}$, удовлетворяющую всем ограничениям (5) и (6): обобщенной арифметической прогрессией Фишберна – арифметическую прогрессию, удовлетворяющую всем ограничениям (5) и (6), обобщенной геометрической прогрессией Фишберна – геометрическую прогрессию, удовлетворяющую всем ограничениям (5) и (6).

Свойства обобщенных арифметических прогрессий Фишберна

Сразу отметим одну особенность обобщенных арифметических прогрессий Фишберна, отличающую их от прогрессий Фишберна: значения членов произвольной прогрессии Фишберна всегда являются только положительными числами, в то время как некоторые члены отдельных обобщенных арифметических прогрессий Фишберна могут принимать нулевые значения.

Теорема 1. Обобщенная арифметическая прогрессия Фишберна представляет собой арифметическую прогрессию вида $\hat{q}_j = \frac{1}{n} - \frac{(n-1)\times x}{2} + (j-1)\times x$ или $\hat{q}_j = \frac{2 - n\times(n - 2\times j + 1)\times x}{2\times n}$, $j = \overline{1, n}$, разность которой удовлетворяет соотношениям $|x| \le \frac{2}{n\times(n-1)}$.

Доказательство. Пусть числа $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_j, \dots, \hat{q}_n$ образуют арифметическую прогрессию, удовлетворяющую всем ограничениям (5) и (6). Тогда из условия (5) нормировки для суммы S_n первых членов арифметической прогрессии получаем равенство $S_n = 1$, т.е. $\frac{2\times\hat{q}_1 + (n-1)\times x}{2} \times n = 1$, откуда $\hat{q}_1 = \frac{1}{n} - \frac{(n-1)\times x}{2} = \frac{2 - n\times(n-1)\times x}{2\times n}$.

Очевидно, для справедливости требований (6) неотрицательности всех членов арифметической прогрессии необходима и достаточна справедливость двух неравенств $\hat{q}_1 \ge 0$ и $\hat{q}_n \ge 0$, т.е. $\hat{q}_1 = \frac{1}{n} - \frac{(n-1)\times x}{2} \ge 0$ и $\hat{q}_n = \frac{1}{n} + \frac{(n-1)\times x}{2} \ge 0$, откуда получаем, что требования (6) неотрицательности всех членов арифметической прогрессии справедливы тогда и только тогда, когда выполняются соотношения:

$$-\frac{2}{n\times(n-1)} \le x \le \frac{2}{n\times(n-1)},$$

т.е.

$$|x| \le \frac{2}{n\times(n-1)}. \qquad (7)$$

Таким образом, обобщенная арифметическая прогрессия Фишберна задается соотношениями:

$$\hat{q}_j = \frac{1}{n} - \frac{(n-1)\times x}{2} + (j-1)\times x = \frac{2 - n\times(n - 2\times j + 1)\times x}{2\times n}, \; j = \overline{1, n}, \qquad (8)$$

где значение разности x обобщенной арифметической прогрессии Фишберна удовлетворяет соотношениям (7), ч.т.д.

Сформулируем простейшие свойства последовательности $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_j, \dots, \hat{q}_n$, образующей обобщенную арифметическую прогрессию Фишберна:

- разность арифметической прогрессии (8) обязана удовлетворять соотношениям (7);
- первый член арифметической прогрессии (8) равен $\hat{q}_1 = \frac{1}{n} - \frac{(n-1)\times x}{2} = \frac{2 - n\times(n-1)\times x}{2\times n}$;
- если разность арифметической прогрессии (8) удовлетворяет соотношениям $-\frac{2}{n\times(n-1)} \le x < 0$, то обобщенная арифметическая прогрессия Фишберна строго убывает;
- если разность арифметической прогрессии (8) равна числу $x = -\frac{2}{n\times(n-1)}$, то $\hat{q}_j = \frac{2\times(n-j)}{n\times(n-1)}$, $j = \overline{1, n}$, при этом $\hat{q}_1 = \frac{2}{n}$, $\hat{q}_n = 0$;
- если разность обобщенной арифметической прогрессии Фишберна равна числу $x = -\frac{2}{(n+1)\times n}$, то члены $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_j, \dots, \hat{q}_n$ обобщенной арифметической прогрессии Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию (1), т.е. арифметическую прогрессию Фишберна;
- если разность обобщенной арифметической прогрессии Фишберна равна числу $x = -\frac{1}{n\times(n-1)}$, то $\hat{q}_j = \frac{3\times n - 2\times j - 1}{n\times(n-1)}$, $j = \overline{1, n}$, при этом $\hat{q}_1 = \frac{3}{n}$, $\hat{q}_n = \frac{1}{n}$;
- если разность арифметической прогрессии (8) равна нулю ($x = 0$), то обобщенная арифметическая прогрессия Фишберна представляет собой равномерное

распределение, т.е. постоянную величину: $\hat{q}_j = \hat{q}_j^* = \frac{1}{n} \equiv const$, $j = \overline{1, n}$;

- если разность арифметической прогрессии (8) удовлетворяет соотношениям $0 < x \le \frac{2}{n \times (n-1)}$, то обобщенная арифметическая прогрессия Фишберна строго возрастает;
- если разность обобщенной арифметической прогрессии Фишберна равна числу $x = \frac{1}{n \times (n-1)}$, то $\hat{q}_j = \frac{n + 2 \times j - 3}{n \times (n-1)}$, $j = \overline{1, n}$, при этом $\hat{q}_1 = \frac{1}{n}$, $\hat{q}_n = \frac{3}{n}$;
- если разность арифметической прогрессии (8) равна числу $x = \frac{2}{n \times (n-1)}$, то $\hat{q}_j = \frac{2 \times (j-1)}{n \times (n-1)}$, $j = \overline{1, n}$, при этом $\hat{q}_1 = 0$, $\hat{q}_n = \frac{2}{n}$;
- если разность обобщенной арифметической прогрессии Фишберна равна числу $x = \frac{2}{(n+1) \times n}$, то члены $\hat{q}_2, \hat{q}_3, ..., \hat{q}_j, ..., \hat{q}_{n+1}$ обобщенной арифметической прогрессии Фишберна $\left\{\hat{q}_j\right\}_{j=1}^{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию (3);
- члены произвольной обобщенной арифметической прогрессии Фишберна обязательно удовлетворяют соответствующему простому линейному отношению порядка.

Свойства обобщенных геометрических прогрессий Фишберна

Перейдем к рассмотрению обобщенных геометрических прогрессий Фишберна.

Теорема 2. Обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна представляет собой геометрическую прогрессию вида $\hat{q}_j = \frac{x-1}{x^n - 1} \times x^{j-1}$, $j = \overline{1, n}$, знаменатель которой удовлетворяет соотношению $x > 0$.

Доказательство. Пусть числа $\hat{q}_1, \hat{q}_2, ..., \hat{q}_j, ..., \hat{q}_n$ образуют геометрическую прогрессию, удовлетворяющую всем ограничениям (5) и (6). Тогда из условия (5) нормировки для суммы S_n первых членов геометрической прогрессии получаем равенство $S_n = 1$, т.е. $\hat{q}_1 \times \frac{x^n - 1}{x - 1} = 1$, откуда $\hat{q}_1 = \frac{x-1}{x^n - 1}$.

Очевидно, для справедливости требований (6) неотрицательности всех членов геометрической прогрессии необходима и достаточна справедливость двух неравенств $\hat{q}_1 \ge 0$ и $x > 0$, т.е. $\hat{q}_1 = \frac{x-1}{x^n - 1} \ge 0$ и $x > 0$. Если $x > 0$, то неравенство $\frac{x-1}{x^n-1} \ge 0$ выполняется автоматически, откуда получаем, что требования (6) неотрицательности всех членов обобщенной геометрической прогрессии Фишберна справедливы тогда и только тогда, когда выполняется соотношение:

$$x > 0. \qquad (9)$$

Отдельно следует исследовать вырожденный случай, когда знаменатель геометрической прогрессии (10) равен единице ($x = 1$). В этом случае для поиска значения первого члена геометрической прогрессии можно выполнить предельный переход. При этом для раскрытия неопределенности (вида отношения бесконечно малых величин) в соответствующем пределе можно применить правило Лопиталя:

$$\hat{q}_1 = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^n - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)'}{(x^n - 1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{n \times x^{n-1}} = \frac{1}{n \times 1^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

Следовательно, если $x = 1$, то $\hat{q}_j = \hat{q}_j^* = \frac{1}{n} \equiv const$, $j = \overline{1, n}$.

Таким образом обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна задается соотношениями:

$$\hat{q}_j = \frac{x-1}{x^n - 1} \times x^{j-1}, \ j = \overline{1, n}, \qquad (10)$$

где значение знаменателя x обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяет соотношению (9), ч.т.д.

Легко заметить, что формулы (10) широко применяются в теории массового обслуживания [2], так как, например, именно по этим формулам рассчитываются значения стационарных вероятностей состояний случайного процесса, характеризующего функционирование одноканальной системы массового обслуживания (СМО) с накопителем ограниченной емкости. Для того чтобы формулы (10) задавали значения стационарных вероятностей состояний соответствующего случайного процесса, относительно одноканальной СМО с накопителем ограниченной емкости должны выполняться следующие предположения и допущения.

Производящая функция (генератриса) для обобщенной геометрической прогрессии Фишберна, т.е. для последовательности (10), имеет следующий вид: $\phi(t) = \frac{x-1}{x^n - 1} \times t \times \frac{x^n \times t^n - 1}{x \times t - 1}$.

Входной поток требований (заявок) образует простейший поток с интенсивностью λ.

Длительность обслуживания требований распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью μ:

- СМО является системой с отказами: если единственный канал (механизм обслуживания) обслуживает одно требование и одновременно с этим $n-2$ требования ожидают своего обслуживания, находясь в накопителе, то СМО откажет очередному требованию в обслуживании, т.е. если длина очереди достигла максимально возможной длины $n-1$, то по сути очередное требование покинет СМО без обслуживания;
- длина очереди представляет собой общее количество требований в СМО, включая и обслуживаемое требование;

- дисциплина обслуживания требований, поступающих в СМО, осуществляется по правилу обслуживания очереди «первым пришел – первым обслуживаешься»;
- для рассматриваемой СМО $x = \frac{\lambda}{\mu}$ является коэффициентом загрузки.

При помощи символики обозначений Кендалла такую одноканальную СМО с накопителем ограниченной емкости можно представить четырехсимвольным обозначением в виде СМО $M/M/1/n-1$.

Сформулируем простейшие свойства последовательности $\hat{q}_1,\ \hat{q}_2,\ldots,\ \hat{q}_j,\ldots,\ \hat{q}_n$, образующей обобщенную геометрическую прогрессию Фишберна:

- знаменатель геометрической прогрессии (10) обязан удовлетворять соотношению (9), т.е. должен быть положительным числом: $x > 0$;
- первый член геометрической прогрессии (10) равен $\hat{q}_1 = \frac{x-1}{x^n-1}$;
- если знаменатель геометрической прогрессии (10) удовлетворяет соотношениям $0 < x < 1$, то обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна строго убывает;
- если знаменатель геометрической прогрессии (10) удовлетворяет соотношениям $0 < x < 1$, то формулу (10) можно преобразовать к виду, аналогичному формуле (2),

$$\hat{q}_j = \frac{x-1}{x^n-1}\times x^{j-1} = \frac{1-x}{1-x^n}\times x^{j-1} = \frac{1-x}{x^n\times\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n-1\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{x}\right)^{1-j} = \frac{1-x}{\left(\frac{1}{x}\right)^n-1}\times\left(\frac{1}{x}\right)^{n-j+1},\ j=\overline{1,n};$$

- если знаменатель геометрической прогрессии (10) равен $x = 0{,}5$, то обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна $\left\{\hat{q}_j\right\}_{j=1}^{n}$ представляет собой геометрическую прогрессию (2), т.е. геометрическую прогрессию Фишберна;
- если знаменатель геометрической прогрессии (10) равен единице ($x = 1$), то обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна представляет собой постоянную величину $\hat{q}_j = \frac{1}{n} \equiv const$, $j = \overline{1,n}$;
- если знаменатель геометрической прогрессии (10) удовлетворяет соотношениям $x > 1$, то обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна строго возрастает;
- если знаменатель геометрической прогрессии (10) равен $x = 2$, то обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна $\left\{\hat{q}_j\right\}_{j=1}^{n}$ представляет собой геометрическую прогрессию (4);
- члены строго убывающей обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют частично усиленному линейному отношению порядка $q_j \ge q_{j+1} + \ldots + q_n$, $j = \overline{1, n-1}$, тогда и только тогда, когда выполняются соотношения $x^{n-j+1} - 2\times x + 1 \ge 0$, $j = \overline{1, n-1}$, и $0 < x < 1$, что эквивалентно системе двух неравенств:

$$\begin{cases} x^n - 2\times x + 1 \ge 0, \\ 0 < x < 1; \end{cases} \qquad (11)$$

- члены строго возрастающей обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют частично усиленному линейному отношению порядка $q_j \ge q_1 + \ldots + q_{j-1}$, $j = \overline{2, n}$, тогда и только тогда, когда выполняются соотношения $x^j - 2\times x^{j-1} + 1 \ge 0$, $j = \overline{2, n}$, и $x > 1$, что эквивалентно системе двух неравенств:

$$\begin{cases} x^n - 2\times x^{n-1} + 1 \ge 0, \\ x > 1; \end{cases} \qquad (12)$$

- если $n = 2$, то члены обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют соответствующему частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда знаменатель геометрической прогрессии (10) удовлетворяет неравенству (9), т.е. когда он является положительным числом, отличным от числа 1: $x \in (0; 1)\cup(1; +\infty)$;
- если $n = 3$, то члены обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют соответствующему частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда знаменатель геометрической прогрессии (10) принадлежит множеству $x \in \left(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

Результаты расчетов значений членов обобщенных прогрессий Фишберна по формулам (8), (10) для первых значений n и некоторых значений x приведены в статье А. В. Сигала и Г. Н. Макеевой [11].

Рассмотрим еще одно обобщение понятия «геометрическая прогрессия Фишберна», введенное в статьях А.В. Сигала [8, 9]: бесконечную обобщенную геометрическую прогрессию Фишберна.

Бесконечной обобщенной геометрической прогрессией Фишберна будем называть бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, $\left\{\hat{q}_j\right\}_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяющую свойствам $\sum_{j=1}^{\infty}\hat{q}_j = 1$ и $\hat{q}_j \ge 0$, $j \in N$.

Очевидно, значение знаменателя бесконечной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна обязано удовлетворять неравенствам $0 < x < 1$. Условие нормировки позволяет выразить значение первого члена бесконечной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна через значение ее знаменателя: $\hat{q}_1 = 1 - x$. Следовательно, произвольная бесконечная обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна задается формулой $\hat{q}_j = (1-x)\times x^{j-1}$, $j \in N$, где $0 < x < 1$. Заметим, что к этим же соотношениям приводит предельный переход в формуле (10) при $n \to +\infty$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Бесконечная обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию вида $\hat{q}_j = (1-x)\times x^{j-1}$, $j \in N$, знаменатель которой удовлетворяет соотношению $0 < x < 1$.

Заметим, что, подобно формулам (10), формулы $\hat{q}_j = (1-x) \times x^{j-1}$, $j \in N$, где $0 < x < 1$, также применяются в теории массового обслуживания: по этим формулам рассчитываются, например, значения стационарных вероятностей состояний случайного процесса, характеризующего функционирование одноканальной СМО $M/M/1$ с накопителем неограниченной емкости. При этом производящая функция (генератриса) для бесконечной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна имеет следующий вид: $\phi(t) = \frac{1-x}{1-x*t} * t$, где $t \in \left(-\frac{1}{x}; \frac{1}{x}\right)$.

Сформулируем простейшие свойства последовательности $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^{\infty}$, образующей бесконечную обобщенную геометрическую прогрессию Фишберна:

- бесконечная обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию вида $\hat{q}_j = (1-x) \times x^{j-1}$, $j \in N$;
- знаменатель бесконечной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна обязан удовлетворять соотношению $0 < x < 1$;
- первый член бесконечной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна равен $\hat{q}_1 = 1 - x$.

Обобщенные прогрессии Фишберна и линейные отношения порядка

В случае оценки неизвестных значений вероятностей возможных состояний экономической среды по формулам (7-10), т.е. по формулам вычисления значений членов обобщенных прогрессий Фишберна, корректность принятия управленческих решений зависит от ответов на несколько существенных вопросов. Наиболее важными из них являются следующие два вопроса.

Удовлетворяет ли рассматриваемая обобщенная прогрессия Фишберна соответствующему линейному отношению порядка?

Удовлетворяет ли рассматриваемая обобщенная прогрессия Фишберна принципу Гиббса–Джейнса максимума энтропии?

Некоторые исследователи высказывают мнение, что формула (1) «отвечает максимуму энтропии наличной информационной неопределенности об объекте исследования» [4, с. 14]. Точку зрения, аналогичную приведенному мнению А.О. Недосекина, на энтропийный смысл формул Фишберна высказывают, например, Д.В. Рач [6] и Л.Ж. Сидоренко [12]. Но такое суждение следует признать ошибочным. В частности, хорошо известно, что если выполняется условие нормировки (5), то энтропия Шеннона $H(q) = -\sum_{j=1}^{n} q_j \times \ln q_j$ достигает своего максимального значения для равномерного распределения $q_j^* = \frac{1}{n}$, $j = \overline{1, n}$, которое, очевидно, удовлетворяет простому линейному отношению порядка. Как показано в работе В.Н. Лившица и А.В. Сигала [3], например, для $n = 5$ энтропия Шеннона равна $H(\hat{q}) \approx 1{,}48975$ для оценок $\hat{q}_j$, вычисленных по формуле (1), и $H(\hat{q}) \approx 1{,}24275$ для оценок $\hat{q}_j$, вычисленных по формуле (2), в то время как для $n = 5$ максимальное значение энтропии Шеннона равно $H(q^*) = -\sum_{j=1}^{5} \frac{1}{5} \times \ln \frac{1}{5} = \ln 5 \approx 1{,}60944$. Таким образом, предположение П. Фишберна о том, что величины (оценки) $\hat{q}_j$ образуют арифметическую прогрессию для случая линейного отношения порядка, и монотонную геометрическую прогрессию – для случая частично усиленного линейного отношения порядка, не базируется на принципе Гиббса-Джейнса максимума энтропии. Правда, это предположение П. Фишберна приводит для случая линейного отношения порядка к удобным оценкам типа оценок, определяемых формулами (1) или (3).

Вообще, как следует из свойств энтропии Шеннона, на множестве всех обобщенных прогрессий Фишберна энтропия Шеннона достигает своего безусловного максимума $H(q^*) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \times \ln \frac{1}{n} = \ln n$ для равномерного распределения, т.е. для последовательности $q_j^* = \frac{1}{n}$, $j = \overline{1, n}$, при этом постоянная величина $\hat{q}_j = q_j^* = \frac{1}{n} \equiv const$, $j = \overline{1, n}$, представляет собой частный случай как обобщенной арифметической прогрессии Фишберна, так и обобщенной геометрической прогрессии Фишберна. И, таким образом, среди всех обобщенных прогрессий Фишберна принципу максимума энтропии соответствует лишь частный случай, когда обобщенная прогрессия Фишберна вырождается в постоянную величину $\hat{q}_j = \hat{q}_j^* = \frac{1}{n} \equiv const$, $j = \overline{1, n}$.

Как отмечалось в свойстве 12 для обобщенных арифметических прогрессий Фишберна, члены произвольной обобщенной арифметической прогрессии Фишберна обязательно удовлетворяют соответствующему простому линейному отношению порядка. В случае обобщенных геометрических прогрессий Фишберна аналогичное утверждение неверно: члены произвольной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна не всегда удовлетворяют соответствующему частично усиленному линейному отношению порядка. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Если $n = 2$, то произвольная обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^{2}$ удовлетворяет соответствующему частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда значение знаменателя геометрической прогрессии (10) удовлетворяет соотношениям $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Существуют константы α_n и β_n, значения которых зависят только от номера n, где $n \in N$ и $n > 2$, такие, что произвольная обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна $\left\{\hat{q}_j\right\}_{j=1}^{n}$ удовлетворяет частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда значение знаменателя геометрической прогрессии (10) удовлетворяет соотношениям $0 < x \le \alpha_n$, т.е. $x \in \left(0;\, \alpha_n\right]$, где $0{,}5 < \alpha_n < 1$, для убывающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, или $x \ge \beta_n$, т.е. $x \in \left[\beta_n;\, +\infty\right)$, где $1 \le \beta_n < 2$, для возрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна. Последовательность $\left\{\alpha_n\right\}_{n=2}^{\infty}$ представляет собой строго убывающую ограниченную последовательность, а последовательность $\left\{\beta_n\right\}_{n=2}^{\infty}$ – строго возрастающую ограниченную последовательность, при этом $\alpha_2 = \beta_2 = 1$, $\beta_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$, $n \in N$ и $n \ge 2$, а пределы этих последовательностей равны $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0{,}5$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 2$.

Доказательство. Сначала рассмотрим убывающие обобщенные геометрические прогрессии Фишберна, т.е. геометрические прогрессии (10), знаменатель которых удовлетворяет соотношениям $0 < x < 1$. Очевидно, члены строго убывающей обобщенной геометрической прогрессии Фишберна $\left\{\hat{q}_j\right\}_{j=1}^{n}$ удовлетворяют частично усиленному линейному отношению порядка $q_j \ge q_{j+1} + \ldots + q_n$, $j = \overline{1, n-1}$, тогда и только тогда, когда выполняются соотношения $\dfrac{x-1}{x^n-1} \times x^{j-1} \ge \dfrac{x-1}{x^n-1} \times \left(x^j + x^{j+1} + \ldots + x^{n-1}\right)$, $j = \overline{1, n-1}$, что равносильно выполнению соотношений $x^{n-j+1} - 2 \times x + 1 \ge 0$, $j = \overline{1, n-1}$, и $0 < x < 1$. Покажем, что приведенная система n неравенств равносильна системе двух неравенств (11).

Если $0 < x < 1$, то справедливы неравенства $0 < x^n < x^{n-1} < \ldots < x^{n-j+1} < \ldots < x^2 < x < 1$. Следовательно, если выполняются два неравенства $0 < x < 1$ и $x^n - 2 \cdot x + 1 \ge 0$, то будут выполняться и все неравенства $x^{n-j+1} - 2 \times x + 1 \ge 0$, $j = \overline{1, n-2}$. Таким образом, члены строго убывающей обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют частично усиленному линейному отношению порядка $q_j \ge q_{j+1} + \ldots + q_n$, $j = \overline{1, n-1}$, тогда и только тогда, когда выполняются два неравенства системы (11). Если при этом через α_n обозначить корень уравнения $x^n - 2 \cdot x + 1 = 0$, то, очевидно, произвольная убывающая обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна удовлетворяет частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда значение знаменателя геометрической прогрессии (10) удовлетворяет соотношениям $0 < x \le \alpha_n$, т.е. $x \in \left(0;\, \alpha_n\right]$, и $0 < x < 1$.

Прежде, чем рассмотреть свойства последовательности $\left\{\alpha_n\right\}_{n=2}^{\infty}$, рассмотрим свойства функций $f_n(x) = x^n - 2 \times x + 1$, где $n \in N$ и $n \ge 2$. Функция $f_n(x) = x^n - 2 \times x + 1$, где $n \in N$ и $n \ge 2$, обладает следующими очевидными свойствами:

- $f_n(0) = 1$;
- $f_n(1) = 0$;
- $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} - 2$;
- $f_n''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$;
- если $x \in \left[0;\, +\infty\right)$, то $f_n(x) = x^n - 2 \cdot x + 1$ является выпуклой (вниз) функцией;
- если $x \in \left[0;\, +\infty\right)$, то $f_n(x) = x^n - 2 \cdot x + 1$ имеет единственную точку экстремума: точку минимума с координатами $\left(x_n^*;\, f\left(x_n^*\right)\right)$, где $x_n^* = \sqrt[n-1]{\dfrac{2}{n}}$, $f_n\left(x_n^*\right) = \dfrac{2 - 2 \times n}{n} \times x_n^* + 1 \le 0$, при этом $x_2^* = 1$ и $f_2\left(x_2^*\right) = 0$, а $0 < x_n^* < 1$ и $f_n\left(x_n^*\right) = \dfrac{2 - 2 \times n}{n} \times x_n^* + 1 < 0$, когда $n \in N$ и $n > 2$;
- если $x \in \left[0;\, x_n^*\right]$, то $f_n(x) = x^n - 2 \times x + 1$ является строго убывающей функцией;
- если $x \in \left[x_n^*;\, +\infty\right]$, то $f_n(x) = x^n - 2 \times x + 1$ является строго возрастающей функцией;
- если $x \in \left[0;\, 1\right]$, то при $n \in N$ и $n > 2$ уравнение $f_n(x) = 0$, т.е. $x^n - 2 \times x + 1 = 0$, имеет два решения $\alpha_n \in (0;\, 1)$, так как $0 < \alpha_n \le x_n^* < 1$, и $\alpha_n' = 1$, а при $n = 2$ уравнение $f_n(x) = 0$ имеет одно единственное решение $\alpha_2 = \alpha_2' = 1$.

Очевидно, из приведенных свойств функций $f_n(x) = x^n - 2 \times x + 1$ следует, что для любого натурального n, $n \ge 2$, справедливы соотношения $0{,}5 < \alpha_n \le 1$. Эти соотношения можно обосновать несколько иначе. Если $0 < x \le 1$, то для этого интервала значений переменной x графики функций $y = x^2$ и $y = 2 \times x - 1$ пересекаются в одной единственной точке $(1;\, 1)$, а графики функций $y = x^n$, $n > 2$, и $y = 2 \times x - 1$ пересекаются в двух точках: $\left(\alpha_n;\, 2 \times \alpha_n - 1\right)$ и $(1;\, 1)$, где $0 < \alpha_n < 1$ и $2 \times \alpha_n - 1 > 0$, откуда и получаем $0{,}5 < \alpha_n < 1$. В силу бóльшей выпуклости (вниз) графика функции $y = x^n$ по сравнению с выпуклостью графика функции $y = x^{n-1}$, т.к. $x^{n-1} > x^n$, если $0 < x < 1$, выполняются неравенства $\alpha_{n-1} > \alpha_n$ для любого натурального n, $n \ge 2$, что и означает строгое убывание значений членов последовательности $\left\{\alpha_n\right\}_{n=2}^{\infty}$.

Итак, последовательность $\{\alpha_n\}_{n=2}^{\infty}$ ограничена, так как для любого натурального n, $n \ge 2$, справедливы соотношения $0,5 < \alpha_n \le 1$, и монотонна, точнее строго убывает. Следовательно, согласно теореме Вейерштрасса об ограниченных монотонных последовательностях рассматриваемая последовательность $\{\alpha_n\}_{n=2}^{\infty}$ сходится. С учетом соотношений $0,5 < \alpha_n \le 1$ и $(\alpha_n)^n - 2 \times \alpha_n + 1 = 0$ получаем:

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n - 2 \times \lim_{n\to+\infty}\alpha_n + 1 = 0,$$

т.е.

$$0 - 2 \times \lim_{n\to+\infty}\alpha_n + 1 = 0,$$

откуда

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 0,5.$$

Теперь рассмотрим возрастающие обобщенные геометрические прогрессии Фишберна, т.е. геометрические прогрессии (10), знаменатель которых удовлетворяет соотношениям $x > 1$. Очевидно, члены строго возрастающей обобщенной геометрической прогрессии Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^{n}$ удовлетворяют частично усиленному линейному отношению порядка $q_j \ge q_1 + \ldots + q_{j-1}$, $j = \overline{1, n-1}$, тогда и только тогда, когда выполняются соотношения $x^j - 2 \times x^{j-1} + 1 \ge 0$, $j = \overline{2, n}$, и $x > 1$, что равносильно выполнению двух неравенств системы (12). Введем новую переменную $t = \frac{1}{x}$. Так как $x = \frac{1}{t}$, то для новой переменной частично усиленное линейное отношение порядка представляет собой систему неравенств: $t^j - 2 \times t + 1 \ge 0$, $j = \overline{2, n}$, $0 < t < 1$. Т.е. члены строго возрастающей обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют частично усиленному линейному отношению порядка $q_j \ge q_1 + \ldots + q_{j-1}$, $j = \overline{1, n-1}$, тогда и только тогда, когда выполняются соотношения $t^{n-j+1} - 2 \times t + 1 \ge 0$, $j = \overline{1, n-1}$, и $0 < t < 1$, где $t = \frac{1}{x}$, x – знаменатель прогрессии (10), $x > 1$. Собственно, это означает, что члены строго возрастающей обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда выполняются два неравенства $0 < t < 1$ и $t^n - 2 \times t + 1 \ge 0$, где $t = \frac{1}{x}$.

Если через β_n обозначить корень уравнения $x^n - 2 \times x^{n-1} + 1 = 0$, то произвольная возрастающая обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна удовлетворяет частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда значение знаменателя геометрической прогрессии (10) удовлетворяет соотношениям $x \ge \beta_n$, т.е. $x \in [\beta_n; +\infty)$, при этом для любого натурального n, $n \ge 2$, справедливы равенства $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$, где α_n – корень уравнения $t^n - 2 \times t + 1 = 0$. Следовательно, последовательность $\{\beta_n\}_{n=2}^{\infty}$ ограничена, так как для любого натурального n, $n \ge 2$, справедливы соотношения $1 \le \beta_n < 2$, строго возрастает и сходится к числу два, так как

$$\lim_{n\to+\infty}\beta_n = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\alpha_n} = \frac{1}{0,5} = 2.$$

Итак, если $n \in N$ и $n > 2$, то произвольная обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна удовлетворяет частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда значение знаменателя геометрической прогрессии (10) удовлетворяет соотношениям $0 < x \le \alpha_n$, т.е. $x \in (0; \alpha_n]$, где $0,5 < \alpha_n \le 1$, для убывающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, или $x \ge \beta_n$, т.е. $x \in [\beta_n; +\infty)$, где $1 \le \beta_n < 2$, для возрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, при этом последовательности $\{\alpha_n\}_{n=2}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=2}^{\infty}$ являются строго монотонными ограниченными последовательности, пределы которых равны $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = 0,5$, $\lim_{n\to+\infty}\beta_n = 2$, ч.т.д.

Отметим также, что первые члены последовательностей $\{\alpha_n\}_{n=2}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=2}^{\infty}$, соответственно, равны $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$, $\alpha_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618034$, $\beta_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$.

Интересно, что значение элемента β_3 совпало со значением отношения «золотого сечения», которое еще в античности считалось самым эстетически благоприятным отношением.

Кроме того, для любой убывающей обобщенной геометрической прогрессии Фишберна, знаменатель которой равен $x = \alpha_n$, ее первый член равен $\hat{q}_1 = \frac{\alpha_n - 1}{(\alpha_n)^n - 1} = \frac{\alpha_n - 1}{2 \times \alpha_n - 1 - 1} = 0,5$, т.к. из равенства $(\alpha_n)^n - 2 \times \alpha_n + 1 = 0$ следует, что $(\alpha_n)^n = 2 \times \alpha_n - 1$. Аналогично, для любой возрастающей обобщенной геометрической прогрессии Фишберна, знаменатель которой равен $x = \beta_n$, ее последний член равен

$$\hat{q}_n = \frac{\beta_n - 1}{(\beta_n)^n - 1} \times (\beta_n)^{n-1} = \frac{(1/\alpha_n) - 1}{(1/\alpha_n)^n - 1} \times \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{n-1} = \frac{1 - \alpha_n}{1 - (\alpha_n)^n} = 0,5.$$

Легко заметить, что для любого значения n последовательность (2) , т.е. геометрическая прогрессия Фишберна, знаменатель которой равен $x = 0,5$, удовлетворяет частично усиленному линейному отношению порядка, так как для ее знаменателя справедливо соотношение $x = 0,5 \in \left(0;\ \alpha_n\right]$. Аналогично, для любого значения n последовательность (4), т.е. обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна, знаменатель которой равен $x = 2$, удовлетворяет частично усиленному линейному отношению порядка, так как для ее знаменателя справедливо соотношение $x = 2 \in \left[\beta_n;\ +\infty\right)$.

Наконец, члены бесконечной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют частично усиленному линейному отношению порядка, т.е. отношениям $\hat{q}_j \geq \sum\limits_{i=j+1}^{\infty} \hat{q}_i$, $j \in N$, тогда и только тогда, когда $1 - x \geq x$, т.е. $0 < x \leq 0,5$ (с учетом допустимых значений знаменателя бесконечной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна). Заметим, что это свойство бесконечных обобщенных геометрических прогрессий Фишберна согласуется с пределом $\alpha_\infty = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0,5$. Очевидно, для бесконечной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна, знаменатель которой равен $x = \alpha_\infty = 0,5$, ее члены равны числам $\hat{q}_j = 0,5^j$, $j \in N$, т.е. значения членов геометрической прогрессии Фишберна стремятся на бесконечности к значениям членов бесконечной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна со знаменателем $x = \alpha_\infty = 0,5$. Несложно показать, что значение энтропии Шеннона для бесконечной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна со знаменателем $x = \alpha_\infty = 0,5$ равняется числу ln 4 ≈ 1,386294. Этот факт соответствует предельному соотношению $\lim\limits_{n \to +\infty} H\left(\hat{q}\right) = \ln 4$, обоснованному в работе В.Н. Лившица и А.В. Сигала [3] для геометрических прогрессий Фишберна.

Обобщенные прогрессии Фишберна, удовлетворяющие линейным отношениям порядка, и максимизация энтропии

Еще раз отметим, что, если выполняется условие нормировки (5), то энтропия Шеннона $H\left(q\right) = -\sum\limits_{j=1}^{n} q_j \times \ln q_j$ достигает своего максимального значения для равномерного распределения $q_j^* = \dfrac{1}{n}$, $j = \overline{1, n}$, которое, очевидно, удовлетворяет простому линейному отношению порядка. А согласно свойству 12 для обобщенных арифметических прогрессий Фишберна, члены произвольной обобщенной арифметической прогрессии Фишберна обязательно удовлетворяют соответствующему простому линейному отношению порядка. Следовательно, на множестве всех обобщенных арифметических прогрессий Фишберна энтропия Шеннона достигает своего максимального значения для равномерного распределения $q_j^* = \dfrac{1}{n}$, $j = \overline{1, n}$.

Другими словами, для невозрастающих обобщенных арифметических прогрессий Фишберна задача:

$$H\left(q\right) = -\sum_{j=1}^{n} q_j \times \ln q_j \to \max_q ,$$

$$q_j = \frac{2 - n \times \left(n - 2 \times j + 1\right) \times x}{2 \times n},\ j = \overline{1, n},$$

$$-\frac{2}{n \times \left(n - 1\right)} \leq x \leq 0,$$

имеет единственное решение $x^* = 0$. Аналогично, для неубывающих обобщенных арифметических прогрессий Фишберна задача:

$$H\left(q\right) = -\sum_{j=1}^{n} q_j \times \ln q_j \to \max_q ,$$

$$q_j = \frac{2 - n \times \left(n - 2 \times j + 1\right) \times x}{2 \times n},\ j = \overline{1, n},$$

$$0 \leq x \leq \frac{2}{n \times \left(n - 1\right)},$$

имеет единственное решение $x^* = 0$. Согласно свойству 8 для обобщенных арифметических прогрессий Фишберна, если разность обобщенной арифметической прогрессии Фишберна равна $x^* = 0$, то обобщенная арифметическая прогрессия Фишберна представляет собой постоянную величину: $q_j^* = \dfrac{1}{n}$, $j = \overline{1, n}$.

Таким образом, для обобщенных арифметических прогрессий Фишберна единственное решение задачи максимизации энтропии Шеннона приводит к равномерному распределению вероятностей.

Как отмечалось выше, члены произвольной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна не всегда удовлетворяют соответствующему частично усиленному линейному отношению порядка. С учетом утверждения теоремы 4 задача максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка, имеет следующий вид:

$$H\left(q\right) = -\sum_{j=1}^{n} q_j \times \ln q_j \to \max_q ,$$

$$q_j = \frac{x - 1}{x^n - 1} \times x^{j-1},\ j = \overline{1, n},\ 0 < x \leq \alpha_n .$$

Очевидно, полученная задача представляет собой задачу условной оптимизации нелинейной функции одной переменной. Решение этой задачи можно найти разными методами. Докажем, что с учетом формул (2) на промежутке $x \in \left(0;\ 1\right)$ функция $h\left(x\right) = -\sum\limits_{j=1}^{n} q_j \times$ $\times \ln q_j$ строго убывает. Для этого достаточно доказать, что производная этой функции имеет отрицательное значение на всем промежутке $x \in (0; 1)$. Прежде, чем найти производную $h'(x) = \frac{d}{dx} h(x)$, найдем производную отдельного слагаемого, т.е. $\frac{d}{dx}(q_j \times ln q_j)$. Т.к. $q_j = q_j(x)$ имеем $\frac{d}{dx}(q_j \times ln q_j) = q'_j \times (ln q_j + 1)$.

В частности, если $j = 1$ имеем

$$\frac{d}{dx}(q_1 \times ln q_1) = q'_1 \times (ln q_1 + 1) = \left(\frac{x-1}{x^n - 1}\right)' \times \left(ln\left(\frac{x-1}{x^n-1}\right) + 1\right) = \frac{-(n-1) \times x^n + n \times x^{n-1} - 1}{(x^n - 1)^2} \times$$

$$\times ln\left(\frac{x-1}{x^n-1} \times e\right) = \frac{x-1}{(x^n-1)^2} \times (-(n-1) \times x^{n-1} + x^{n-2} + + ... + x^2 + x + 1) \times ln\left(\frac{x-1}{x^n-1} \times e\right) = -\left(\frac{x-1}{x^n-1}\right)^2 \times$$

$$\times ln\left(\frac{x-1}{x^n-1} \times e\right) \times \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \times x^{n-i-1}.$$

Аналогично, если $j > 1$, имеем:

$$\frac{d}{dx}(q_j \times ln q_j) = q'_j \times (ln q_j + 1) = \left(\frac{x-1}{x^n-1} \times x^{j-1}\right)' \times \left(ln\left(\frac{x-1}{x^n-1} \times x^{j-1}\right) + 1\right) = \frac{x-1}{(x^n-1)^2} \times x^{j-2}.$$

$$\times \left(-(n-j) \times x^n + \sum_{j=1}^{n} x^{n-j} - j\right) \times ln\left(\frac{x-1}{x^n-1} \times x^{j-1} \times e\right) =$$

$$= -\left(\frac{x-1}{x^n-1}\right)^2 \times x^{j-2} \times ln\left(\frac{x-1}{x^n-1} \times x^{j-1} \times e\right) \times \sum_{i=0}^{n-1} (n-j-i) \times x^{n-i-1}.$$

Следовательно, для функции (по сути, для энтропии Шеннона) $h(x) = -\sum_{j=1}^{n} q_j \cdot ln q_j$ после приведения подобных получаем:

$$h'(x) = -\frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{n} q_j \times ln q_j = -\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx}(q_j \times ln q_j) =$$

$$= -\left(\frac{x-1}{x^n-1}\right)^2 \times ln x \times \sum_{j=0}^{n-2} \left(C^2_{j+2} \times x^j \times \sum_{i=0}^{2 \cdot (n-j-2)} x^i\right),$$

где $C^2_{j+2} = \frac{(j+2) \times (j+1)}{2}$ – соответствующий биномиальный коэффициент. Если $x \in (0; 1)$, то $ln x < 0$, откуда $h'(x) > 0$.

Итак, если $x \in (0; 1)$, то $h(x) = -\sum_{j=1}^{n} q_j \times ln q_j$ – строго возрастающая функция, которая на промежутке $x \in (0; \alpha_n)$, где $0,5 < \alpha_n < 1$ для $n > 2$, достигает своего максимального значения для аргумента $x^* = \alpha_n$. В частном случае, для $n = 2$, имеем $x^* = \alpha_2 = 1$.

Таким образом, задача максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка, имеет единственное оптимальное решение $x^* = \alpha_n$, при этом $x^* = \alpha_2 = 1$ для $n = 2$ и $x^* = \alpha_n \in (0,5; 1)$ для $n > 2$.

Аналогично задача максимизации энтропии Шеннона на множестве неубывающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка,

$$H(q) = -\sum_{j=1}^{n} q_j \times ln q_j \to \max_q,$$

$$q_j = \frac{x-1}{x^n-1} \times x^{j-1}, \ j = \overline{1, n}, \ x \geq \beta_n,$$

где $1 \leq \beta_n < 2$, имеет единственное оптимальное решение $x^* = \beta_n$, при этом $x^* = \beta_2 = 1$ для $n = 2$ и $x^* = \beta_n \in (1; 2)$ для $n > 2$.

Как отмечалось в свойстве 5 для обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, если ее знаменатель равен $x = 0,5$, то обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^n$ представляет собой геометрическую прогрессию (2), т.е. геометрическую прогрессию Фишберна. Согласно теореме 4, справедливо предельное соотношение $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0,5$.

Следовательно, при достаточно больших натуральных значениях n геометрическая прогрессия Фишберна задает приблизительное решение задачи максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка.

Этот вывод подтверждает сравнительный анализ (табл. 3) значений энтропии Шеннона для соответствующих геометрических прогрессий Фишберна для нескольких первых значений n.

Таблица 3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗНАЧЕНИЙ ЭНТРОПИИ ШЕННОНА ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ

n	$x^* = \alpha_n$	$h(\alpha_n)$	$H(\hat{q})$	$\delta\%$
2	1	0,693147	0,636514	– 8,1704
3	0,618034	1,025656	0,955700	– 6,8206
4	0,543689	1,185837	1,136917	– 4,1254
5	0,518790	1,272527	1,242748	– 2,3401

Здесь $x^* = \alpha_n$ – это оптимальное решение задачи максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий

Фишберна; $h(\alpha_n)$ – экстремальное значение целевой функции этой задачи; $\hat{q}$ – соответствующая геометрическая прогрессия Фишберна; $H(\hat{q})$ – значение энтропии Шеннона для соответствующей геометрической прогрессии Фишберна; $\delta\%$ – относительное отклонение (в процентном выражении) значения $H(\hat{q})$ от числа $h(\alpha_n)$, все вычисления выполнены с точностью до шести знаков после запятой, а в последнем столбце – с точностью до четырех знаков после запятой.

Легко убедиться, что для задачи максимизации энтропии Шеннона на множестве неубывающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка, арифметические прогрессии Фишберна не целесообразно использовать в качестве приблизительного решения этой задачи. Этот вывод подтверждает сравнительный анализ (табл. 4) значений энтропии Шеннона для соответствующих арифметических прогрессий Фишберна для нескольких первых значений n.

Таблица 4

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗНАЧЕНИЙ ЭНТРОПИИ ШЕННОНА ДЛЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ

n	$\ln n$	$H(\hat{q})$	$\delta\%$
2	0,693147	0,636514	– 8,1704
3	1,098612	1,011404	– 7,9380
4	1,386294	1,279854	– 7,6780
5	1,609438	1,489750	– 7,4366

Здесь $\ln n$ – это максимально возможное значение энтропии Шеннона (на множестве невозрастающих обобщенных арифметических прогрессий Фишберна); $\hat{q}$ – соответствующая арифметическая прогрессия Фишберна; $H(\hat{q})$ – значение энтропии Шеннона для соответствующей арифметической прогрессии Фишберна; $\delta\%$ – относительное отклонение (в процентном выражении) значения $H(\hat{q})$ от числа $\ln n$; все вычисления выполнены с точностью до шести знаков после запятой, а в последнем столбце – с точностью до четырех знаков после запятой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование позволяет прийти к следующим выводам.

Обобщенная арифметическая прогрессия Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^{n}$ представляет собой арифметическую прогрессию:

$$\hat{q}_j = \frac{1}{n} - \frac{(n-1)\times x}{2} + (j-1)\times x = \frac{2 - n\times(n-2\times j+1)\times x}{2\times n},$$

разность которой удовлетворяет соотношениям $|x| \le \frac{2}{n\cdot(n-1)}$, при этом члены произвольной обобщенной арифметической прогрессии Фишберна обязательно удовлетворяют соответствующему простому линейному отношению порядка.

Обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^{n}$ представляет собой геометрическую прогрессию $\hat{q}_j = \frac{x-1}{x^n-1}\times x^{j-1}$, знаменатель которой удовлетворяет соотношению $x > 0$, при этом члены произвольной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда выполняются два неравенства $0 < x < 1$ и $x^n - 2\times x + 1 \ge 0$ для строго убывающей прогрессии или два неравенства $x > 1$ и $x^n - 2\times x^{n-1} + 1 \ge 0$ для строго возрастающей прогрессии.

Если $n = 2$, то члены обобщенной геометрической прогрессии Фишберна $\{\hat{q}_j\}_{j=1}^{2}$ удовлетворяют соответствующему частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда знаменатель этой обобщенной геометрической прогрессии Фишберна принадлежит множеству $x \in (0;1)\cup(1;+\infty)$.

Если $n = 3$, то члены обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют соответствующему частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда знаменатель этой обобщенной геометрической прогрессии Фишберна принадлежит множеству $x \in \left(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

Если $n > 2$, то члены обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют соответствующему частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда знаменатель этой обобщенной геометрической прогрессии Фишберна принадлежит множеству $x \in (0; \alpha_n] \cup [\beta_n; +\infty)$, где $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$, $0,5 < \alpha_n < 1$, а последовательности $\{\alpha_n\}_{n=2}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=2}^{\infty}$ являются строго монотонными ограниченными последовательностями, пределы которых соответственно равны $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0,5$, $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 2$.

Бесконечная обобщенная геометрическая прогрессия Фишберна представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $\hat{q}_j = (1-x)\times x^{j-1}$, $j \in N$, где $0 < x < 1$, при этом члены произвольной бесконечной обобщенной геометрической прогрессии Фишберна удовлетворяют частично усиленному линейному отношению порядка тогда и только тогда, когда выполняются соотношения $0 < x \le 0,5$.

Обобщенные геометрические прогрессии Фишберна применяются в теории массового обслуживания для вычисления значений стационарных вероятностей состояний случайного процесса, характеризующего функционирование одноканальной системы массового обслуживания.

Обобщенные прогрессии Фишберна можно применять, например, для оценки неизвестных значений вероятностей состояний экономической среды или для оценки неизвестных значений весовых коэффициентов, если для этих неизвестных значений задано соответствующее отношение порядка, при этом лицо, принимающее решения, выбирает такие значения параметров прогрессии, для которых полученная обобщенная прогрессия Фишберна будет задавать последовательность, являющуюся, с точки зрения лица, принимающего решения, наиболее характерной для имеющей место ситуации.

В случае оценки неизвестных значений вероятностей возможных состояний экономической среды по формулам вычисления значений членов обобщенных прогрессий Фишберна корректность принятия управленческих решений зависит от ответов на несколько существенных вопросов. Наиболее важными из них являются следующие два вопроса. Во-первых, удовлетворяет ли рассматриваемая обобщенная прогрессия Фишберна соответствующему линейному отношению порядка? Во-вторых, удовлетворяет ли рассматриваемая обобщенная прогрессия Фишберна принципу Гиббса–Джейнса максимума энтропии?

На множестве всех обобщенных арифметических прогрессий Фишберна энтропия Шеннона достигает своего максимального значения для равномерного распределения $q_j^* = \frac{1}{n}$, $j = \overline{1, n}$.

Задача максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка, имеет единственное оптимальное решение $x^* = \alpha_n$, при этом $x^* = \alpha_2 = 1$ и $x^* = \alpha_n \in (0,5; 1)$ для $n > 2$.

Задача максимизации энтропии Шеннона на множестве неубывающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка, имеет единственное оптимальное решение $x^* = \beta_n$, при этом $x^* = \beta_2 = 1$ и $x^* = \beta_n \in (1; 2)$ для $n > 2$.

При достаточно больших натуральных значениях n геометрическая прогрессия Фишберна задает приблизительное решение задачи максимизации энтропии Шеннона на множестве невозрастающих обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка. Для геометрических прогрессий Фишберна справедливо предельное соотношение $\lim_{n \to +\infty} H(\hat{q}) = \ln 4 \approx 1,386294$.

Литература

1. Вальд А. Последовательный анализ [Текст] / А. Вальд ; пер. с англ. П.А. Бакута. – М. : Физматгиз, 1960. – 328 с.
2. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания [Текст] / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М. : Наука, 1987. – 336 с.
3. Лившиц В.Н. Об энтропийном анализе переходной экономики [Текст] / В.Н. Лившиц, А.В. Сигал // Экономика и математические методы. – 2014. – Т. 50 ; вып. 3. – С. 86-104.
4. Недосекин А.О. Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний [Текст] : автореф. дисс. … д-ра экон. наук / А.О. Недосекин. – СПб, 2003. – 37 с.
5. Потапов Д.К. О методиках определения весовых коэффициентов в задаче оценки надежности коммерческих банков [Электронный ресурс] / Д.К. Потапов, В.В. Евстафьева. URL: http://www.ibl.ru/konf/041208/60.-pdf.
6. Рач Д.В. Метод освоенного объема в задачах управления рисками в проектах [Текст] / Д.В. Рач // Управление проектами и развитие производства. – 2011. – №4. – С. 124-134.
7. Сазонов А.Е. и др. Использование метода экспертных отношений предпочтения для оценки уровня совершенства системы управления безопасностью морского судна [Текст] / А.Е. Сазонов, Г.С. Осипов, В.Д. Клименко // Вестн. гос. ун-та морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. – 2013. – №3. – С. 94-104.
8. Сигал А.В. Бесконечные обобщенные прогрессии Фишберна [Текст] / А.В. Сигал // Актуальные проблемы и перспективы развития экономики : тр. X I V Междунар. науч.-практ. конф. Симферополь – Гурзуф, 12-14 ноября 2015. – Саки : ИП Бровко А.А., 2015. – С. 40-41.
9. Сигал А.В. О последовательностях, удовлетворяющих простому и частично усиленному линейным отношениям порядка [Текст] / А.В. Сигал // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах : тр. Междунар. науч. школы МА БР-2015 (Санкт-Петербург, 17-19 нояб., 2015). – СПб. : ГУАП, 2015. – С. 77-84.
10. Сигал А.В. О приведении обобщенной модели Марковица в поле третьей информационной ситуации к классической модели Марковица [Текст] / А.В. Сигал // Системный анализ и информационные технологии : тр. 7-й междунар. конф. САИТ-2017 (13-18 июня 2017, Светлогорск). – М. : ФИЦ ИУ РАН, 2017. – С. 159-167.
11. Сигал А.В. Обобщенные прогрессии Фишберна [Текст] / А.В. Сигал, Г.Н. Макеева // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем (АМУР-2015) : сб. науч. тр. IX Междунар. школы-симпозиума АМУР-2015 (Севастополь, 12-21 сент. 2015). – Симферополь : КФУ им. В.И. Вернадского, 2015. – С. 343-350.
12. Сидоренко Л.Ж. Методы оценки финансовой устойчивости предприятий малого бизнеса и факторов, влияющих на нее, в условиях современной России [Текст] : автореф. дисс. … канд. экон. наук / Л.Ж. Сидоренко. – Майкоп, 2011. – 26 с.
13. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности [Текст] / Р.И. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 258 с.
14. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений [Текст] / П. Фишберн ; пер. с англ. В.Н. Воробьевой, А.Я. Кируты. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
15. Fishburn P.C. Analysis of decisions with Incomplete knowledge of probabilities [Text] / P.C. Fishburn // Operations research. – 1965. – Vol. 13 ; no. 2. – Pp. 217-237.
16. Fishburn P.C. Decision and value theory [Text] / P.C. Fishburn. – N.Y. : John Wiley & Sons, 1964. – 437 p.
17. Fishburn P.C. Independence in utility theory with whole product sets [Text] / P.C. Fishburn // Operations research. – 1965. – Vol. 13; no. 1. – Pp. 28-45.
18. Fishburn P.C. Utility theory for decision making [Text] / P.C. Fishburn. – N. Y. : John Wiley & Sons, 1970. – 247 p.

Ключевые слова

Линейные отношения порядка; обобщенные прогрессии Фишберна; энтропия Шеннона; принятие управленческих решений; принцип Гиббса–Джейнса максимума энтропии.

Сигал Анатолий Викторович

Ремесник Елена Сергеевна

РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность темы статьи обусловлена необходимостью разработки корректных, адекватных имеющейся ситуации, методов и моделей принятия управленческих решений в условиях неопределенности и риска.

Научная новизна исследования состоит в том, что авторы рассмотрели применение последовательностей, удовлетворяющих соответствующим линейным отношениям порядка и называемых в статье обобщенными прогрессиями Фишберна, для принятия управленческих решений в случае, когда лицо, принимающее решения, придерживается принципа Гиббса–Джейнса максимума энтропии. Основываясь на результатах, полученных А.В. Сигалом в предыдущих публикациях, авторы приводят в общем виде решение задачи максимизации энтропии Шеннона на множестве обобщенных геометрических прогрессий Фишберна, удовлетворяющих частично усиленному линейному отношению порядка. На основании вычислений значений энтропии Шеннона для прогрессий Фишберна и для обобщенных прогрессий Фишберна авторы убедительно иллюстрируют возможность максимизации энтропии Шеннона на множестве обобщенных прогрессий Фишберна, удовлетворяющих соответствующему линейному отношению порядка, для принятия управленческих решений в условиях неопределенности и риска.

Результаты, изложенные в статье, является научным вкладом в моделирование процесса принятия управленческих решений в экономике, особенно в случаях, когда необходимо корректное построение оценок неизвестных значений вероятностей возможных состояний экономической среды или весовых коэффициентов. Практическая значимость этих результатов состоит в том, что они могут быть использованы для принятия управленческих решений в условиях неопределенности и риска.

Считаю, что рецензируемая статья может быть рекомендована к опубликованию в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Орлова Е.Р., д.э.н., профессор, заведующий лабораторией Института системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской Академии наук, г. Москва.

Перейти на ГЛАВНОЕ МЕНЮ