

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПОКАЗАТЕЛЯ УДЕЛЬНОГО ВЕСА ПРОСРОЧЕННОЙ ССУДНОЙ ЗАДОЛЖЕННОСТИ КРЕДИТНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Смулов А.М., к.э.н., зам. директора

Управление кредитования Сбербанка России

Показатель удельного веса просроченной задолженности является одним из ключевых индикаторов, характеризующих качество кредитного портфеля коммерческого банка. В мировой практике среднестатистическая величина проблемных и просроченных кредитов составляет примерно 4-10%, а, следовательно, удельный вес просроченной задолженности составляет меньшую величину такого же порядка.

Большинство банкротств российских банков, как показывает анализ, связано с некачественным управлением активами, включая, в первую очередь, управление кредитным портфелем. Эта ситуация усугубляется, в частности, нестабильным финансово-экономическим положением заемщиков в неопределенно изменяющихся макроэкономических условиях переходного периода. К макроэкономическим причинам относятся: скачкообразные изменения уровня инфляции и валютных курсов; отсутствие действенного законодательства (включая налоговое), защищающего интересы как банков, так и промышленных предприятий и стимулирующее их поступательное развитие; общая стагнация производства в кризисные периоды и т.п. К микроэкономическим причинам можно отнести: преобладающее неэффективное использование оборудования, его значительный моральный и материальный износ; отсутствие не только собственных источников капиталовложений, но и оборотных средств; низкую квалификацию управленческого персонала и потерю квалифицированных специалистов из-за низкой и систематически не выплачиваемой заработной платы и др. К макро- и микроэкономическим причинам добавляются еще и сложившиеся морально-этические нормы формирования и поддержания деловых связей: для России их особенностью состоит в том, что даже кредитоспособные заемщики не спешат своевременно возвращать долги по кредитам, полученным в «пошатнувшихся» банках. Все это приводит к тому, что реальный уровень проблемной и просроченной ссудной задолженности в отечественных коммерческих банках значительно выше, чем среднемировой показатель, и, по оценке автора, составляет 30-40%, а в некоторых банках или филиалах банков может достигать 60-70%. При этом номинальная (указываемая в официальной отчетности) величина просроченной ссудной задолженности находится, как правило, на весьма удовлетворительном уровне¹, что вероятно связано с различного рода «ухищрениями» кредитных организаций,

¹ По данным [1-3] уровень просроченной ссудной задолженности в целом по отечественной банковской системе составляет в 2000г.: на 01.01. – 7,0%, на 01.04. – 4,4%, на 01.07. – 3,1%.

как-то: необоснованные пролонгации; перекредитование и более сложные схемы, проводимые с помощью дружественных либо аффилированных банков. Однако не все находящиеся в распоряжении банков средства снижения показателя удельного веса просроченной ссудной задолженности равноэффективны с точки зрения экономики банка.

В настоящее время серьезной проблемой является отсутствие применимых на практике инструментов прогнозирования исследуемого показателя. Особенно актуальны вопросы прогнозирования данного показателя для банков, в которых аудит проводится по международным стандартам финансовой отчетности, и руководители которых ставят задачу уменьшения реально сложившегося уровня показателя до среднемировой его величины.

В отечественной литературе отсутствует определение понятия ссудной задолженности², поэтому для четкого понимания дальнейшего изложения введем следующие определения:

Текущая ссудная задолженность (z^{TS}) – ссудная задолженность по основному долгу, срок платежа по которой в текущий момент времени не наступил.

Просроченная ссудная задолженность (z^{PS}) – ссудная задолженность по основному долгу, не погашенная заемщиком в установленные кредитным договором сроки.

Общая ссудная задолженность (z^{CS}) – остаток основного долга по фактически предоставленным банком заемщику в форме кредита денежным средствам, то есть сумма z^{PS} и z^{TS} на момент проведения анализа показателя.

Показатель *удельного веса просроченной ссудной задолженности* (y_B) рассчитывается как отношение объема просроченной ссудной задолженности к объему общей ссудной задолженности:

$$y_B = \frac{z^{PS}}{z^{CS}} * 100 \% = \frac{z^{PS}}{z^{TS} + z^{PS}} * 100 \% \quad (1)$$

На величину z^{PS} и z^{TS} , а следовательно, и z^{CS} , влияют как внешние, так и внутренние факторы. Влияние внешних (макроэкономических) факторов определим, как функцию $f_1(a, b, c, d, \dots)$, а влияние внутренних (микроэкономических) факторов – как функцию $f_2(k, l, m, n, \dots)$.

Аргументами функции f_1 могут быть:

a – общее финансово-экономическое и состояние страны и региона, в котором банк ведет свою деятельность;

b – уровень защиты экономических интересов банковской системы и каждого отдельно взятого банка, предусмотренный законодательством страны;

c – действующая налоговая система и уровень налогообложения;

d – средний уровень кредитоспособности заемщиков;

² В [13] используется понятие ссудной и приравненной к ней задолженности, однако и здесь определение не дается.

и другие внешние факторы, включая действия, имеющие форс-мажорный характер (в частности – дефолты платежей по обязательствам государства).

Все эти факторы определяют макроэкономическую составляющую риска невозврата кредитов и, соответственно, – *страновую (региональную)* составляющую величины показателя удельного веса просроченной задолженности. Понятно, что на среднюю величину кредитного риска, как вероятности реализации случая невозврата кредита, влияет общее состояние народнохозяйственного комплекса страны, стабильность ее финансово-экономического положения. Чем выше уровень стабильности экономики государства (или региона), тем ниже среднее значение γ_b , при прочих равных условиях.

Уровень законодательной защиты экономических интересов кредитной организации со стороны государства определяется предоставлением ей возможности, действуя легитимными способами, быстро и эффективно взыскать с заемщика просроченную задолженность по кредитам в полном объеме³. Российское законодательство определяет очередность взыскания долгов в пользу банка в третью (при наличии залога), либо в пятую очередь, а по ряду операций (например, форвардные сделки) банки вообще лишены возможности судебной защиты. Указанные обстоятельства не способствуют уменьшению среднего уровня исследуемого показателя γ_b .

При сложной действующей налоговой системе, характеризующейся большим количеством трудноисчисляемых налогов (зачастую вводимых «задним числом»), высокими ставками налогообложения и весьма значительными штрафными санкциями за нарушение налогового законодательства, риск невозврата кредита также весьма значительно возрастает. Это связано с тем, что денежные средства, приготовленные добросовестным заемщиком для осуществления платежей по кредиту, могут быть достаточно «неожиданно» изъяты в доход государства.

В свою очередь и величина средней платежеспособности заемщиков вносит свою лепту в колебание рассматриваемого показателя. Чем выше средний уровень кредитоспособности, тем выше вероятность своевременного и полного расчета заемщика с банком.

Таким образом, факторы внешней (по отношению к банку) среды и возможные их сочетания, могут оказывать долгосрочное определяющее влияние на установление средней величины уровня просроченной ссудной задолженности, повышая или понижая ее.

Функция f_2 , в свою очередь, также имеет множество аргументов. Приведем некоторые из них:

k – использование высшим руководством стратегических и тактических методов планирования и управления деятельностью банковской фирмы и, соответственно, преследование (контроль) стратегических или тактических интересов;

l – квалификация персонала банка и применяемая система переподготовки кадров;

m – степень комплексности и эффективность применяемых методов осуществления мониторинга кредитов;

n – уровень согласованности (четкость координации) действий функциональных подразделений банка в процессе взыскания z^{ps} и другие.

Эти и другие внутренние факторы определяют микроэкономическую составляющую риска невозврата кредитов и, соответственно, *внутрибанковскую* составляющую величины показателя просроченной ссудной задолженности.

Использование высшим менеджментом кредитной организации исключительно тактических методов планирования и управления в ущерб стратегическим может привести к росту кредитного риска, например, в силу несвоевременной или необоснованной диверсификации кредитного портфеля по отраслям и регионам. Преобладание тактических интересов «сегодняшнего дня» также может оказать негативное влияние на величину γ_b . Например, снижение значительных по величине остатков денежных средств на корреспондентском счете банка путем массового срочного размещения их в кредиты приводит к снижению требований к уровню кредитоспособности заемщиков и, как следствие, ведет к росту величины γ_b в будущем периоде.

Недостаточная квалификация персонала банка приводит к росту объемов кредитов, выданных «неблагонадежным» заемщикам, а продуманная система переподготовки кадров обеспечивает растущее качество отбора заемщиков преимущественно с высоким показателем кредитоспособности.

Из сказанного следует, что и внутренние факторы оказывают существенное влияние на формирование фактического среднего уровня величины γ_b .

Качественная картина изменения средней величины γ_b под влиянием факторов, определяемых f_1 и f_2 , изображена на рис.1.

Период $(t_0 - t_2)$ – период общего спада экономики (долгосрочный цикл), характеризуется относительно медленным повышением средней величины γ_b . В период общего экономического кризиса $(t_1 - t_3)$ средняя величина γ_b резко увеличивается в связи с преобладающим негативным влиянием f_1 . Период времени от t_2 до t_7 определяется общим экономическим подъемом (долгосрочный цикл) и медленным уменьшением средней величины γ_b . Если коммерческий банк попадает в локальный финансовый кризис, то γ_b резко возрастает на интервале $(t_4 - t_5)$, в силу преобладающего негативного влияния факторов, определяемых f_2 , а затем (при принятии банком эффективных мер) на интервале $(t_5 - t_6)$ уменьшается до значения, соответствующего текущему влиянию факторов, определяемых f_1 (в момент времени t_6). Период $(t_7 - t_8)$ – соответствует общему экономическому спаду на следующем долгосрочном цикле, вновь характеризуется плавным возрастанием средней величины γ_b . И так далее.

³ Под просроченной задолженностью по кредитам понимается величина, равная сумме Z^{ps} начисленных, но не уплаченных процентов, пеней и штрафов.

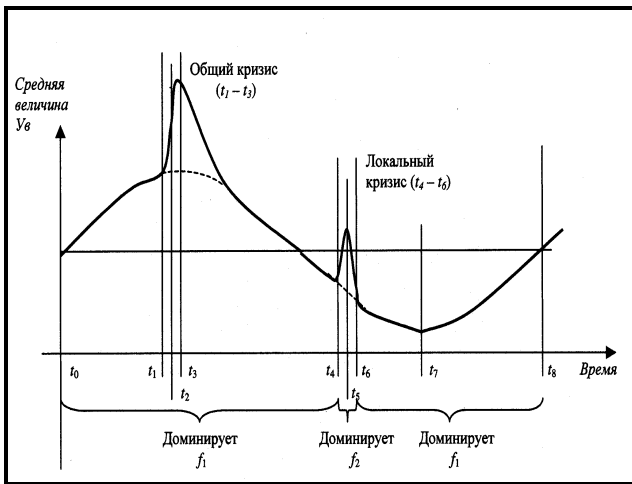


Рис.1. Качественный график изменения средней величины Y_B под влиянием внешних и внутренних факторов

Принимая во внимание вышесказанное, можно констатировать, что показатель Y_B имеет две взаимосвязанные составляющие и может быть описан системой уравнений, включающей функции многих переменных:

$$Z^{PS} = F_1 [f_1(a, b, c, d, \dots) f_2(k, l, m, n, \dots)] \quad (2)$$

$$Z^{TS} = F_2 [f_1(a, b, c, d, \dots) f_2(k, l, m, n, \dots)] \quad (3)$$

$$Y_B = F [Z^{PS}, Z^{TS}] \quad (4)$$

при действующих ограничениях:

$$Z^{CS} = Z^{PS} + Z^{TS}; \quad (5)$$

$$Z^{CS} \leq \min\{V, W\}; \quad (6)$$

$$V = \beta R; \quad (7)$$

$$Z^{CS} \geq Z^{PS} \geq 0; \quad (8)$$

$$Z^{TS} > 0; \quad (9)$$

$$t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, \quad (10)$$

где:

F_1 — функция, определяющая закон изменения величины Z^{PS} ;

F_2 — функция, определяющая закон изменения величины Z^{TS} ;

F — функция, определяющая закон изменения величины Y_B ;

$f_1(a, b, c, d, \dots)$ — функция, определяющая влияние факторов внешней среды;

$f_2(k, l, m, n, \dots)$ — функция, определяющая влияние внутренних факторов;

$V = \beta R$ — ограничение по объему кредитно-инвестиционных ресурсов, где: R — общий имеющийся или планируемый объем ресурсов банка; β — коэффициент, определяющий долю общего объема

ресурсов банка, направляемую (планируемую) на операции кредитования;

W — ограничение по емкости рынка кредитования;

$t_0 + \delta$ — период времени от момента выдачи первого кредита (t_0) до момента 100%-го невозврата всех ранее выданных кредитов в рамках фактической величины Z^{CS} .

В общем случае аргументы функций (2)-(4) являются функциями времени t , однако в рамках настоящей работы зависимость от времени не будет рассматриваться. Для упрощения вида производимых ниже преобразований обозначение индекса t опускается.

Ограничения (5)-(10) вытекают из сути приведенных выше определений. Ограничение (6) вытекает из реальных условий деятельности коммерческих банков в сфере кредитования и определяется лимитирующим фактором, в качестве которого может выступать либо объем размещаемых кредитно-инвестиционных ресурсов V , либо ограничение по емкости рынка кредитования W .

Показатель объема размещаемых кредитных ресурсов V весьма существенен для банков в условиях недоверия клиентов (юридических и физических лиц) к банковской системе страны в целом и к конкретным коммерческим банкам в частности. Несмотря на большой объем накоплений денежных средств «на руках» у населения, оно не стремится разместить их в банках, а средства юридических лиц размещаются, как правило, либо по принципу «этот банк свой», либо по принципу – «этот банк наиболее надежный», да и то на весьма незначительные сроки.

По поводу влияния показателя W существуют различные точки зрения. Одни банки считают его лимитирующим и определяющим крайне незначительным количеством платежеспособных заемщиков. Другие банки активно кредитуют предприятия, организации, физических лиц и не сталкиваются с его ограниченностью. По мнению автора, ограничение по W на данном этапе перехода к рыночным отношениям не является лимитирующим. Однако с ростом уровня конкуренции и насыщением реального сектора экономики финансовыми ресурсами оно может стать весьма значимым, особенно для кредитных организаций, работающих на ограниченных территориях страны (в отдельных регионах) или специализирующихся на кредитовании какой-либо одной отрасли или узкого спектра отраслей.

В зависимости от конкретных обстоятельств реальное ограничение объемов Z^{CS} происходит по минимальной величине либо кредитно-инвестиционного ресурса, либо емкости рынка кредитования (см. уравнение (6)).

Общая постановка задачи прогнозирования и оптимизации показателя Y_B может быть осуществлена в следующем виде.

$$\begin{cases} Y_B = F [Z^{PS}, Z^{TS}] \rightarrow Y_B^{min}; \\ Y_B \leq Y_B^* \end{cases}$$

где Z^{PS} и Z^{TS} определяются функциями вида (3) и (4);

$$Y_B \in [0,1];$$

\bar{Y}_B – максимально допустимая в данной ситуации величина Y_B , задаваемая экспертным путем, причем $\bar{Y}_B \in (0,1)$.

В этом случае предполагается изменение величин Z^{PS} и Z^{TS} по некоторым законам, которые требуют доопределения. Банком ставится задача удержания параметра Y_B в некотором «коридоре»:

$$Y_B^{min} \leq Y_B \leq Y_B^{max},$$

соответствующем представлениям руководителей банка о «нормальном» уровне просроченной ссудной задолженности. На практике этот коридор обычно выбирается равным среднемировым величинам Y_B и имеет границы: $4\% \leq Y_B \leq 10\%$ (или в десятичном представлении: $0.04 \leq Y_B \leq 0.1$). Однако, по мнению автора и в соответствии с данными [4,5], наиболее приемлемым, на текущем этапе развития российской экономики (и банковской системы), является изменение Y_B в диапазоне 5-15%, определяющем среднее приемлемое значение в 10% (или 0.05-0.15, при среднем — 0.1).

В качестве решаемой может быть избрана частная задача минимизации показателя Y_B :

$$Y_B = F[Z^{PS}, Z^{TS}] \rightarrow Y_B^{min}.$$

Заметим, что у работающего с широким кругом разнообразных клиентов банка не может быть на достаточно существенном отрезке времени показатель $Y_B = 0$, однако приближение к «нулевой зоне» $[0, +\Delta]$ достаточно вероятно. Под приемлемой величиной Δ понимается на практике величина в 3-5% (или в десятичном представлении: 0.03-0.05), которая, однако, в условиях реальной российской экономики переходного периода трудно достижима. Большинство банков, скорее всего, должны ориентироваться на величину порядка 7-10% (0.07-0.1).

Данная задача является слабоструктурированной и ее решение, в любом из вариантов постановки, требует сочетания сложного математического аппарата, предполагающего применение имитационно-оптимизационного подхода с использованием неформальных экспертных процедур для учета как формализуемых, так и качественных неформализуемых критериев (параметров), часть из которых взаимосвязан.

Можно предположить, что одним из путей решения задачи определения средней величины Y_B может быть решение ее вероятностно-статистическими методами, например, с использованием распределения Парето-Леви [6]. Кривая этого распределения приподнята над осью абсцисс, обладает высоким пиком, асимметрией (в общем случае), и с помощью варьирования четырех параметров, управляющих положением кривой, позволяет достаточно достоверно интерпретировать вероятностные значения величины показателя Y_B . Сложность решения задачи данным способом определяется отсутствием достоверных статистических данных и неопреде-

ленностью видов функций, описывающих изменение величин Z^{PS} и Z^{TS} .

Таким образом, в самой общей постановке проблема исследования влияния внешних и внутренних факторов на величину удельного веса просроченной ссудной задолженности коммерческого банка представляет собой многомерную динамическую нелинейную задачу, решение которой существенно затрудняется из-за высокой степени неопределенности влияния как каждого из аргументов в отдельности, так и их в совокупности или в сочетаниях.

Решение подобных задач осуществляется обычно приближенными методами, предполагающими известные упрощения исходной постановки. В литературе [7-10] изложен метод обобщенных множеств достижимости (ОМД), который применяется для анализа потенциальных возможностей экономических систем и используется для построения упрощенных базовых решений, предназначенных для дальнейшего уточнения, например проведением развернутых имитационных экспериментов.

Суть метода сводится к тому, что в случае, когда задача имеет более двух критериев (несколько «отслеживаемых» параметров), на плоскости могут быть представлены двумерные сечения множества всех тех значений вектора показателей, которые могут быть достигнуты с помощью допустимых значений переменных, и его проекции на двумерные пространства показателей. Метод ОМД дает возможность графического (наглядного) изображения отдельных характеристик множества, что дает определенные преимущества перед использованием обычных методов многомерной оптимизации, которые в качестве решений дают некоторое количество эффективных точек, которые в общем случае дают слабое представление об исходном множестве [10]. Наличие двумерного изображения также существенно облегчает процесс прогнозирования искомой величины в заданной исследователем системе координат.

На практике метод ОМД применяется в два этапа. На первом этапе исследование ограничивается решением задачи относительно экономических формализуемых критериев (параметров), на втором – с использованием качественных неформальных критериев уточняется полученное на первом этапе решение.

Применение в рамках проводимого исследования ряда гипотез позволяет упростить функцию (4) и налагаемые на нее ограничения (5)-(10) с целью получения возможности практического ее применения в деятельности банка по прогнозированию рассматриваемого показателя.

Принимаемые гипотезы могут быть сформулированы следующим образом.

1) Считаем, что временной период $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ относительно мал, поэтому функции $f_1(a, b, c, d, \dots)$ и $f_2(k, l, m, n, \dots)$ практически неизменны во времени, не оказывают существенного влияния на изменение среднего уровня величины Y_B . Форс-мажорные ситуации во внимание не принимаются.

2) Качество вновь выдаваемых кредитов или сроки действия кредитных договоров по ним обеспечивают

отсутствие прироста величины z^{PS} в прогнозируемом периоде.

3) Реальным ограничением z^{CS} является ограничение по объему кредитно-инвестиционных ресурсов v .

4) Изменение величины кредитного портфеля дискретно во времени, и одновременное изменение z^{CS} не превышает некоторой заданной величины (например, 10%).

5) Допустимая граница величины y_B стремится к среднемировой величине показателя, т.е. $\bar{y}_B = (0; 0,1)$.

Указанная совокупность гипотез обеспечивает учет формализуемых экономических параметров, существенно упрощает возможность проведения дальнейшего анализа и делает возможным использование метода ОМД. Система уравнений (2)-(10) в этом случае трансформируется в систему соотношений вида (11)-(15), содержащую функцию двух переменных:

$$y_B = f [z^{PS}, z^{TS}] \rightarrow \min \tag{11}$$

$$z^{CS} \geq z^{PS} \geq 0; \tag{12}$$

$$z^{TS} > 0; \tag{13}$$

$$z^{CS} = z^{TS} + z^{PS}; \tag{14}$$

$$z^{CS} \leq v = \beta R. \tag{15}$$

Формализованное представление соотношений (11)-(15), с учетом (1), имеет вид:

$$y = f(x, z) = \frac{x}{x+z} = x(x+z)^{-1}; \tag{16}$$

$$0 \leq x \leq u; \tag{17}$$

$$z > 0; u > 0; 0 \leq y \leq 1; \tag{18}$$

$$x + z = u; \tag{19}$$

$$u \leq v, \tag{20}$$

где:

$$y = y_B; \quad x = z^{PS}; \quad z = z^{TS}; \quad u = z^{CS}.$$

Фрагмент поверхности, описываемой функцией вида (16), в системе координат $\{y, x, z\}$ имеет вид, изображенный на рис.2.

Кредитная организация в каждый определенный период времени находится в той или иной, но однозначно определяемой (в зависимости от цели оперативного управления) типовой ситуации. Набор таких ситуаций описывается следующим образом.

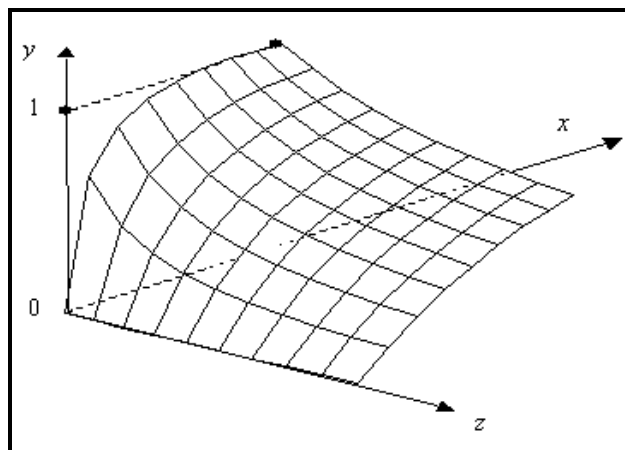


Рис.2. Фрагмент поверхности, описываемой функцией $f(x,z) = x/(x+z)$

Ситуация 1

$$y = \frac{x}{u} = \frac{x}{x+z} \rightarrow 1 \text{ при } u = \text{const}.$$

Отсюда $x \rightarrow u$ и $z = (u - x) \rightarrow 0$.

Данная ситуация может возникнуть в случае прекращения деятельности кредитной организации по размещению кредитов (например, при отзыве банковской лицензии) и недобросовестных действиях всех без исключения заемщиков, ожидающих возможности не возвращать кредиты полностью, или хотя бы частично, при банкротстве банка.

Этот вариант весьма характерен и для периодов кризисного состояния экономики страны (региона), когда банк воздерживается от увеличения z^{TS} в силу высокой степени неопределенности финансово-экономической ситуации, а заемщики не в состоянии вернуть своевременно ранее полученные кредиты (т.е. величина z^{PS} растет).

Ситуация 2

$$y = \frac{x}{u} = \frac{x}{x+z} \rightarrow 0 \text{ при } u = \text{const}.$$

Отсюда $x \rightarrow 0$ и $z = (u - x) \rightarrow u$.

Экономический смысл данного случая может быть описан следующим образом. С целью сохранения избранной оптимальной структуры активов, банк поддерживает величину z^{CS} на постоянном уровне за счет выдачи новых кредитов в объеме естественного выбытия z^{TS} (плановое погашение ранее выданных кредитов) и достигнутого уменьшения z^{PS} .

В реальной жизни строгое поддержание z^{CS} на постоянном уровне затруднено из-за сложности синхронизации процессов возврата и выдачи кредитов.

Ситуация 3

$$y = \frac{x}{u} = \frac{x}{x+z} \rightarrow 1 \text{ при } x = \text{const}.$$

Отсюда $u \rightarrow x$ и $z = (u - x) \rightarrow 0$.

Эта ситуация реализуется, например, при следующих обстоятельствах:

- банк прекращает деятельность в сфере кредитования (например, при добровольной ликвидации) и

обеспечивает 100%-й возврат z^{TS} , возврат z^{PS} планируется банком в последующий период;

- банк находится в состоянии реструктуризации (слияние, разделение), при этом новые кредиты не выдаются, z^{TS} сокращается при возврате заемщиками ранее полученных кредитов, возврат z^{PS} будет проводиться после формирования новых рабочих структур.

Такая экономическая ситуация возможна и при кризисном обострении в кредитной организации, связанном с некачественным управлением ее ликвидностью, и выражается в недостатке денежных средств для текущих расчетов по счетам юридических лиц и по вкладам населения. При этом банк вынужден отказаться от увеличения z^{TS} и направлять денежные средства на поддержание надлежащего уровня ликвидности. Реальных же результатов по уменьшению z^{PS} в рассматриваемый период не достигается.

Ситуация 4

$$y = \frac{x}{u} = \frac{x}{x+z} \rightarrow 0 \text{ при } x = \text{const} .$$

Отсюда $u \rightarrow \infty$ и $z = (u - x) \rightarrow \infty$.

Данный вариант реализуется при следующих обстоятельствах: кредитная организация занимает крайне агрессивную позицию в сфере кредитования, с целью захвата рынка (в отрасли, в регионе), оставляя вопросы снижения абсолютного уровня z^{PS} на более позднее время.

Напомним, что в данной ситуации возможно снижение y_b до того момента, пока изменение аргумента u функции не выйдет на ограничение $u = v$, то есть все кредитные ресурсы будут исчерпаны.

Ситуация 5

$$y = \frac{x}{u} = \frac{x}{x+z} \rightarrow 0 \text{ при } u \neq \text{const} .$$

Отсюда $x \rightarrow 0$ и $u \rightarrow z$.

В деятельности банка такая ситуация возможна, когда выдача новых кредитов не производится, даты планового погашения ранее размещенной ссудной задолженности не наступили ($z = \text{const}$), а величина просроченной задолженности уменьшается (например, за счет погашения долга должником, либо его списания).

Используя для решения поставленной задачи методы дифференциального исчисления [6,11], можно найти полный дифференциал функции (приращение функции):

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz = \\ &= \frac{zdx}{(x+z)^2} - \frac{xdz}{(x+z)^2} = \\ &= \frac{zdx - xdz}{(x+z)^2} . \end{aligned} \tag{21}$$

или в приращениях:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial y}{\partial z} \Delta z =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{z\Delta x}{(x+z)^2} - \frac{x\Delta z}{(x+z)^2} = \\ &= \frac{z\Delta x - x\Delta z}{(x+z)^2} \end{aligned} \tag{22}$$

Выражение (22) позволяет найти величину изменения значения исследуемой функции (16), при относительно малых (Δ) изменениях аргументов x и z , то есть, в изначально принятых обозначениях определить, насколько изменится величина y_b при изменении величин z^{PS} и z^{TS} вблизи окрестностей начальной точки.

Для вычисления текущего (или прогнозируемого) значения y_b может быть использована формула полного дифференциала (22), трансформированная при принятых обозначениях переменных в выражение вида:

$$\Delta Y_b = \frac{z^{TS} * \Delta Z^{PS} - z^{PS} * \Delta Z^{TS}}{(z^{PS} + z^{TS})^2} .$$

Заметим, что решение обратной задачи – определения оптимальных изменений Δz^{PS} и Δz^{TS} при заданных желаемых величинах Δy_b (с учетом знака) – может вызвать значительные трудности, в то время как именно эта задача нас и интересует.

Рассмотрим альтернативный способ решения обратной задачи, реализуемый на основе использования метода обобщенных множеств достижимости (ОМД). Для этого определим соответствие приведенных выше типовых ситуаций тем или иным вариантам сечений (проекций) исследуемой функции на плоскость $\{y_b, z^{CS}\}$.

Типовые ситуации 1 и 2 могут быть интерпретированы проекцией функции (16), трансформирующейся в линейную функцию вида:

$$y = f(x) = ax , \tag{23}$$

где: $a = 1/u$, при $u = \text{const}$.

График проекции исследуемой функции y_b , при нормировании величины z^{CS} ($= 1$), изображен на рис.3. В данном случае процедура нормирования вызвана требованием практики, когда планирование осуществляется от единицы или 100 процентов.

Типовые ситуации 3 и 4 интерпретируются проекциями вырожденной функции (16), трансформирующейся в функцию одного аргумента z , вида:

$$y = f(z) = \frac{b}{b+z} , \tag{24}$$

где: $b = \text{const}$ - параметр.

Динамика изменения уровня просроченной задолженности в рассматриваемом случае будет определяться как изменением аргумента z , так и абсолютной величиной параметра b .

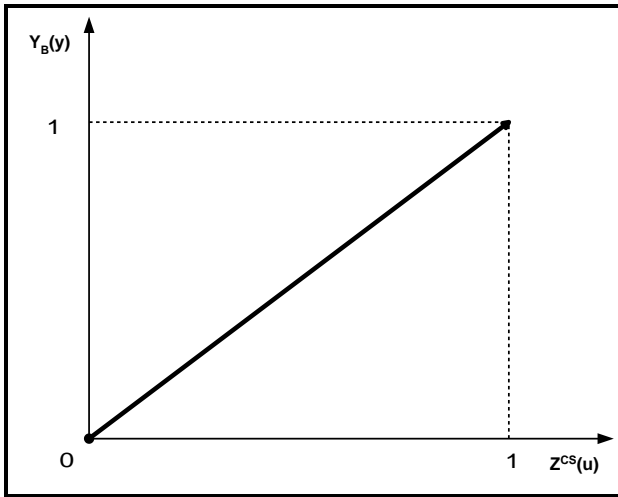


Рис.3. Проекция функции y_B при условии реализации типовых ситуаций 1 и 2 (в нормированной системе координат)

Проведем формальный математический анализ [12] функции (24). Данная функция является частным случаем дробно-линейной функции, описываемой уравнением:

$$y = \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2},$$

и графически представляет две равносторонние гиперболы.

Так как в нашем случае $a_1 = 0, a_2 = 1, b_1 = b_2 = b$, то определитель D , характеризующий положение графика функции на координатной плоскости, будет иметь значение:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & b \end{vmatrix} = (0 * b) - (b * 1) = -b.$$

Отсюда, величина полуоси $(0 * b)$ будет равна:

$$\frac{\sqrt{2|D|}}{|a_2|} = \sqrt{2|-b|}.$$

Центры гипербол будут определяться точкой А с координатами:

$$\left(-\frac{b_2}{a_2}; \frac{a_1}{a_2} \right) = (-b; 0).$$

Вершины гипербол:

$$D : \left(-\frac{b_2}{a_2} + \frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|}; \frac{a_1}{a_2} + \frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|} \right) = (b + \sqrt{-b}; \sqrt{-b})$$

и

$$C : \left(-\frac{b_2}{a_2} - \frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|}; \frac{a_1}{a_2} - \frac{\sqrt{|D|}}{|a_2|} \right) = (b - \sqrt{-b}; -\sqrt{-b}).$$

Общий вид графика функции (24) (проекция функции (16) для ситуаций 3 и 4) приведен на рис.4.

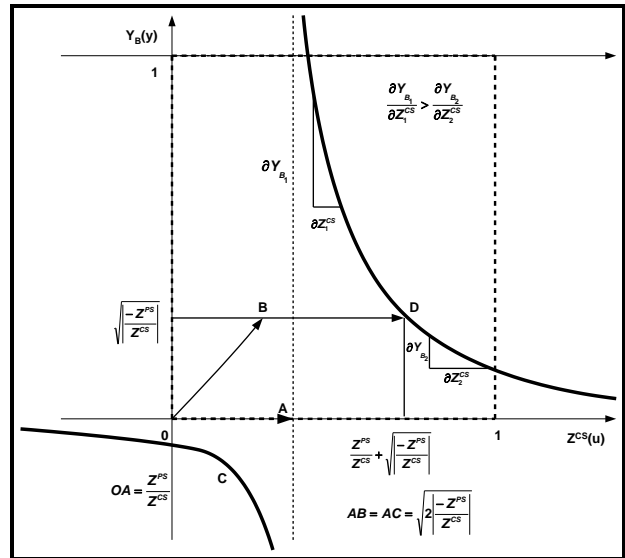


Рис.4. Проекция функции y_B при условии реализации типовых ситуаций 3 и 4 (в нормированной системе координат)

Из экономического смысла задачи, с учетом ограничений, следует, что интересующая нас область изменения функции соответствует области допустимых значений, которая на рисунке выделена толстой штриховой линией.

Обратим внимание на то, что рассматриваемая функция нелинейна и вогнута вниз, то есть скорость

изменения функции $\left(\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial Y_B}{\partial Z^{CS}} \right)$ непостоянна на всем

протяжении области допустимых значений и уменьшается при движении по оси аргумента вправо.

Параметр b изменяется в пределах $[0, z^{CS}]$, и в

этой ситуации область исследования определяется условно бесконечным семейством проекций функции (16).

Поскольку в типовых ситуациях 3 и 4 имеем $b = x = const$, то изменение величины u будет определяться исключительно изменением величины z , что позволяет осуществить замену переменных $z = u - x$.

В связи с этим семейство указанных проекций исследуемой функции в пределах $z^{PS} (0; 0.15)$, изменяющейся с шагом $\Delta z^{PS} = 0.01$, изображено на рис. 5 в

нормированных координатах $\{y_B, z^{TS}\}$.

На рис. 5 наиболее интересующими нас элементами будут являться:

- выделенная прямоугольником *рабочая область*, соответствующая области определяемой гипотезами 4) и 5);

- ограничения по показателям v и w , изображенные в виде двух прямых – АВ (для v) и CD (для w), перпендикулярных оси z^{TS} .

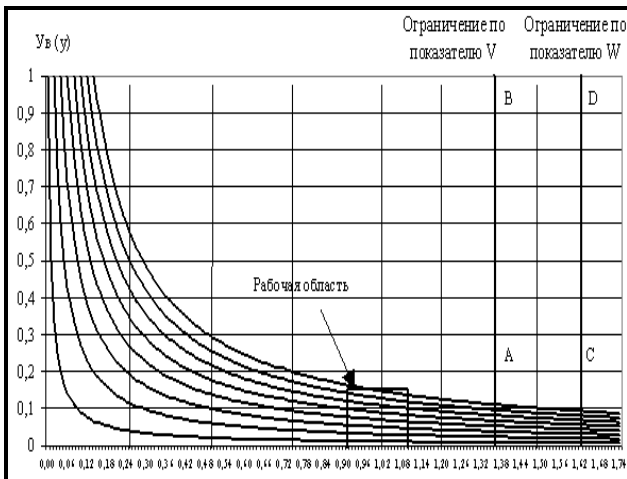


Рис.5. Влияние изменения z^{TS} на y_B (в нормированной системе координат): диапазон z^{TS} [0;1,75], шаг 0.05; диапазон z^{PS} [0;0,15], шаг 0.01

Типовая ситуация 5, с точки зрения трансформации функции y_B , также представляет интерес. В данном случае ее проекция на плоскость $\{y_B, z^{CS}\}$ представляет собой дробно-линейную (гиперболического типа) функцию одного аргумента x , вида:

$$y = f(x) = \frac{x}{x + c}, \tag{25}$$

где $c = const$ – параметр.

С математической точки зрения выражение (25) аналогично выражению (24).

На рис.6 график нелинейной, выпуклой вверх функции (25) (проекция функции (16)) показан в нормированных координатах $\{y_B, z^{CS}\}$. В данном случае динамика изменения уровня просроченной задолженности также определяется как изменением аргумента x , так и абсолютной величиной параметра c . Область допустимых значений выделена толстой штриховой линией.

Таким образом, решение рассматриваемой задачи возможно путем разделения ее на совокупность частных задач нескольких стандартных типов. Для конкретного банка изменение состояния кредитного портфеля может быть представлено различными последовательностями данных частных задач.

Автором предлагается метод решения общей задачи прогнозирования величины удельного веса просроченной ссудной задолженности y_B , реализуемый путем построения графических решений последовательности частных задач и выражающийся в использовании нормированной номограммы (см. рис.7).

Номограмма построена путем совмещения оси $y_B(y)$ для трех возможных семейств проекций исследуемой функции. В правой части номограммы ис-

пользуется ось-шкала y_B , рабочей является ось y_B при $z^{CS} = 1$.

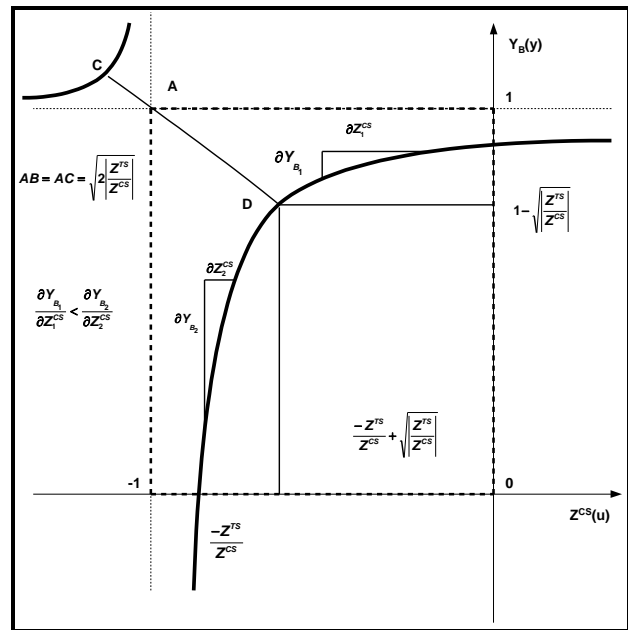


Рис.6. Проекция функции y_B при условии реализации типовой ситуации 5 (в нормированной системе координат)

При этом справа от оси-шкалы y_B тонкими штриховыми линиями изображены траектории изменения функции при уменьшении z^{PS} (с шагом, равным 0.05), и фиксированных значениях z^{TS} (в диапазоне [0;1]). Наклонная толстая прямая линия соответствует траектории роста y_B при увеличении z^{PS} и неизменной величине z^{CS} .

Семейство кривых, изображенных тонкими сплошными линиями, соответствует набору траекторий изменения y_B при фиксированном значении z^{PS} (в диапазоне [0;1] с шагом 0.05). Диапазон изменения z^{CS} принят в интервале [0;3]. Линия ограничения по величине показателя v , параллельная оси y_B , строится индивидуально по данным конкретного коммерческого банка, линия ограничения по величине показателя w едина для конкретной отрасли или региона. На рис.7 положение линий v и w выбрано условно.

Штрих-пунктирными линиями на рисунке обозначены границы для решения задачи в общей постановке, толстой штрих-пунктирной линией – величина $y_{B, min}$ для решения задачи в частной постановке. Рабочая область выделена затемнением.

Для понимания правил пользования номограммой достаточно привести ряд условных упрощенных примеров.

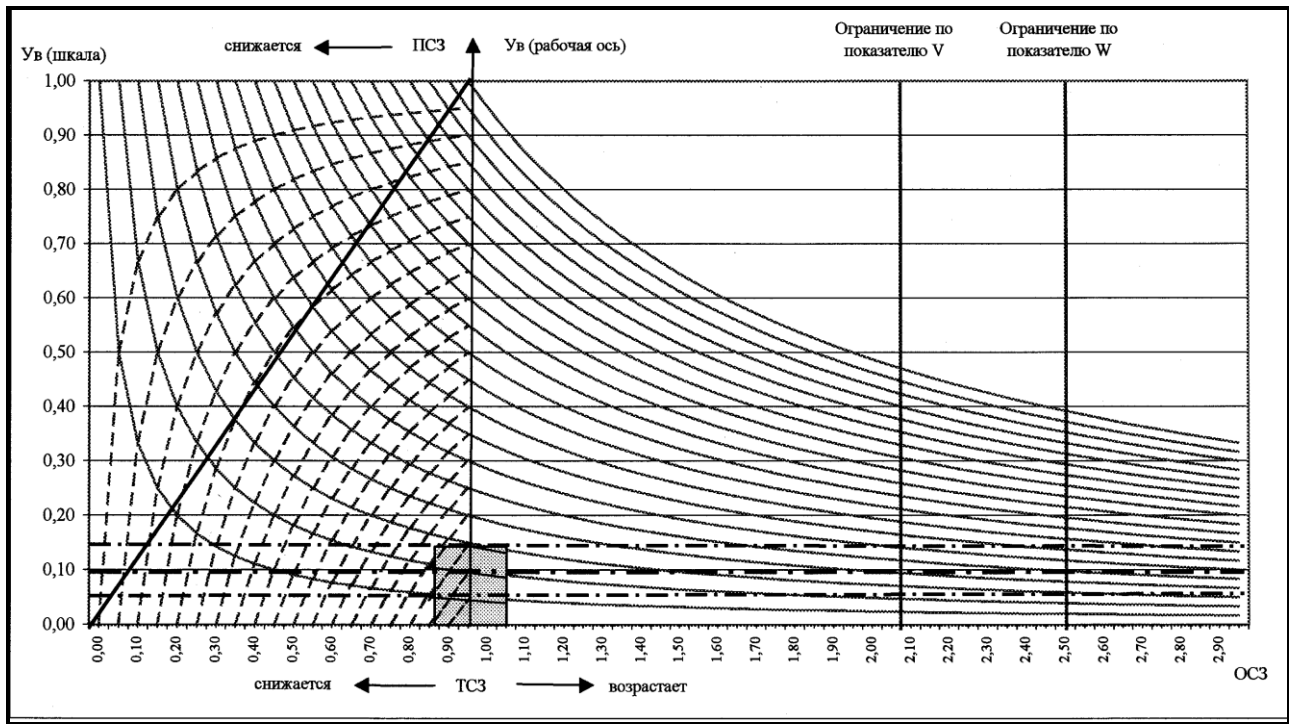


Рис. 7. Номограмма для прогнозирования показателя удельного веса просроченной ссудной задолженности (γ_b - по вертикали; z^{cs} - по горизонтали)

Пример 1

Определить, какими путями банк может снизить уровень z^{ps} от его начальной величины 0.8 до величины 0.6 (см. рис. 8а).

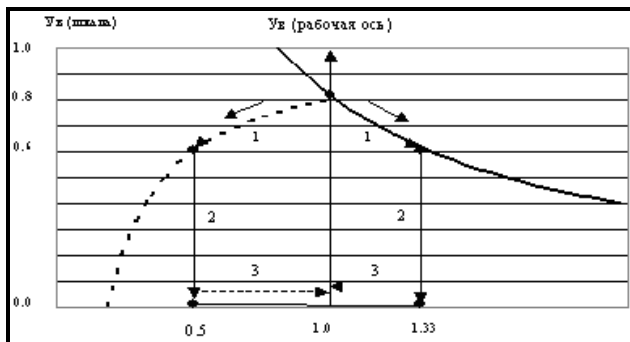


Рис. 8а. Иллюстрация правил пользования номограммой при прогнозировании γ_b . – пример 1

На номограмме находят точки пересечений кривых соответствующих $\gamma_b = 0.8$ с горизонтальной линией $\gamma_b = 0.6$ (шаг 1) и опускают из этих точек перпендикуляры до пересечения с осью z^{cs} (шаг 2). На оси z^{cs} в левой части номограммы находим точку пересечения при значении 0.5, а в правой части номограммы – при значении 1.33.

Поскольку номограмма построена при условии нормирования по z^{cs} , то для вычисления абсолютных значений искомых величин следует провести операцию, обратную нормированию.

Вывод: для решения поставленной задачи необходимо либо уменьшить z^{ps} на 62.5% текущего его объема, ли-

бо увеличить z^{cs} , путем выдачи новых кредитов в 1.33 раза (довести до 133%). При этом z^{ts} вырастет на 166.5%.

Естественно, что аналогичный результат можно получить в любой доступной банке последовательности действий по дискретному снижению z^{ps} и дискретному увеличению z^{ts} (z^{cs}). Следует помнить, что в связи с тем, что величины z^{cs} и z^{ts} связаны ограничением (13), а в номограмме присутствует исключительно ось z^{cs} , то после каждого дискретного шага необходимо сносить текущую точку на рабочую ось γ_b (шаг 3) и следующий этап начинать с полученной точки на указанной оси.

Пример 2

Определить, каким станет уровень z^{ps} при погашении 30% этого вида ссудной задолженности (рис. 8б). Текущее значение $\gamma_b = 0.8$.

На номограмме по оси z^{cs} влево от рабочей оси γ_b откладывают отрезок, равный 0.3 (шаг 1); из полученной точки восстанавливают перпендикуляр до пересечения с кривой $\gamma_b = 0.8$ (шаг 2), и полученную точку сносят на ось γ_b (шаг 3). Значение γ_b в полученной точке равно 0.68.

Вывод: Уровень z^{ps} будет равен 0.68 (или 68%).

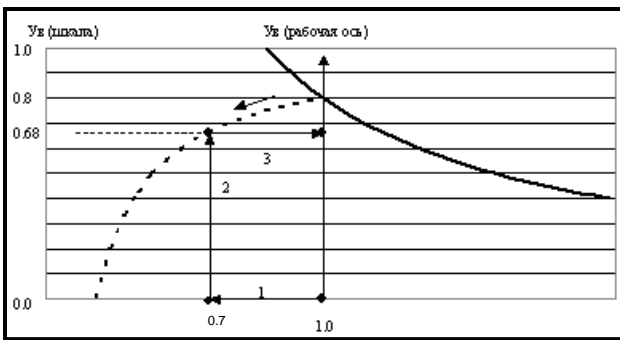


Рис. 8б. Иллюстрация правил пользования номограммой при прогнозировании y_b – пример 2

Пример 3

Определить, каким станет уровень z^{ps} при увеличении кредитного портфеля в 1.8 раза, при начальном значении $y_b = 0,9$ (см. рис. 8в).

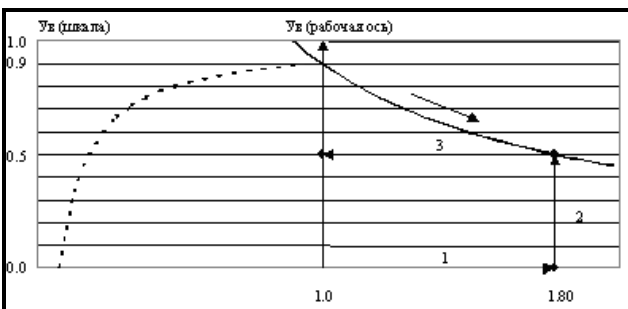


Рис. 8в. Иллюстрация правил пользования номограммой при прогнозировании – пример 3

По оси z^{cs} вправо от рабочей оси y_b откладывают отрезок, равный приросту z^{ts} , т.е. 0.8 (шаг 1); восстанавливают перпендикуляр до пересечения с кривой $y_b = 0.9$ (шаг 2) и сносят полученную точку на ось y_b (шаг 3). Наблюдают результат.

Вывод: Уровень z^{ps} будет равен 0.5.

Пример 4

Насколько увеличится $y_b = 0.25$ при уменьшении z^{cs} в два раза (на 50% или на 0.5).

Иллюстрация примера представлена на рис. 8г.

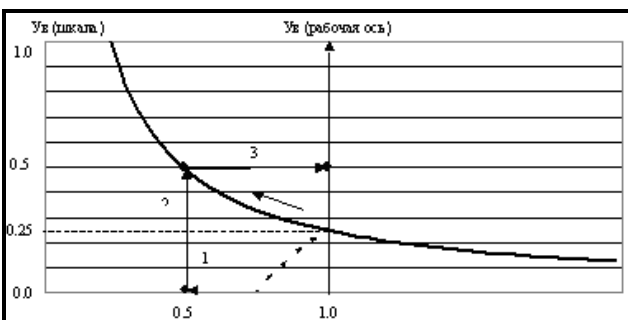


Рис.8г. Иллюстрация правил пользования номограммой при прогнозировании – пример 4

На оси z^{cs} откладывают влево от рабочей оси y_b отрезок, равный 0.5 (шаг 1), и восстанавливают пер-

пендикуляр до пересечения с кривой $y_b = 0.25$ (шаг 2). Полученную точку сносят на ось y_b (шаг 3), получают значение, равное 0,5.

Вывод: y_b вырастет на величину $0.5 - 0.25 = 0.25$ (или 25%).

Каковы экономические последствия возможных действий банка по снижению уровня просроченной задолженности?

Уменьшение z^{ps} возможно на практике двумя различными путями: 1) фактическим возвратом денежных средств заемщиком или третьим заинтересованным лицом (конструктивный путь) и 2) списанием безнадежной ко взысканию z^{ps} за счет резерва на возможные потери по ссудам (деструктивный путь).

Выбирая конструктивный путь решения проблемы, банк восстанавливает объем кредитно-инвестиционного ресурса и, вновь направляя его в сферу кредитования (рост z^{ts}), еще больше снижает величину y_b . При этом доходы банка увеличиваются на объем ранее созданных резервов, связанных с возможными потерями по ссудам [13], улучшаются общие показатели банка и обеспечивается рост прибыли, а в конечном счете – собственных средств.

Выбирая деструктивный путь, банк вынужден списать задолженность с баланса (уменьшив тем самым y_b), но при этом кредитно-инвестиционный ресурс банка не восстанавливается (уменьшается) и потенциальные доходы банка также уменьшаются на величину списанных ссуд.

Заметим, что в ряде случаев возможны ситуации, когда банк списывает ссудную задолженность (y_b уменьшается), а затем все-таки получает реальный возврат денежных средств, восстанавливая, таким образом, доходы и кредитно-инвестиционный ресурс.

С учетом условия соответствия показателей российских банков международным стандартам финансовой отчетности и рассуждений при рассмотрении вариантов общей постановки задачи нас в большей степени будет интересовать участок номограммы в диапазоне z^{ps} от 0 до 0.15 z^{cs} (при этом $y_b = 0-15\%$).

Принимая во внимание гипотезу 4) о том, что нормированная величина кредитного портфеля банка (z^{cs}) дискретно не может изменяться на величину большую, чем 0,1, определим, что нас интересует участок номограммы в пределах [0.9; 1.1], при условии $1.1 z^{cs} \leq \{v, w\}$.

Рабочая область номограммы представлена на рис.9 в более крупном масштабе.

Предположим, что на малом сегменте [0.9;1.1] кривые семейства гипербол, соответствующих изменению z^{ts} (z^{cs}), приближенно представимы в виде прямых линий. Допустимая ошибка аппроксимации принимается равной величине $\leq 2.0\%$.

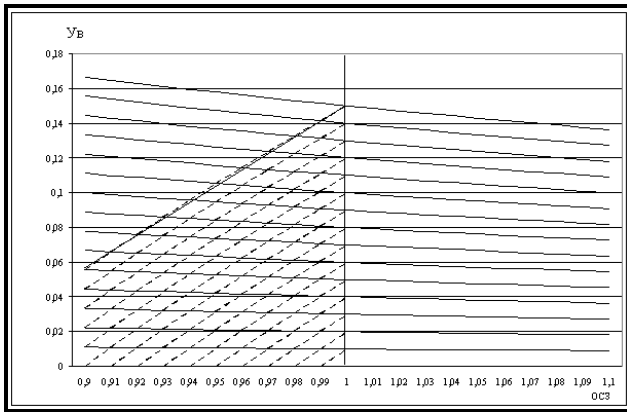


Рис.9. Динамика изменения γ_b в рабочей области ($z^{cs} = 0.9-1.1$; $z^{ps} = 0-0.15$)

Для аппроксимации можно воспользоваться известной формулой Тейлора для разложения функции в ряд [14]:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

и взять столько членов, сколько требуется для сохранения точности расчетов, а соответственно адекватности действий, предпринимаемых банком.

На сегменте $z^{cs} [0.9; 1.1]$ проведем расчет точности аппроксимации по формуле Тейлора для величин z^{ps} , равных 0.15 (в окрестности точки $z^{ts} = 0.85$; вариант 1) и 0.05 (в окрестности точки $z^{ts} = 0.95$; вариант 2), с использованием разложения до двух и трех членов.

Разложение в ряд Тейлора до трех членов, применительно к условиям задачи, будет иметь следующий вид:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2$$

или

$$f(z) = \frac{x}{x + z_0} + \frac{(-x)}{(x + z_0)^2} \cdot \frac{(z - z_0)}{1!} + \frac{2x}{(x + z_0)^3} \cdot \frac{(z - z_0)^2}{2!}$$

Результаты расчетов приведены в табл.1.

Таким образом, ошибки аппроксимации при использовании линейного уравнения не превышают 1.0% и соответствуют заданной точности решения задачи. При использовании разложения до трех членов точность решения задачи повышается до 0.1%.

Следовательно, исходные кривые с заданной степенью точности могут быть аппроксимированы уравнениями $y = ax + b$ в виде двух членов разложения в ряд Тейлора.

На том же сегменте проведем расчет точности аппроксимации по формуле Тейлора для величин z^{ts} , равных 0.85 (в окрестности точки $z^{ps} = 0.15$) и 0.95 (в

окрестности точки $z^{ps} = 0.05$), с использованием разложения до двух и трех членов.

**Таблица 1
Сравнительные данные значений функции и разложения в ряд Тейлора**

Вариант	Значение функции в рассматриваемой точке	Разложение функции в ряд Тейлора:			
		Значение при 2х членах	Ошибка при 2х членах (%)	Значение при 3х членах	Ошибка при 3х членах (%)
1	0.1667	0.1650	1.00	0.1665	0.1
	0.1579	0.1575	0.25	0.1579	0.0125
	0.1429	0.1425	0.25	0.1429	0.0125
	0.1364	0.1350	1.00	0.1365	0.1
2	0.0556	0.0550	1.00	0.0555	0.1
	0.0526	0.0525	0.25	0.0526	0.0125
	0.0476	0.0475	0.25	0.0476	0.0125
	0.0455	0.0450	1.00	0.0455	0.1

Разложение в ряд Тейлора до трех членов будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{x_0}{x_0 + z} + \frac{z}{(x_0 + z)^2} \cdot \frac{(x - x_0)}{1!} + \frac{(-2z)}{(x_0 + z)^3} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!}$$

Результаты расчетов двух обозначенных вариантов при заданных условиях приведены в табл.2.

Из табл.2 видно, что значение ошибки как для 2-х, так и для 3-х членов разложения в ряд Тейлора превышают принятую допустимую величину ошибки, что естественно, так как разложение Тейлора может быть справедливо лишь в относительно малых окрестностях заданного значения аргумента. В нашем же случае изменение z^{ps} происходит в пределах всей области его допустимых значений.

**Таблица 2
Сравнительные данные значений функции и разложения в ряд Тейлора**

Вариант	Значение функции в рассматриваемой точке	Разложение функции в ряд Тейлора:			
		Значение при 2х членах	Ошибка при 2х членах (%)	Значение при 3х членах	Ошибка при 3х членах (%)
1	0.1282	0.1288	0.42	0.1293	0.84
	0.1053	0.1075	2.13	0.1096	4.14
	0.0811	0.0863	6.37	0.0910	12.27
	0.0556	0.0650	17.00	0.0735	32.30
2	0.0404	0.0405	0.24	0.0406	0.47
	0.0306	0.0310	1.27	0.0314	2.51
	0.0206	0.0215	4.28	0.0224	8.42
	0.0104	0.0120	15.20	0.0135	29.79

В данном случае ни линейная, ни квадратичная аппроксимация не обеспечивает на заданном интервале изменения аргумента допустимых ошибок, аппроксимация не может быть применена для решения задачи и следует пользоваться исключительно исходной формулой функции.

Выводы

1. Прогнозирование величины показателя удельного веса просроченной ссудной задолженности осуществляется на долгосрочном и краткосрочном периодах. Задачи возникающие на каждом из этих периодов различны по уровню сложности, применяемому математическому аппарату и достигаемой точности решения.

2. При прогнозировании на долгосрочную перспективу показатель γ_b является нелинейной функцией многих переменных, определяемых макроэкономическими (внешними) и микроэкономическими (внутренними) факторами, значительная часть которых трудно поддается прогнозной оценке и формализации. Показано, что в условиях имеющейся неопределенности задача является слабоструктурированной и может быть решена приближенно. Как правило ее решение требует сочетания сложного математического аппарата (вероятностно-статистический и имитационно-оптимизационный подходы) с использованием неформальных экспертных процедур.

3. На краткосрочном периоде в ряде случаев удается осуществить более точный прогноз показателя γ_b с учетом двух доминантных переменных: просроченной ссудной задолженности (z^{ps}) и текущей ссудной задолженности (z^{ts}). Для этих случаев при достаточно правдоподобных гипотезах на изменение величин z^{ps} , z^{ts} и z^{cs} сформулирована оптимизационная задача (система соотношений (11)-(15)) и определен общий вид функции γ_b (см. рис.2).

4. Полученные в работе результаты позволяют сопоставить рутинные процедуры, используемые при краткосрочном прогнозе величины γ_b , с научно-обоснованным подходом к данному процессу и свидетельствуют о следующем:

а). в практической деятельности сложившийся тип ментальной установки руководителей и специалистов банков при характеристике взаимосвязи z^{ps} , z^{ts} и γ_b тяготеет к «линейному» способу мышления;

б). фактическая взаимосвязь z^{ps} , z^{ts} и γ_b характеризуется значительной нелинейностью гиперболического типа и в большинстве случаев не поддается аппроксимации линейными функциями;

в). в задаче выделена «рабочая область» (предпочтительный диапазон изменения рассматриваемых параметров) внутри которой линеаризация связей с допустимой ошибкой возможна лишь для показателей z^{ts} и γ_b .

5. Разработан численный метод практического прогнозирования показателя γ_b на краткосрочном периоде (метод нормированных номограмм). На основе семейств зависимостей гиперболического типа метод

позволяет выявить альтернативные способы достижения «желаемой» величины γ_b с использованием конструктивного и деструктивного путей, предполагающих различные экономические последствия применяемых мер по изменению величин z^{ps} и z^{ts} . Сформулированы методические принципы построения таких номограмм в зависимости от различных задач прогнозирования, при этом процедура нормирования вызвана требованиями практики, когда планирование осуществляется от единицы или 100%.

Приведены конкретные примеры иллюстрирующие применение предложенного метода.

Метод является удобным и наглядным инструментом для прогнозирования величины показателя удельного веса просроченной ссудной задолженности и может быть рекомендован для использования в практической деятельности кредитных организаций.

Литература

1. Отчет Сбербанка России за 1999г. – М., Сбербанк России, 1999.
2. Бюллетень банковской статистики N 8(87). – М., Центральный банк Российской Федерации, 2000.
3. Бюллетень банковской статистики N 10(89). – М., Центральный банк Российской Федерации, 2000.
4. Банковская система России: кризис и перспективы развития. /А.Ведев, И.Лаврентьева, Е.Шарипова и др. – М.: АП «Веди», 1999.
5. Вестник Банка России, N35(463), 28.06.2000. – М., Центральный Банк Российской Федерации.
6. Уотшем Т.Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. Учеб. Пособие для вузов / Пер. с англ. Под ред. М.Р.Ефимовой. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999.
7. Лотов А.В. О понятии обобщенных множеств достижимости их построении для линейных управляемых систем. – ДАН СССР, т.250, N5, 1980.
8. Лотов А.В. О понятии и построении обобщенных множеств достижимости для линейных управляемых систем в частных производных. – ДАН СССР, т.261, N2, 1981г.
9. Лотов А.В. Анализ потенциальных возможностей экономических систем. «Экономика и математические методы», т.17, вып.2, 1981.
10. Егорова Н.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В. Использование метода обобщенных множеств достижимости в имитационной системе отраслевого планирования. / Сб. «Методы имитационного моделирования экономических систем». – М., ЦЭМИ АН СССР, 1985.
11. Романовский П.И. Общий курс математического анализа (в сжатом изложении). – М., Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
12. Бронштейн И.Н, Семендяев К.А. Справочник по математике (для инженеров и учащихся втузов. – М., Наука, 1980.
13. Инструкция Банка России от 30.06.97г. N62а «О порядке формирования и использования резерва на возможные потери по ссудам».
14. Банах С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Пер. с польского, ред. С.И.Зуховицкий. – М., Наука, 1966.

Смулов Алексей Михайлович