ПРОБЛЕМЫ ИНВЕСТИРОВАНИЯ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Мальцев А.С., аналитик ЗАО «Центр анализа проектов» (г. Москва), аспирант кафедры «Математические методы анализа экономики»

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Введение

При расчёте интегральных показателей инвестиционных проектов с неординарной схемой денежных потоков (последовательное чередование знаков в схеме денежных потоков от трёх видов деятельности) аналитики прибегают к использованию специальных программ, таких как **Project Expert** (компания Pro–Invest), которая в свою очередь является мощным программным продуктом, написанным на алгоритмическом языке **C++**, со встроенным модулем, позволяющим написать подпрограмму, учитывающую характерные особенности какого-либо инвестиционного проекта. Однако при всех возможностях инвестиционных программ, позволяющих с достаточной большой степенью точности (месячный шаг планирования) построить прогнозный полный финансовый план, данные программные продукты не предоставляют возможности рассчитать множественные значения интегральных показателей (IRR, DPP) для инвестиционных проектов с неординарной схемой денежных потоков (nonnormal).

Авторы статьи поставили своей целью представить и дать соответствующую экономическую интерпретацию математическим методам при расчёте таких интегральных показателей, как внутренняя норма доходности (Internal Rate of Return, **IRR**), дисконтированный период окупаемости (Discounted Payback Period, **DPP**), которые в свою очередь могут иметь множественное значение для инвестиционных проектов с неординарной схемой денежных потоков (nonnormal). Особенно бывает важным знать точные значения **DPP** для той или иной инвестиционной фазы. Поскольку при построении полного финансового плана банки обычно кредитуют инвестиционные проекты со сроком окупаемости не более 3 – 5 лет в зависимости от специфики инвестируемой отрасли и финансового положения предприятия.

В качестве примера авторы статьи приводят схему денежных потоков при расчёте инвестиционной стоимости оборудования одного крупного машиностроительного предприятия. Характерной особенностью рассматриваемого инвестиционного проекта является тот факт, что инвестиционные затраты производятся не в начальной стадии реализации проекта, как это обычно бывает при рассмотрении инвестиционных проектов со стандартной схемой денежных потоков. Объем и спрос на рынке машиностроительной отрасли позволяют производить загрузку производственных мощностей для выпуска готовой продукции старого образца в течение двух ближайших лет. Это позволит иметь дополнительную денежную наличность, и тем самым меньшую потребность во внешнем финансировании при реализации инвестиционной фазы на третьем году реализации инвестиционного проекта. Рост чистой денежной наличности (Net Present Value, NPV) с учётом временной стоимости денег и без учёта денежного потока от финансовой деятельности, то есть финансовая реализуемость проекта в данном случае не рассматривается, показан на рис. 1 в виде кривой (алгебраического полинома). Таким образом, на третьем году реализации проекта производятся инвестиционные затраты длительностью 10 месяцев, с целью модернизации и переналадки действующего оборудования под выпуск новой машиностроительной продукции, пользующейся спросом на рынке. Остаточный ресурс оборудования после проведения работ по модернизации и переналадки оценивается на уровне 8 лет. Итого общая длительность инвестиционного проекта при расчёте его интегральных показателей составляет **10** лет.

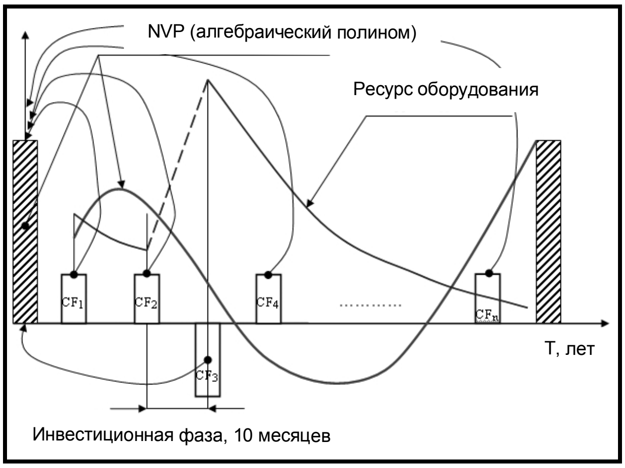

Рис. 1. График схемы денежных потоков, NPV и ресурса оборудования по годам реализации проекта

Отметим, что при оценке значения ***NPV*** в расчёт принимаются денежные потоки от операционной, инвестиционной, финансовой деятельностей. От финансовой деятельности учитываются только проценты по кредиту, поскольку само тело кредита не учитывается при расчёте значения ***NPV***, так как оно «приходит» и «уходит», то есть не учитываются платежи, связанные с получением и возвратом кредитов.

$$NPV = \sum_{i=1}^{N} CF_{iOPER.} - \sum_{i=1}^{N} CF_{iINVEST} - \sum_{i=1}^{N} \% .$$

где

$\sum_{i=1}^{N} CF_{iOPER.}$ – сумма денежных потоков от операционной деятельности за весь период реализации проекта;

$\sum_{i=1}^{N} CF_{iINVEST}$ – сумма денежных потоков от инвестиционной деятельности за весь период реализации проекта;

$\sum_{i=1}^{N} \%$ - сумма выплаченных процентов за весь период реализации проекта (сумма денежных потоков от финансовой деятельности).

В табл. 1 и 2 приводятся прогнозные значения денежных потоков от трёх видов деятельности при ставке дисконтирования r = 0,18, что в первую очередь отражает уровень риска рассматриваемого инвестиционного проекта и риск капитальных вложений в данный проект, а также средний уровень альтернативных вложений на рынке капитала, на момент осуществления инвестиционного проекта.

Таблица 1

ПРОГНОЗНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

№	Наименование	1 Квартал	2 Квартал	3 Квартал	4 Квартал	1 год	2 год
1	CF_i от операционной деятельности, тыс. руб.	8 665	4 334	5 110	5 873	31 589	26 243
2	CF_i от инвестиционной деятельности, тыс. руб.						-700 000
3	CF_i от финансовой деятельности, проценты, % по кредиту, *тыс. руб.*		-1 083	-3 250	-3 250	-5 417	
4	Σ денежный поток, тыс. руб. (п.1+п.2+п.3).	**8 665**	**3 251**	**1 860**	**2 623**	**26 172**	**-673 757**
5	Фактор дисконтирования	**1,0000**	**0,9595**	**0,9206**	**0,8833**	**0,8131**	**0,6891**
6	Σ дисконтированный денежный поток накопленным итогом, тыс. руб. (п.5 * п.6).	**8 665**	**3 119**	**1 712**	**2 317**	**21 281**	**-464 268**

Таблица 2

ПРОГНОЗНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ (продолжение)

№	Наименование	3 год	4 год	5 год	6 год	7 год	8 год	9 год
1	CF_i от операционной деятельности, тыс. руб.	317 450	303 146	315 702	362 131	414 409	475 799	549 412
2	CF_i от инвестиционной деятельности, тыс. руб.							
3	CF_i от финансовой деятельности, проценты, % по кредиту, тыс. руб.	-48 167	-197 461	-204 283	-210 411	-216 723		
4	Σ денежный поток накопленным итогом, тыс. руб. (п.1+п.2+п.3)	**269 283**	**105 685**	**111 419**	**151 720**	**197 686**	**475 799**	**549 412**
5	Фактор дисконтирования	**0,5840**	**0,4949**	**0,4194**	**0,3554**	**0,3012**	**0,2553**	**0,2163**
6	Σ дисконтированный денежный поток накопленным итогом, тыс. руб. (п.5 х п.6)	**157 251**	**52 302**	**46 728**	**53 924**	**59 543**	**121 450**	**118 847**

1. ПОСТРОЕНИЕ ДЕНЕЖНОГО ПОТОКА

1.1. Построение денежных потоков в форме алгебраического многочлена

Формула для расчёта значения ***NPV*** денежного потока рассматриваемого инвестиционного проекта в классической постановке задачи имеет следующий вид:

$$NPV=\frac{CF_{01}}{(1+r_q)^0}+\frac{CF_{02}}{(1+r_q)^1}+\frac{CF_{03}}{(1+r_q)^2}+\frac{CF_{04}}{(1+r_q)^3}+$$
$$+\frac{CF_1}{(1+r)^1}+\ldots+\frac{CF_6}{(1+r)^6}+\frac{CF_7}{(1+r)^7}+\frac{CF_8}{(1+r)^8}+$$
$$+\frac{CF_9}{(1+r)^9}. \qquad (1.1)$$

Здесь следует отметить, что в течение первого года построение полного финансового плана, а следовательно, выполнение условия финансовой реализуемости проекта (сумма денежных потоков от трёх видов деятельности больше или равна нулю) проводится с шагом поквартально. В некоторых случаях, особенно когда окупаемость проекта достигается в течение реализации первого года, финансовый план (денежные потоки от всех видов деятельности) строится с шагом месяц.

Поскольку ***IRR*** является такой ставкой дисконтирования, при которой значение ***NPV*** равняется нулю, следовательно, постановка задачи для нахождения множественного значения ***IRR*** выглядит следующим образом:

$$NPV = f(r)$$

Или

$$\sum_{i=0}^{N}\frac{CF_i}{(1+IRR)^i}=0 \qquad (1.2)$$

Вообще говоря, ***NPV*** можно представить в виде алгебраического многочлена (полинома) ***n***–ой степени, где ***n*** – число периодов (лет) реализации инвестиционного проекта, тогда, обращаясь к фундаментальной теореме алгебры, можно сказать, что функция ***NPV(r)*** в виде алгебраического полинома степени **≤ *n*** имеет максимум n действительных или комплексных корней.

Введём условные обозначения, при этом воспользовавшись следующей формулой:

$$r_q = (1 + r)^{1/4} - 1,$$

где

r_q – значение ставки дисконтирования при дисконтировании денежных потоков с шагом по квартально;

r – значение ставки дисконтирования при дисконтировании денежных потоков с годовым шагом.

Тогда при квартальном шаге дисконтирования фактор (коэффициент) дисконтирования имеет следующий вид:

$$\left[\frac{1}{(1+(1+r)^{1/4}-1)}\right]^n=\left(\frac{1}{1+r}\right)^{1/4*n},$$

где

n – порядковый номер года реализации проекта, тогда вводя условное обозначение $\left(\frac{1}{1+r}\right)^{1/4}=x$, получим следующее выражение для фактора дисконтирования x^n.

При приведении годовых значений денежных потоков к текущему моменту (моменту начала реализации проекта) авторы статьи решили воспользоваться значением фактора дисконтирования для второго квартала дисконтируемого года, то есть денежные потоки **приводятся на середину года**. При определении данного алгоритма авторы статьи руководствовались тем фактом, что значение ***NPV*** какого-либо реализуемого проекта при дисконтировании его с квартальным шагом всегда меньше, нежели чем дисконтирование денежного потока с годовым шагом.

В данном случае в качестве наглядного примера можно привести своего рода «лестницу», при прохождении которой мы затрачиваем **большее количество ступенек**, в случае дисконтирования с шагом поквартально.

Таким образом, при квартальном шаге дисконтировании фактор (коэффициент) дисконтирования годового значения денежного потока для его второго квартала имеет следующий вид:

$$x^{(n+1)*m-1},$$

где

n – порядковый номер года дисконтируемого денежного потока;

m = 4 – количество кварталов в каждом году.

Так, например, для второго квартала первого года или пятого квартала, отсчитывая с начала реализации инвестиционного проекта, показатель степени при x равен:

$(n+1)*m-3 = 2 \times 4 - 3 = 5$.

В рассматриваемом случае Авторы статьи ввели обозначение $\left(\frac{1}{1+r}\right)^{1/4} = x$, для того чтобы степени при всех ***x*** (факторы дисконтирования) имели целочисленное значение, поскольку при обращении к **фундаментальной теореме алгебры** рассматриваемый алгебраический многочлен (полином) имеет n корней действительных или комплексных, при условии, что каждый корень считается столько раз, какова его кратность. При этом ***r*** является корнем уравнения (1.5) кратности ***n***, если при r вместе с функцией ***NPV(r)*** обращаются в ноль её производные до ***(n-1)***-го порядка включительно, то есть $NPV(x) = NPV'(x) = \ldots = NPV^{(n-1)}(x) = 0$, а $NPV^{(n)}(x) \neq 0$.

Применяя условные обозначения и подставляя их в вышеприведённый денежный поток рассматриваемого инвестиционного проекта, получим формулу для расчёта ***NPV*** денежного потока в форме алгебраического многочлена:

$$NPV(x) = \sum_{i=0,\,j=1}^{J=4} CF_{ij} * x^{j-1} + \sum_{i=1}^{n} CF_i * x^{4*i+1} =$$
$$= CF_{01}*x^0 + CF_{02}*x^1 + CF_{03}*x^2 + CF_{04}*x^3 + CF_1*x^5 +$$
$$+ CF_2*x^9 + CF_3*x^{13} + CF_4*x^{17} + \ldots + CF_9*x^{37} \qquad (1.3)$$

где

CF_{ij}, - денежный поток от трёх видов деятельностей, где ***i, j*** – порядковый номер года и квартала соответственно;

x – фактор дисконтирования.

При постановки задачи в классическом виде, алгебраический многочлен имеет вид:

$$P_n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \qquad (1.4)$$

где

n – количество лет реализации инвестиционного проекта,

a_n, a_0 – действительные числа, коэффициенты (значения денежных потоков по годам CF_{ij}).

x^n, x^{n-1} – факторы (коэффициенты) дисконтирования для соответствующего периода денежных потоков.

Тогда уравнение для нахождения множественного значения корней алгебраического многочлена рассматриваемого инвестиционного проекта, слагаемыми которого являются денежные потоки от трёх деятельностей, умноженные на фактор дисконтирования, можно записать следующим образом:

$$NPV(x) = CF_9*x^{37} + \ldots + CF_4*x^{17} + CF_3*x^{13} +$$
$$+ CF_2*x^{11} + CF_1*x^5 + CF_{04}*x^3 + CF_{03}*x^2 +$$
$$+ CF_{02}*x^1 + CF_{01} = 0. \qquad (1.5)$$

Корнями (нормальными и аномальными) приведённого алгебраического многочлена являются значения **годовой** ставки дисконтирования r, при котором

$$NPV(x)=0,$$

где

$$\left(\frac{1}{1+r}\right)^{1/4} = x\ .$$

Подставляя значения денежных потоков рассматриваемого инвестиционного проекта для нахождения его действительных корней в вышеприведённую формулу, получим уравнение нижеследующего вида:

$$NPV(x) = 549\,412*x^{37} + 475799*x^{33} + 197\,686*x^{29} +$$
$$+ 151\,720*x^{25} + 111\,419*x^{21} + 105\,685*x^{17} +$$
$$+ 269\,283*x^{13} - 673\,757*x^9 + 26\,172*x^5 +$$
$$+ 2\,623*x^3 + 1\,860*x^2 + 3\,251*x + 8\,665 = 0 \qquad (1.6)$$

где

$\left(\frac{1}{1+r}\right)^{1/4} = x$, r_1, r_2 – действительные корни алгебраического многочлена для приведённой схемы инвестиционного проекта с неординарной (nonnormal) схемой денежного потока.

В нашем случае полученный алгебраический многочлен имеет тридцать седьмую степень (***n***=37), таким образом, согласно **фундаментальной теореме алгебры** данный полином имеет максимум 37 корней. При этом, обращаясь к следствию теоремы о свойстве парной сопряжённости комплексных корней алгебраического многочлена, можно утверждать то, что полученный алгебраический многочлен имеет, по крайней мере, один действительный корень, поскольку степень данного многочлена является нечётной (***n***=37).

Следует также отметить, что в полученном алгебраическом многочлене (полиноме) значение коэффициентов при $x^{36}, x^{35}, \ldots, x^{32}, x^{31}, \ldots$ равно **нулю.**

1.2. Численные методы определения корней уравнения *NPV(x)=0*

Применяя **теорему об оценке модулей корней алгебраического многочлена**, оценим модули всех корней x_{*i} $(i = 1, .., n)$ полученного многочлена, которые в свою очередь удовлетворяют неравенству:

$$\frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}} < |x_{*i}| \leq 1 + \frac{A}{|a_n|},\ i = 1,\ldots,n,$$

где в нашем случае

$a_n = CF_i$;

$A = \max\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\} =$

$= \{|475\,799|, |0|, \ldots |197\,686|, |0|, \ldots, |151720|, |0|, \ldots |-$

$-673\,757|, |0|, \ldots |8\,665|\} = 673\,757;$

$B = \{|a_n|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|\} = |\} =$
$= \{|549412|, |0|, \ldots |197\,686|, |0|, \ldots, |151\,720|,$
$|0|, \ldots |-673\,757|, |0|, \ldots |3\,251|\} = 673\,757;$

$$\frac{1}{1+\frac{673\,757}{|8\,665|}} < |x_{*i}| < 1 + \frac{673\,757}{|549\,412|},$$

или

$$0{,}0127 < |x_{*i}| < 2{,}226,$$

то есть все корни (множественные значения

$$|x_{*i}| = \left(\frac{1}{1+r}\right)^{1/4} = x\ )$$

алгебраического многочлена (суммы дисконтированных денежных потоков) лежат внутри данного кольца. Далее путём последовательных алгебраических преобразований получаем следующее неравенство:

$$-0{,}567 \le |r| \le 3{,}84{*}10^7,$$

это означает, что все положительные значения **IRR** удовлетворяют неравенству

$$-0{,}567 \le r \le 3{,}84{*}10^7.$$

Полученный интервал весьма велик, чтобы говорить о каком-либо значении **r**. Поэтому применим **теорему Лагранжа о верхней границе положительных корней**, согласно которой за верхнюю границу положительных корней алгебраического многочлена может быть принято число

$$R = 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a_n}},$$

где

$a_n > 0$, a_i первый отрицательный коэффициент в последовательности $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$;

C – наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов.

Так как a_9 = – 673 757 – первый отрицательный коэффициент в коэффициентах алгебраического многочлена, то

$$i = 9,$$

а

$$C = max\ \{|-673\,757|\} =$$

= **673 757** – наибольшая (она же и единственная) из абсолютных величин отрицательных коэффициентов.

Следовательно,

$$R = 1 + \sqrt[37-9]{\frac{673\,757}{549\,412}} \cong 2{,}0073.$$

Далее применяем **теорему о нижних и верхних границах положительных и отрицательных корней алгебраического многочлена**, где положительные и отрицательные корни удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\frac{1}{R_1} \le x^{+}_{*i} \le R,\ -R_2 \le x^{-}_{*i} \le -\frac{1}{R_3},$$

где

R_1 – верхняя граница положительных корней уравнения

$$P^1(x) = x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right) = 0;$$

R_2 – верхняя граница положительных корней уравнения

$$P^2(x) = P_n(-x) = 0;$$

R_3 – верхняя граница положительных корней уравнения

$$P^3(x) = x^n P_n\left(-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Найдём нижнюю границу положительных корней. Составим уравнение:

$$P^1(x) = x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right) = x^{37} P_{37}\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^{37}[549\,412\frac{1}{x^{37}} + 475\,799\frac{1}{x^{33}} +$$

$$+197\,686\frac{1}{x^{29}} + \ldots - 673\,757\frac{1}{x^{9}}$$

$$+26\,172\frac{1}{x^{5}} + 2\,623\frac{1}{x^{3}} + 1\,860\frac{1}{x^{2}} + 3\,251\frac{1}{x} + 8\,665] =$$

$$= 8\,665x^{37} + 3\,251x^{36} + 1\,860x^{35} + 2\,623x^{34} -$$

$$-673\,757x^{29} + \ldots + 197\,686x^{2} + 475\,799x +$$

$$+ 549\,412 = 0$$

(старший коэффициент должен быть положительным).

Для этого уравнения i = 28,

$$C = max\{|-673\,757|\} = 673\,757,$$

поэтому

$$R_1 = 1 + \sqrt[37-28]{\frac{673\,757}{8\,665}} \cong 2{,}622.$$

Отсюда

$$\frac{1}{R_1} = 0{,}381 \le x^{+}_{*i} \le R = 2{,}0073.$$

Проводя ещё раз последовательно алгебраические преобразования, получим следующее неравенство:

$$-0{,}94 \le r \le 48{,}62.$$

Хотя полученный интервал достаточно сузился по сравнению с предыдущим, он тем не менее остаётся достаточно велик, чтобы уловить порядок значений корней функции ***NPV(r)*** и его корней ***r***, при котором ***NPV(r) =0***.

Поскольку **с экономической точки зрения можно интерпретировать только значение ставки дисконтирования (*r*), которое имеет положительные значения,** то авторы статьи не рассматривают диапазоны отрицательных значений x^{-}_{*i} действительных корней.

Таким образом, диапазон нахождения значений ***r***, которые имеют интерпретацию с экономической точки зрения лежит в интервале от 0 до 4 862%.

Теперь исследуем структуру корней уравнения. Так как квадрат каждого некрайнего коэффициента полученного алгебраического многочлена больше произведения двух его соседних коэффициентов, то согласно теореме Гюа о необходимом условии действительности всех корней алгебраического уравнения (многочлена), необходимое условие действительности всех корней уравнения выполняется.

На основе теоремы Декарта о количестве действительных корней алгебраического уравнения (многочлена) определим число положительных и отрицательных корней. Число перемен знака в многочлене $P_n(x)$ равно двум (2), следовательно, число положительных корней **равно двум** или меньше на чётное число, то есть равно нулю (0). Если число перемен знака в алгебраическом многочлене $P_n(-x)$ равно одному (1), то число отрицательных корней равно одному (1) или меньше на чётное число, то есть **их вовсе не существует**.

1.3. Применение различных методов при нахождении корней уравнения *NPV(r)=0*

Как уже было отмечено, денежный поток при расчете значения ***NPV*** можно представить в виде классического алгебраического многочлена. Поскольку в классической трактовке внутренняя норма доходности проекта есть некая ставка дисконтирования, при которой функция ***NPV(r)*** равняется нулю, то при отыскании корней функции ***NPV(r)*** в виде алгебраического многочлена приравниваем её к нулю.

$$NPV(x) = P_n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0, \qquad (1.7)$$

где

n – количество лет реализации инвестиционного проекта,

a_n, a_0 – действительные числа, коэффициенты (значения денежных потоков по годам CF_i).

$$\left(\frac{1}{1+r}\right)^{1/4} = x,$$

x^n – факторы дисконтирования для соответствующих периодов денежных потоков.

В соответствии с классическим **принципом Галуа** алгебраическое уравнение (1.7) при $n \geq 5$ не имеет решения в замкнутом (формульном) виде.. Поэтому корни алгебраических уравнений ($n>2$), трансцендентных и сеточных уравнений, как правило, определяются приближённо с заданной точностью численными методами.

1.3.1. Метод Ньютона-Рафсона

Обычно при нахождении корней алгебраического многочлена численными методами используется метод Ньютона-Рафсона (метод касательных, см. рис. 2), являющийся наиболее популярным численным методом, поскольку имеет квадратичную сходимость и допускает различные модификации, приспособленные для решения векторных задач и сеточных уравнений.

Однако этот метод эффективен при весьма жёстких ограничениях на характер функции NPV(r), то есть при выполнении условий **теоремы о достаточных условиях сходимости метода Ньютона-Рафсона,** применительно к нашему случаю:

Функция ***NPV(r)*** определена и дважды дифференцируема на ***[a, b].***

Отрезку ***[a, b]*** принадлежит только один простой корень r_*, так что $NPV(a)*NPV(b) < 0$.

Начальное приближение $r^{(0)}$ удовлетворяет неравенству $NPV(r^{(0)})*NPV''(r^{(0)}) > 0$ (знаки функций ***NPV(r)*** и ***NPV''(r)*** в точке $r^{(0)}$ совпадают).

Согласно теореме Ньютона-Рафсона, если $NPV'(r) \neq 0$, то интерполяционная формула Ньютона-Рафсона в общем виде для нашего случая записывается в следующем виде:

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \frac{NPV(r^{(k)})}{NPV'(r^{(k)})}. \qquad (1.8)$$

Однако в ряде случаев при нарушении знакопостоянства производных, как это показано на рис. 2, метод Ньютона-Рафсона даёт **расходящуюся последовательность** при нахождении корней уравнения. На рис. 2 приводится случай, например, при построении функции типа ***NPV(T)***, особенно когда существуют такие явления, как сезонные колебания спроса на выпускаемую продукцию. Условие знакопостоянства (см. рис. 2) нарушено вдали от корня, где выбрано значение $T^{(0)}$, а вблизи корня выполняется. То есть, иными словами, первые ($T^{(0)}$) и вторые ($T^{(1)}$) приближения оказываются по разные стороны от точки перегиба, при переходе через которую вторая производная функции ***NPV(T)*** меняет знак и равна нулю, согласно достаточному и необходимому условиям существования точки перегиба. Описанная ситуация может возникнуть при построении сеточной функции (интерполяционного многочлена) вида $NPV(T_i)$.

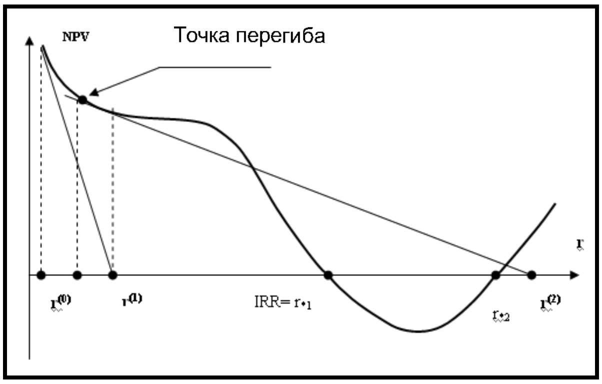

Рис. 2. Расходящаяся последовательность при применении метода Ньютона-Рафсона при расчете DPP

Уже в случае, когда алгебраический полином ***(NPV(r))*** имеет степень выше третьей, может случиться так, что последовательность $\{r_n\}$ не сходится к корню при плохом начальном приближении. В случае, изображённом на рис. 3, все чётные приближения совпадают с r_0, а нечётные – с r_1; то есть в этом случае мы получаем **циклическую последовательность.**

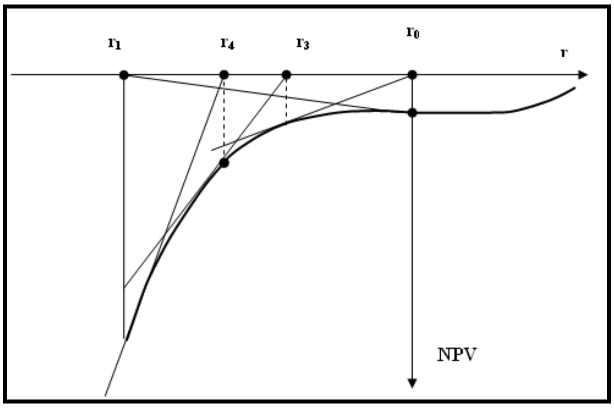

Рис. 3. Циклическая последовательность при применении метода Ньютона-Рафсона при расчете *IRR*

Отметим, что в случаях, представленных на рис. 2 и 3, выполняется второе условие теоремы о достаточном условии сходимости метода Ньютона-Рафсона ***(NPV(r)*NPV''(r)>0),*** таким образом, можно утверждать, что первые приближения выбраны правильно.

В ряде случаях отмеченные выше недостатки классического метода Ньютона-Рафсона (1.8) можно устранить, используя частные случаи этого метода, такие как метод секущих и метод Ньютона-Бройдена (1.10).

1.3.2. Метод секущих при нахождении корней уравнения NPV(r)

Метод секущих также обеспечивает нижеследующие преимущества:

- Метод секущих является более экономичным по сравнению с методом Ньютона по количеству функций, подлежащих расчёту: на каждой итерации в методе секущих необходимо рассчитать только значение $NPV(r^{(k)})$, так как величина $NPV(r^{(k-1)})$ уже подсчитана на предыдущей итерации.
- Метод секущих применяется и для решения сеточных уравнений. Для сеточной функции производные в методе секущих определяются так же, но для определения $NPV(r^{(k)})$ в промежуточных точках осуществляется аппроксимация (как правило, интерполяция) функции $NPV(r_i)$ (см. рис. 4). На этом рисунке штриховой линией показана аппроксимационная кривая.

Отметим, что функция $NPV(r^{(k)})$ не является сеточной, но пункт №2 **теоремы о достаточном условии сходимости метода Ньютона** получает свою актуальность при построении сеточной функции типа $NPV(T^{(k)})$.

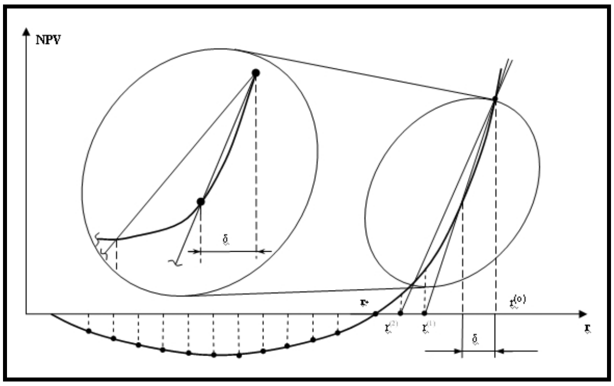

Рис. 4. Метод секущих

В методе секущих производная функции $NPV(r)$ подсчитывается с помощью конечно-разностных соотношений:

- в точке $r^{(0)}$ (начальное приближение) используется следующая формула, которая имеет вид первого члена при разложении функции $NPV(r)$ по формуле Тейлора при k=1 относительно точки $r^{(0)}$:

$$NPV'(r^{(0)}) \approx \frac{NPV(r^{(0)} - NPV(r^{(0)} - \delta)}{\delta};$$

δ – малая положительная величина;

- в точках $r^{(k)}$, $k = 1,2,\ldots$, используется формула

$$NPV'(r^{(k)}) \approx \frac{NPV(r^{(k)} - NPV(r^{(k-1)})}{r^{(k)} - r^{(k-1)}}.$$

Таким образом, метод секущих в общем виде можно записать следующим образом:

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \frac{NPV(r^{(k)})}{NPV(r^{(k)} - NPV(r^{(k-1)})}(r^{(k)} - r^{(k-1)}) \qquad (1.9)$$

где

$k = 1,2,\ldots$

1.3.3. Метод Ньютона-Бройдена

Этот метод позволяет увеличивать скорость сходимости последовательных приближений благодаря использованию формулы (с учётом, рассматриваемого случая):

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - c_k \frac{NPV(r^{(k)})}{NPV'(r^{(k)})} \qquad (1.10)$$

где

c_k – число, которое выбирается на каждой итерации так, чтобы уменьшить значение $|NPV(r^{(k+1)})|$ по сравнению с $|NPV(r^{(k)})|$. Как правило, при плохой сходимости или её отсутствии полагают $0<c_k<1$ (см. рис. 5).

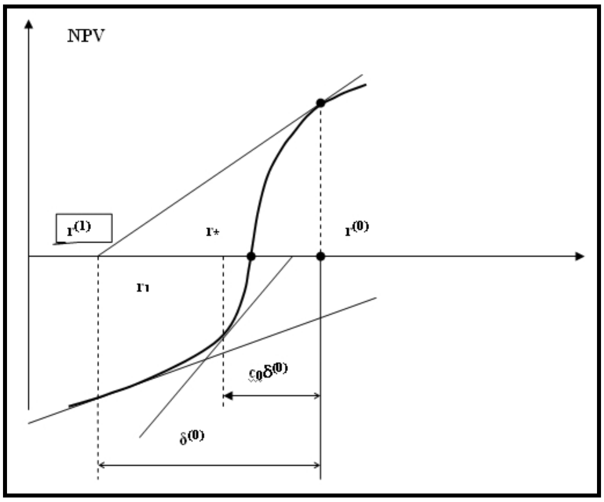

Рис. 5. Метод Ньютона-Бройдена

Отметим, что метод Ньютона-Бройделя (1.10) позволяет найти **кратный корень** и что при отсутствии числа c_k мы получаем расходящуюся последовательность. Авторы статьи не приводят рисунок, но при этом утверждают, что для данного случая (существования кратного корня) метод секущих также даёт расходящуюся последовательность.

Возвращаясь к нашему примеру, при задании первых приближений авторы статьи старались руководствоваться также выполнением условий **теоремы о достаточности сходимости метода Ньютона**.

Поскольку при

$r^{(0)}_{11} = 0{,}25$ $NPV(r) = 135\,645$,

а при

$r^{(0)}_{12} = 0{,}40$ $NPV(r) = -59\,166$;

при

$r^{(0)}_{21} = 3{,}5$ $NPV(r) = -3\,962$,

а при

$r^{(0)}_{22} = 5$ $NPV(r) = 3\,875$.

Тогда

$NPV(r^{(0)}_{11}) * NPV(r^{(0)}_{12}) < 0$, $NPV(r^{(0)}_{21}) * NPV(r^{(0)}_{22}) < 0$.

Таким образом, согласно условию №2 **теоремы о достаточности сходимости метода Ньютона,** можно сделать вывод, что рассматриваемый полином (NPV(r)) имеет два корня, которые, в свою очередь, находятся на интервале [0,25; 0,40], [3,5; 5,0]. В качестве начальных приближений берём значения при $r^{(0)}_1 = 0{,}25$ и $r^{(0)}_2 = 3{,}5$.

Поскольку

$NPV(r^{(0)}_1) * NPV''(x^{(0)}_1) = (55\,534)*(11\,168\,974) > 0$

и

$NPV(r^{(0)}_2) * NPV''(x^{(0)}_2) =$

$=(-3962)*(-7001) > 0$.

Как было определено выше, задаём начальные приближения, равные

$r^{(0)}_1 = 0{,}25,\ r^{(0)}_2 = 3{,}5.$

Для нахождения первого корня уравнения ***NPV (r)*** авторы статьи сочли целесообразным применить метод секущих.

Для вычисления $NPV'(x^{(0)}_1)$ задаём ***δ=0,05***, тогда

$$NPV'(x^{(0)}_1) = \left(\frac{55\,534 - 64\,381}{0{,}05}\right) = -11\,365\,540.$$

Отсюда

$$r^{(1)}_1 = r^{(0)}_1 - \frac{NPV(r^{(0)}_1)}{NPV'(r^{(0)}_1)} = 0{,}25 - \left(\frac{-55534}{-11365540}\right) = 0{,}2549.$$

Таблица 3

РАСЧЕТЫ

k	0	1	2	3	4
$r^{(k)}_1$	0,25	0,2549	0,2921	0,2992	**0,3007**
$\lvert r^{(k)}_1 - r^{(k-1)}_1\rvert$	0,0049	0,0372	0,00709	0,0014	0,0049

Поскольку при достижении определённой итерации

$|r^{(k)} - r^{(k-1)}| < δ=0{,}05,$

и

$NPV(0{,}3007)=0$

при

$r_1 = 0{,}3007,$

следовательно, значение первого корня равняется

$r_1=30{,}07\%.$

Как покажут дальнейшие исследования, график функции ***NPV(r)*** стремится к нижней линии недостижимого предела и при этом проходит через точку перегиба. На момент проведения процедуры отделения корней авторы статьи не знают, совпадает ли второй корень уравнения ***NPV(r)*** с точкой перегиба, следовательно, существует вероятность того, что второй корень уравнения ***NPV(r)*** может быть кратным (рис. 6). Таким образом, авторы статьи сочли целесообразным применить метод Ньютона-Бройделя (1.10). Значение числа c_k берём на уровне 0,50.

Отсюда

$$r^{(1)}_2 = r^{(0)}_2 - c_k * \frac{NPV(r^{(0)}_2)}{NPV'(r^{(0)}_2)} =$$

$$= 3{,}50 - 0{,}5*\left(\frac{-3962}{8241}\right) = 3{,}740.$$

Таблица 4

РАСЧЕТЫ

k	0	1	2	3	4	5
$r^{(k)}_2$	3,50	3,740	3,894	3,9835	4,0322	**4,058**
$\lvert r^{(k)}_2 - r^{(k-1)}_2\rvert$		0,2404	0,1537	0,0894	0,0487	0,0257

Поскольку при достижении определённой итерации $|r^{(k)} - r^{(k-1)}| < δ=0{,}05$, и ***NPV(r)=0*** при $r = 4{,}058$, то значение второго корня равняется $r_2 = 405{,}8\%$.

Вообще говоря, как мы выяснили на нашем примере, уравнение ***NPV(r)=0*** может иметь множественное значение действительных корней, которые в свою очередь могут быть нормальными, аномальными и двойными, но внутренняя норма доходности (***IRR***) у любого инвестиционного проекта, при этом, существует только в единственном числе. Для того чтобы выяснить, какой из полученных корней является внутренней нормой доходности (***IRR***) инвестиционного проекта, исследуем поведение функции ***NPV'(r)***. Так как на отрезке нахождения корня $r = 0{,}3007$ для уравнения ***NPV(r)=0*** выполняется необходимое условие убывания функции: $NPV'(r) \le 0$, для любого $r \in$ данному отрезку, следовательно, данный корень можно охарактеризовать как **нормальный,** и он же выступает в качестве **внутренней нормы доходности** проекта (***IRR***).

Следует отметить, что на практике решения о целесообразности реализации инвестиционного проекта анализируются и подвергаются экспертизе чаще и подробнее, чем решения о целесообразности такой реализации. Поэтому представляется целесообразным определять ***IRR*** так, чтобы в заключениях об эффективности проектов было возможно меньше ошибок. На этом основании допускается возможность отклонения эффективных проектов и исключается возможность принятия неэффективных. В общем случае в качестве ***IRR*** следует принять **наименьший корень** уравнения ***NPV(r)=0*** при условии, что он является нормальным, или **0** – в противном случае.

1.4. Применение дифференциального исчисления к исследованию функции *NPV(r)* в виде алгебраического многочлена

1.4.1. Нахождение критических точек

Поскольку при $r = r_1 = r_2$ значение ***NPV(r) =0***, то согласно **теореме Ролля** существует такое значение ***r'***, где $r' \in (r_1, r_2)$, что ***NPV'(r')=0***. Тогда, в свою очередь, обращаясь к теореме Ферма, можно утверждать, что ***r'*** является точкой экстремума.

Поскольку существует такое значение ***r'***, при котором функция ***NPV"(r')=0***, при определении вида экстремума будем руководствоваться первым и вторым достаточными условиями экстремума.

Так как ***NPV'(r)*** при переходе через точку ***r*** = 0,637 меняет знак с минуса на плюс, а ***NPV"(r")>0***, то ***r*** = 0,637 является **точкой минимума.**

В свою очередь существует значение r'', при котором функция ***NPV"(r")=***0, то при определении существования **точки перегиба** будем руководствоваться первым и вторым достаточными условиями существования точки перегиба.

Поскольку на интервале ***[r', r₂]*** (см. рис. 6) функция ***NPV(r)*** имеет непрерывные производные до второго порядка включительно и при ***r = r'*** функция ***NPV"(r)=0***, а при переходе через эту точку ***NPV"(r)*** меняет знак (с плюса на минус), то выполняются необходимое и достаточное условия существования точки перегиба.

Расчётные формулы для ***NPV'(x), NPV''(x)*** (см.(1.3)) имеют следующий вид:

$$NPV'(x) = (j-1)*\sum_{i=0,\,j=1}^{J=4} CF_{ij} * x^{j-2} +$$

$$+(4i+1)*\sum_{i=0}^{n} CF_i * x^{4*i};$$

$$NPV''(x) = (j-1)*(j-2)*\sum_{i=0,\,j=1}^{n,J=4} CF_{ij} * x^{j-3} +$$

$$+(4i+1)*4i*\sum_{i=0}^{n} CF_i * x^{4*i-1}.$$

1.4.2. Исследование вида функции NPV(r)

Исследуя знак второй производной функции ***NPV(r)*** авторы статьи получили представление о выпуклости или вогнутости данной функции. На интервале от линии недостижимого верхнего предела до точки перегиба ***(NPV''(r)=0)*** при всех значениях ***r*** значение функции ***NPV''(r)>0***, следовательно, выполняется достаточное условие выпуклости графика функции и данная функция **выпукла вниз**. На отрезке от точки перегиба до линии недостижимого нижнего предела при всех значениях r значение функции ***NPV''(r)<0*** – функция **выпукла вверх**.

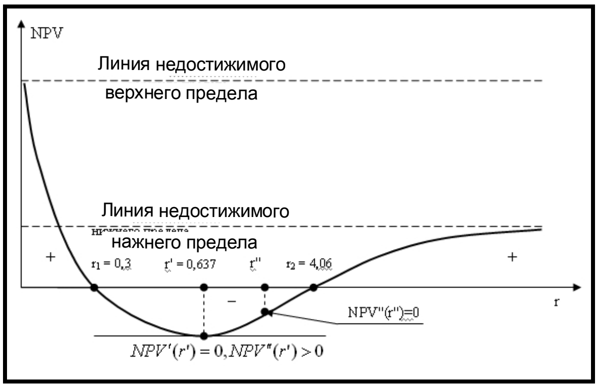

Рис. 6. Исследование вида функции *NPV(r)*

Предел функции ***NPV(r)*** при

$r \to \infty$ ($\lim\limits_{r\to\infty} NPV(r) = CF_{01}$)

стремится к величине первого члена денежного потока ***(CF₀₁)***, который в свою очередь зависит от величины шага дисконтирования денежных потоков.

1.5. Правила, устанавливающие значение *IRR* в случае множественности корней уравнения *NPV(r)=0* и их модификации

Определение ***r=IRR*** как единственного положительного корня уравнения ***NPV(r)*** для инвестиционных проектов с неординарной схемой денежных потоков обладает тем недостатком, что для некоторых проектов данное уравнение вообще может не иметь **нормальных** корней (см. рис. 8 и 9), а в ряде других случаев, как это представлено на рис. 7, инвестиционный проект может иметь несколько **нормальных** корней.

Авторы статьи, опираясь на подход, изложенный в книге «Оценка эффективности инвестиционных проектов» (Москва, издательство «ДЕЛО», 2001 год) коллективом авторов во главе с П.Л. Виленским, предлагают в описанных выше ситуациях руководствоваться некоей скорректированной внутренней нормой рентабельности (СВНД), которая в свою очередь должна удовлетворять условиям непрерывности и монотонности (увеличивается при улучшении проекта).

Принимая во внимание классическое определение ***IRR***, следует рассматривать определение IRR как одну из попыток корректировки ***IRR***, носящую компромиссный характер и не являющуюся единственно возможной.

Устанавливаются следующие правила, увязывающие величину ***IRR*** со ставкой дисконтирования проекта (***d***).

Если при ставке дисконтирования ***d*** значение функции ***NPV(r)*** (интегральный эффект проекта) равен нулю, то в качестве ***IRR*** следует принимать ***d***.

Если при ставке дисконтирования d значение функции ***NPV(r) > 0***, то в качестве ***IRR*** следует принимать наибольший корень уравнения ***NPV(r).***

Если при ставке дисконтирования d значение функции ***NPV(r) < 0***, то в качестве **IRR** следует принимать наименьший корень уравнения ***NPV(r).***

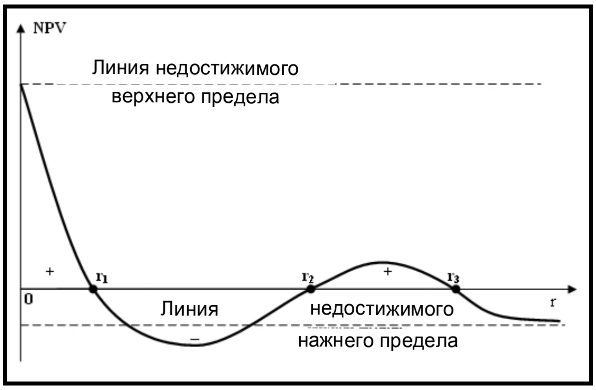

Рис. 7. График функции *NPV(r)*, устанавливающий правила нахождения *IRR*

Рассматривая инвестиционный проект, функция ***NPV(r)*** (интегральный показатель) которого представлена на рис. 7, можно утверждать, что ***NPV(r) <0***, когда ставка дисконтирования ***r=d*** находится на интервале ***[r₁; r₂]***, следовательно, ***IRR= r₁***. Очевидно, что в этом случае проект можно рассматривать как неэффективный, поскольку ***IRR= r₁< d.***

Вообще говоря, можно рассматривать ту же самую схему денежных потоков одного и того же инвестиционного проекта, но только несколько улучшенного. В силу свойства монотонности ***IRR***, можно полагать, что ***r₁, r₂, r₃*** примут несколько большие значения.

Тогда уже мы получаем высокую вероятность того, что наша ставка дисконтирования ***r=d*** будет находиться на интервале ***[r₂; r₃]***, и ***NPV(r) >0,*** таким образом, ***IRR= r₃.***

Отметим, что корень ***r₂*** уравнения ***NPV(r)*** является аномальным.

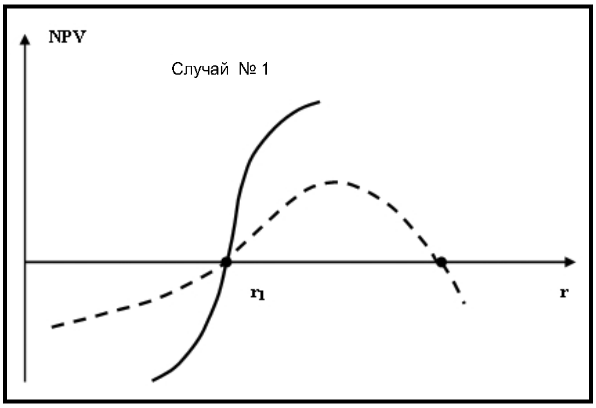

Рис. 8. График функции *NPV(r)*, имеющий кратный корень и его модификация

На рис. 8, 9 рассматриваются инвестиционные проекты, функция ***NPV(r)*** которых представлена в виде алгебраического многочлена (1.7), которые имеют так называемые кратные корни (корни, в которых вторые и более высокого порядка производные функции ***NPV(r)*** равняются нулю).

В **Случае №1** возникает ситуация, когда какое-либо значение IRR вообще отсутствует, так как при $d< r_1$ проект можно считать неэффективным, а при $d > r_1$ – проект эффективный, в то время как настоящий IRR удовлетворяет обратной ситуации. При этом в **Случае №1** с изменением проекта (пунктирная линия) эффективность проекта снижается, а значение корня возрастает.

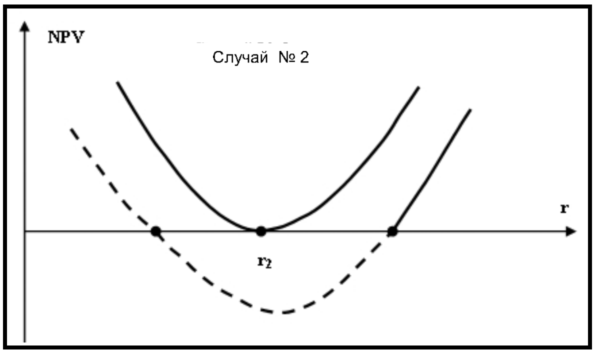

Рис. 9. График функции *NPV(r)*, имеющий кратный корень и его модификация

Случай №2 сам по себе крайне редок. Тем не менее, говоря о нём, следует отметить, что выбирать в качестве ***IRR*** двойной корень нецелесообразно, поскольку при небольшом изменении проекта (пунктирная линия) корень может превратиться в несколько корней, один из которых будет являться **аномальным**.

Теперь рассмотрим инвестиционный проект с неординарным денежным потоком, который имеет либо кратный корень, либо не имеет положительных значений корней. Он представлен в табл. 5.

Таблица 5

ИНВЕСТИЦИОННЫЙ ПРОЕКТ С НЕОРДИНАРНЫМ ДЕНЕЖНЫМ ПОТОКОМ

Номер периода денежного потока	**0**	**1**	**2**	**3**
Величина денежного потока CF_i.	1 000	–3 600	4 329	–1 738

Как покажут дальнейшие исследования, внутренняя норма доходности, то есть корень уравнения ***NPV(r) = 0***, является кратным, и в случае использования классического метода Ньютона-Рафсона (1.8) получаем расходящуюся последовательность (см. рис. 5). Как видно из рис. 5, при проведении процедуры отделения корней мы не можем выполнить второе достаточное условие теоремы о сходимости метода Ньютона, следовательно, при задании начального приближения справа либо слева от нахождения кратного корня произведение функции ***NPV(r)*** и её второй производной **меньше нуля.** В сложившейся ситуации Авторы статьи прибегают к использованию метода Ньютона-Бройдена (1.10).

Таблица 6

РАСЧЕТЫ

k	0	1	2	3	4
$r^{(k)}_2$	0,30	0,279	0,258	0,2331	0,2034
$\lvert r^{(k)}_2 - r^{(k-1)}_2\rvert$		0,0206	0,0218	0,0245	0,0298

Значение функции ***NPV(r)*** меняет знак на интервале [0,10; 0,3]. Тогда в качестве значения первого приближения берём $r^{(0)}$ =0,25. Значение числа c_k берём на уровне 0,25.

Отсюда

$$r^{(1)} = r^{(0)} - c_k \cdot \frac{NPV(r^{(0)})}{NPV'(r^{(0)})} =$$

$$=0,25 - 0,25 \cdot \left(\frac{1,229}{14,92}\right) = 0,279.$$

Поскольку при достижении определённой итерации

$|r^{(k)} - r^{(k-1)}| < \delta=0,05,$

и

NPV(r)=0

при

$r = 0,2034,$

следовательно, значение второго корня равняется ***r* = 20,34**%.

Теперь изменим несколько значение денежного потока в 0-ой год и получим схему денежного потока, представленного в табл. 7.

Таблица 7

СХЕМА ДЕНЕЖНОГО ПОТОКА

Номер периода денежного потока	**0**	**1**	**2**	**3**
Величина денежного потока CF_i.	1 050	–3 600	4 329	–1 738

График функции изменённого денежного потока показан пунктирной линией на рис. 10. Как показывают вычисления, значение функции ***NPV(r)=0*** достигается при ***r*** = – 0,1183. Поскольку, с экономической точки зрения, внутренняя норма доходности может иметь только положительное значение и к тому же полученный корень является в свою очередь аномальным, то авторы статьи вправе сделать заключение, что внутренняя норма доходности данного инвестиционного проекта в двух рассматриваемых случаях, вообще говоря, отсутствует. При постановке вопроса – следует ли принимать данный проект, можно получить ответ, оценив значение ***NPV*** проекта и прочие его интегральные показатели.

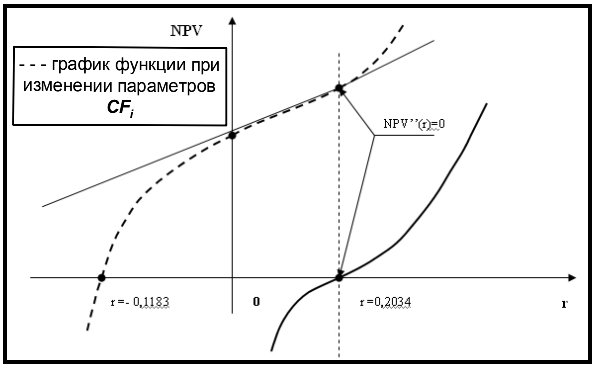

Рис. 10. График нахождения значения кратного и отрицательных корней уравнения *NPV(r)=0* на основе метода Ньютона-Бройдена

Вывод

В ряде случаев (описанных выше) значение внутренней нормы доходности, вообще говоря, отсутствует, и **судить об эффективности принятия рассматриваемого инвестиционного проекта можно исключительно, оценив значение его *NPV* и другие интегральные показатели в совокупности**.

2. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРОВЕДЕНИЯ СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ С НЕОРДИНАРНОЙ СХЕМОЙ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

При проведении сравнительного анализа двух **альтернативных** инвестиционных проектов на предмет внутренней нормы доходности (IRR) обычно прибегают к расчёту такого критерия, как точка Фишера. При выборе между двумя альтернативными инвестиционными проектами осуществляется выбор либо в пользу одного, либо в пользу другого проекта, в противном случае оба проекта отвергаются.

Точкой Фишера называется значение ставки дисконтирования (r) при котором значения ***NPV***, рассматриваемых инвестиционных проектов равны.

В общем виде уравнение для расчёта **точки Фишера,** анализируемых инвестиционных проектов, выглядит следующим образом:

$$NPV_1(r) = NPV_2(r) = \ldots = NPV_i(r) \qquad (2.1)$$

Теперь рассмотрим два **альтернативных** инвестиционных проекта:

- проект №2 со схемой денежного потока, представленного в табл. 8, 9 и
- проект №1, схема денежного потока (CF_i) которого представлена в табл. 1, 2.

Таблица 8

СХЕМА ДЕНЕЖНОГО ПОТОКА ПРОЕКТА №2

№	Наименование	1 Квартал	2 Квартал	3 Квартал	4 Квартал	1 год	2 год
1	CF_i от операционной и финансовой деятельност., *тыс. руб.*	-35 000	-25 000	-25 000	20 000	60 000	60 000
2	Фактор дисконтирования	1,0000	0,9515	0,9054	0,8615	0,7799	0,6393
3	DCF_i (п. 1 * * п. 2)	-35 000	-23 788	-22 634	17 229	46 795	38 357
4	Σ дисконтированный денежный поток накопленным итогом, *тыс. руб.*	-35 000	-58 788	-81 422	-64 193	-17 397	20 959

Таблица 9

СХЕМА ДЕНЕЖНОГО ПОТОКА ПРОЕКТА №2 (продолжение)

№	Наименование	3 год	4 год
1	CF_i от операционной и финансовой деятельност., тыс. руб.	61 000	61 000
2	Фактор дисконтирования.	0,5240	0,4295
3	DCF_i (п.1 x п.2)	31 964	26 200
4	Σ дисконтированный денежный поток накопленным итогом, тыс. руб.	52 923	**79 123**

Инвестиционные проекты имеют разные сроки реализации и разные степени риска, которые отражаются в ставке дисконтирования. Так, например, риск вложения в первый инвестиционный проект можно считать на уровне среднерыночного и потому ставка дисконтирования для этого проекта, на момент написания статьи, равняется 0,18.

Учитывая равенство (2.1), запишем уравнение для расчета точки Фишера, двух анализируемых проектов имеет вид:

$$\begin{aligned} &NPV_1(r) - NPV_2(r) = 549\,412 x^{37} + 475\,799 x^{33} + \\ &+197\,686 x^{29} + 151\,720 x^{25} + 111\,419 x^{21} + \\ &+105\,685 x^{17} + 269\,283 x^{13} - 673\,757 x^{9} + \\ &+ 26\,172 x^{5} + 2\,623 x^{3} + 1\,860 x^{2} + 3\,251 x + \\ &+ 8\,665 + 35\,000 + 25\,000 x + 25\,000 x^{2} - \\ &-20\,000 x^{3} - 60\,000 x^{5} - 60\,000 x^{9} - \\ &-61\,000 x^{13} - 61\,000 x^{17} = 0, \qquad (2.2) \end{aligned}$$

где

$$\left(\frac{1}{1+r}\right)^{1/4} = x .$$

Таблица 10

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ

Интегральные показатели	Проект №1	Проект №2
Период расчёта интегральных показателей, *лет*	10	5
NPV, *тыс. рублей*	182 870	79 123
IRR, %	30,07	89,0
DPP, *лет*	8,473	2,454
PI	1,379	1,972
Ставка дисконтирования (возможная ставка реинвестирования), ***d***, %	d_1=18,0	d_2 = 22,0
Точка Фишера (значение r, при котором ***NPV(r)*** двух проектов равны), %	23,6	23,6

При проведении сравнительного анализа двух проектов в первом приближении отметим, что Проекта № 2 имеет внутреннюю норму доходности (***IRR***) на 58,93 процентных пункта больше чем у Проекта №1, и значительно меньший дисконтируемый период окупаемости ***DPP***=2,454 лет, чем у Проекта №2. Но Проект №2 связан с большим риском реализации осуществления в него инвестиционных затрат и, как следствие, значение ставки дисконтирования равно ***r*** =0,22.

Применяя ещё раз численные методы, находим корни уравнения (2.2) F_1=0,236, F_2=1,8, то есть мы нашли точки пересечения графиков $NPV_1(r)$ $NPV_2(r)$, так называемые точки Фишера. В этих точках рассматриваемые альтернативные инвестиционные проекты имеют одинаковые значения ***NPV***, и, таким образом, можно говорить об отсутствии какой-либо абсолютной предпочтительности одного проекта перед другим. В нашем случае вторую точку Фишера можно отнести к разряду аномальных, поскольку ***NPV*** и ***IRR*** в этой точке для обоих проектов имеют отрицательное значение.

Вообще говоря, когда значение цены капитала лежит слева от абсциссы точки пересечения графиков, **возникает противоречие.** Так, например, при r < 0,236 интегральные показатели альтернативных проектов дают различные результаты: по критерию ***NPV*** предпочтителен проект №2, а по критерию ***IRR*** предпочтителен уже проект №1. Тогда как при r > 0,236 интегральные показатели дают одинаковые результаты:

$$NPV_1 > NPV_2,\ IRR_1 > IRR_2.$$

Таким образом, возникает некая дилемма – какой интегральный показатель является определяющим при отдании предпочтения из двух альтернативных проектов.

Существуют две основные причины, приводящие к пересечению двух графиков ***NPV(r)***, и в свою очередь обуславливающие противоречие:

Масштаб проекта, то есть достаточно существенное различие в величинах инвестиционных затрат альтернативных инвестиционных проектов.

Интенсивность притока денежных средств, то есть совокупный приток денежных средств в Проекте №1 хоть и больше по величине, но возникает существенно позже. График ***NPV (r)*** для Проекта №1 **убывает значительно быстрее** по сравнению с графиком ***NPV (r)*** для Проекта №2 (см. рис. 11).

С позиции значения внутренней нормы доходности Проект № 2 имеет значительное предпочтение, поскольку при ставке дисконтирования ***r*** = 0,307 ***NPV*** Проекта №1 равняется нулю (***IRR***=0,3007), а чистая приведённая стоимость Проекта №2 (***NPV₂***) имеет положительное значение. Следовательно, если бы альтернативные издержки привлечения капитала на момент реализации проектов имели значение 30,07%, потенциальные инвесторы отдали бы свои предпочтения краткосрочному Проекту №2.

Альтернативные издержки привлечения капитала для Проекта №2 составляют не 30,07%, а 22%. Известно, что при инвестировании в облигации их значение доходности к погашению (Yield to maturity, ***YTM***) имеет степенную зависимость от срока до погашения, то есть кривая доходности (yield curve), как правило, выпукла вверх, то есть инвесторы платят более высокую цену за долгосрочные ценные бумаги. Следовательно, **потенциальные инвесторы заплатят относительно дороже за долгосрочный Проект №1**.

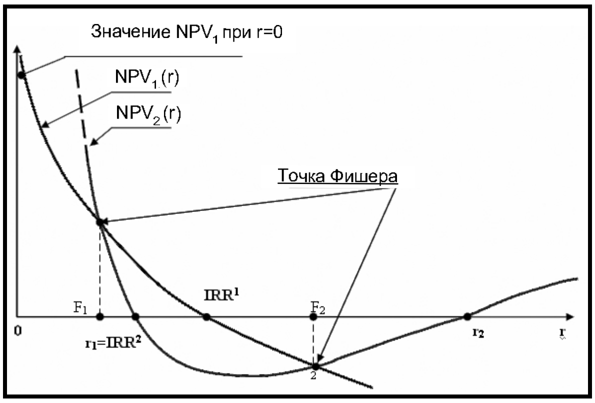

Рис. 11. График функции NPV(r) двух альтернативных инвестиционных проектов

Для оценки двух альтернативных проектов разных масштабов и сроков реализации на основе критерия IRR мы должны обратиться к технике **приростных денежных потоков**.

Таблица 11

ИНВЕСТИЦИОННЫЕ ЗАТРАТЫ ДЛЯ ПРОЕКТА № Δ

Периоды реализации Проекта № Δ.	1 кв. 0 год	2 кв. 0 год	3 кв. 0 год	4 кв. 0 год	1 год	2 год
Инвестиционные затраты.	35 000	25 000	25 000	0	0	700 000

Рассмотрим некий Проект № Δ = Проект №1 – Проект №2. Проект №1 разбивается на две части: одна часть эквивалентная Проекту №1, а другая часть представляет некий остаточный проект, равный гипотетическому Проекту № Δ**.** Для Проекта № Δ схема инвестиционных затрат по периодам приводится в табл. 11.

Поскольку критерий ***NPV*** обладает свойством **аддитивности**, то ***ΔNPV = NPV₁ – NPN₂ =103 747 > 0. IRR*** Проекта № Δ в нашем случае является не чем иным, как точкой Фишера, равняется 23,6% и превышает большие из двух издержек привлечения капитала, равные 22% (***Δ IRR>d₂***). Следовательно, на основе анализа приростных денежных потоков следует принять Проект №1.

В рассматриваемом примере мы получаем так называемые приростные денежные потоки, которые могут быть реинвестированы по **цене капитала**, в случае совершенного рынка капитала. В случае несовершенного рынка капитала (проценты по заимствованию выше, чем проценты по инвестированию) мы, например, можем инвестировать свободные денежные потоки в долгосрочные облигации, доходность к погашению (***YTM***) которых несколько меньше величины процентов по кредитам. При этом дата погашения облигаций и кредита должны совпадать. Априори цена капитала берётся на уровне значения ставки дисконтирования, присущей конкретному проекту. Этот постулат закладывается в такой интегральный показатель, как ***NPV***. Когда же мы обращаемся к интегральному показателю ***IRR***, то тем самым делаем некое допущение, что у компании, осуществляющей капитальные вложения, имеются какие-то инвестиционные возможности со ставкой, равной ***IRR***. То есть в процессе дисконтирования молчаливо предполагается, что процедура дисконтирования производится по ставке ***IRR***. Но на момент принятия решения о проведении инвестиционных затрат мы исходим из одной и той же величины доходности вложений либо в рассматриваемый проект, либо в проект с сопоставимой доходностью и риском, то есть мы финансируем проект по цене капитала, а не по значению ***IRR***.

На практике, когда проводится сравнительный анализ двух альтернативных инвестиционных проектов, имеющих различные масштабы и сроки реализации, **применяется техника эквивалентного годового денежного потока**. Величина ***NPV*** оцениваемого проекта раскладывается на составляющие, эквивалентные будущим денежным потокам. То есть мы отвечаем на вопрос: какова должна быть величина денежного потока в течение срока реализации проекта, чтобы возместить инвестиции и получить приведённую стоимость дохода от проекта равной значению ***NPV***.

Для Проекта №1 эта величина находится из следующего уравнения:

$$NPV_1 = \text{Эквивалентный денежный поток (ЭДП)} * FM4\,(0{,}18,\ 10), \qquad (2.3)$$

где

FM4 (0,18, 9) – фактор текущей стоимости обычного аннуитета (или пятой функцией сложного процента),

или фактором Инвуда, по имени английского экономиста Уильяма Инвуда, при ***r*** =0,18 и ***n*** =10 лет.

В общем виде формула для расчёта фактора текущей стоимости обычного аннуитета имеет вид:

$$FM4(r,\, n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}; \qquad (2.4)$$

$$FM4(0{,}18,\ 10) = 4{,}494;$$

$$FM4(0{,}22,\ 4) = 2{,}864.$$

ЭДП для Проекта № 1 = NPV_1 / FM4(0,18, 10) = =182 870 / 4,494 = 40 692.

ЭДП для Проекта № 2 = NPV_2 / FM4(0,22, 5) = = 79 123/ 2,864 = 27 628;

ЭДП для Проекта № 1 > ЭДП для Проекта № 2.

Таким образом, оперируя критерием «эквивалентный денежный поток», мы ещё раз отдаём предпочтение Проекту №1.

В действительности время замены оборудования определяется исходя из эффективности экономических критериев, и часто не принимается во внимание, что оборудование ещё не выработало свой физический износ.

Если всё-таки, по каким-либо причинам, мы отдали предпочтение Проекту №2, например, обусловленное большой продолжительностью Проекта №1 и, как следствие, большой степенью неопределённости относительно величины прогнозируемых денежных потоков, это весьма актуально для нестабильных экономик, с инфляцией больше 30 - 40 % в год. Тогда в нашем случае возникает некоторая дилемма - осуществлять ли Проект №2 сразу, или подождать два года, поскольку по Проекту №1 ещё существуют денежные потоки в течение двух ближайших лет без осуществления каких-либо инвестиций. Здесь, конечно, ответ очевиден, поскольку дисконтированный срок окупаемости по Проекту №2 больше двух лет (2,454 года) и, следовательно, величина эквивалентного денежного потока на этом периоде будет отрицательной. То есть реализацию Проекта № 2 следует отложить ещё на два года.

Ещё раз возвращаясь к интегральным показателям, отметим, что при проведении оценки двух альтернативных проектов, различающихся по масштабу и имеющих разные сроки реализации, а следовательно, и различную интенсивность притока денежных средств, авторы статьи отдают свои предпочтения критерию *NPV*.

3. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА БЕЗРИСКОВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СТАВКИ ДИСКОНТИРОВАНИЯ

В данной главе приводится алгоритм построения кривой и получения вида зависимости доходности к погашению (***YTM***) Еврооблигаций РФ на основе метода наименьших квадратов (МНК). Даётся математическое обоснование преимуществ применения МНК по сравнению с другими методами при получении зависимости ***YTM=f(t)***. Приводится доказательство на конкретном примере целесообразности дисконтирования денежных потоков по цене альтернативным издержкам капитала (ставке дисконтирования), учитывающей временную структуру процентных ставок. В статье даётся также чёткое определение и обоснование безрисковой ставки.

Обычно при оценке эффективности инвестиционных проектов исходят из предположения, что альтернативные издержки привлечения капитала одинаковы для всех денежных потоков (CF_i) на протяжении всего прогнозного периода (периода расчёта интегральных показателей инвестиционного проекта).

Вспомним, что основная формула для расчёта чистой приведенной стоимости (***NPV***) проекта имеет следующий вид:

$$NPV = CF_0 + \frac{CF_1}{(1+r_{0,1})} + \frac{CF_2}{(1+r_{0,1})(1+r_{1,2})} + \ldots =$$

$$= \sum_{t=0}^{T} CF_t \prod_{\tau=1}^{t} (1+r_{\tau-1,\tau})^{-1} \qquad (3.1)$$

где

$$\prod_{\tau=1}^{t} (1+r_{\tau-1,\tau})^{-1} = \frac{1}{(1+r_{0,1})(1+r_{1,2})\ldots(1+r_{t-1,t})} \qquad (3.2)$$

Иначе говоря, мы приводим значение денежного потока CF_1 по альтернативным издержкам привлечения капитала одного года, а CF_2 по альтернативным издержкам привлечения капитала для двух и т.д.

Как известно, значение ставки дисконтирования складывается из безрисковой составляющей, среднерыночной премии за риск и рисков, характерных для конкретного проекта. По мере реализации проекта, когда предприятие осваивает производственные мощности и занимает соответствующую нишу на рынке, значение премии за риск должно постепенно уменьшаться. Уловить прогнозное изменение значения премии за риск достаточно трудно, поэтому большинство аналитиков априори считают это значение постоянным в ходе реализации проекта.

Значение безрисковой составляющей ставки дисконтирования для определённого прогнозного периода можно получить на основе зависимости **кривой доходности** (yield curve), отражающей изменения доходности к погашению Еврооблигаций Минфина РФ с различными сроками погашения в зависимости от даты погашения. Еврооблигации Минфина РФ по ряду критериев можно отнести к безрисковым актиам (ценные бумаги). Кривая доходности даёт представление о временной зависимости (term structure) процентных ставок.

Безрисковая ставка (riskfree rate) – ставка доходности от инвестиций в безрисковый актив, значение которой при этом является определённой. Поскольку неопределённость конечной стоимости безрискового актива отсутствует, то, по определению, стандартное отклонение (***σ*** =0) для безрискового актива равно нулю.

Так как безрисковый актив имеет, по определению, известную доходность, то этот тип актива должен быть некой ценной бумагой, обеспечивающей фиксированый доход и имеющей нулевую вероятность неуплаты.

Среди всех активов, обращающихся на момент написания данной статьи на финансовом рынке Российской Федерации, Еврооблигации удовлетворяют следующим критериям, на основе которых их можно считать безрисковыми активами:

- обладают большим объёмом выпуска (более 15 млрд. долларов США);
- наличием организованного и хорошо информационно обеспеченного рынка;
- дефолт по этим ценным бумагам не объявлялся, то есть вероятность неуплаты по этим ценным бумагам, в отличие от корпоративных ценных бумаг равняется нулю.

Авторы статьи при получении зависимости кривой сочли целесообразным воспользоваться **методом наименьших квадратов** (МНК).

Постановка задачи при получении уравнения кривой доходности (yield curve) для Еврооблигаций Минфина РФ методом МНК выглядит следующим образом.

Пусть на множестве Ω *[a, b]* задана сетка сроков погашения облигаций $\Omega = \{t_i,\ i = \overline{0,n}\}$, определяемая ***n+1*** точкой $t_0, t_1, \ldots, t_n$, а на сетке задана сеточная функция доходностей к погашению облигаций $r_i = f(t_i),\ i = \overline{0,n}$: $r_0 = f(t_0),\ r_1 = f(t_1),\ \ldots,\ r_n = f(t_n)$.

Предполагается, что сеточная функция значений доходности Еврооблигаций Минфина РФ к погашению получена **с достаточно большой погрешностью** относительно шага, то есть $r_i = f(t_i) + \varepsilon_i$, а узлы сетки могут быть заданы также с погрешностью, поскольку набор спот-ставок является основным определителем цены в нашем Еврооблигаций Минфина, которая меняется вследствие проведения ежедневных котировок. Следовательно, нет причин ожидать, что все доходности к погашению (***YTM***) лежат на одной какой-либо определённой кривой.

Поэтому в данном случае можно говорить об **отсутствие каких-либо фиксированных точек сеточной функции**, которые могут служить фиксированными узлами при решении задачи методами функциональной интерполяции. То есть в нашем случае ставится задача получения в общем виде уравнения регрессии, выражающей зависимость вида $r = f(t_i)$, которая не проходит через фиксированные точки (узлы интерполяции), а отражает вид зависимости с наименьшим значением погрешности, то есть выполнения условия (3.4).

Для расчёта значений ***YTM*** для Еврооблигаций Минфина РФ более актуальной видится задача **получения общего вида зависимости для сеточной функции, с учётом её погрешности**.

В качестве сглаживающей функции будем использовать обобщенный многочлен вида:

$$\tilde{f}_m(t,\bar{a}) = \sum_{j=0}^{m} a_j * \varphi_j(t) = a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \ldots + a_m\varphi_m(t) \qquad (3.3)$$

Базисные функции $\varphi_i(t)$ в вышеприведённом многочлене являются степенными функциями, причём степень многочлена удовлетворяет условию $0 \le m \le n$.

Требуется найти такие коэффициенты многочлена $a_0, a_1, \ldots, a_m$, чтобы выполнялось нижеследующие интегральное условие согласования:

$$\delta_m(\bar{a}) = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[\tilde{f}(t_i,\bar{a}) - f(t_i)\right]^2} \to \min_{\bar{a}}, \qquad (3.4)$$

то есть такой вектор $\bar{a} = \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}^T$, который обеспечивает минимум среднеквадратичной погрешности $\delta_m(\bar{a})$.

Очевидно, минимум в (3.4) с учётом (3.3) достигается, если

$$\Delta = \sum_{i=0}^{n}\left[\varphi_0(t_i)a_0 + \varphi_1(t_i)a_1 + \ldots + \varphi_m(t_i)a_m - f(t_i)\right]^2 \to \min_{\bar{a}} \qquad (3.5)$$

Так как на коэффициенты не наложено никаких ограничений, применим необходимые условия безусловного экстремума:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_j} = 0,\ j = 0,1,\ldots,m.$$

В результате получаем систему:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_0} = 2\Big[\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(t_i)a_0 + \varphi_1(t_i)a_1 + \ldots + \varphi_m(t_i)a_m - f(t_i)\Big]\varphi_0(t_i) = 0;$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_1} = 2\Big[\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(t_i)a_0 + \varphi_1(t_i)a_1 + \ldots + \varphi_m(t_i)a_m - f(t_i)\Big]\varphi_1(t_i) = 0; \qquad (3.6)$$

……………………………………………………………

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_m} = 2\Big[\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(t_i)a_0 + \varphi_1(t_i)a_1 + \ldots + \varphi_m(t_i)a_m - f(t_i)\Big]\varphi_m(t_i) = 0.$$

Для компактной записи полученного результата удобно использовать скалярное произведение вида

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \sum_{i=0}^{n}\varphi_k(t_i)\varphi_l(t_i),$$

где

число $\|\varphi_k\| = \sqrt{(\varphi_k,\varphi_k)}$ – норма функции $\varphi_k(t_i)$ на множестве $\{t_i,\ i\overline{0,n}\}$.

Тогда полученную систему (2.6) можно переписать в нормальной форме:

$$(\varphi_0,\varphi_0)a_0 + (\varphi_0,\varphi_1)a_1 + \ldots + (\varphi_0,\varphi_m)a_m = (f,\varphi_0);$$

$$(\varphi_1,\varphi_0)a_0 + (\varphi_1,\varphi_1)a_1 + \ldots + (\varphi_m,\varphi_m)a_m = (f,\varphi_1);$$

……………………………………………………………

$$(\varphi_m,\varphi_0)a_0 + (\varphi_m,\varphi_1)a_1 + \ldots + (\varphi_m,\varphi_m)a_m = (f,\varphi_m), \qquad (3.7)$$

где

$$(f, \varphi_k) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i)\varphi_k(t_i).$$

Таким образом, получено ***(m+1)*** линейное уравнение с (***m+1***) неизвестными $a_0, a_1, \ldots a_m$.

В силу равенства $(\varphi_k, \varphi_l) = (\varphi_l, \varphi_k)$

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \ldots & (\varphi_0,\varphi_m) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \ldots. & (\varphi_1,\varphi_m) \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \ldots. & (\varphi_m,\varphi_m) \end{pmatrix} \qquad (3.8)$$

матрица (3.8) системы (3.7) является симметричной. Если базисные функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ линейно независимы, определитель матрицы А не равен нулю (определитель Грамма). Тогда решение системы (3.7) существует и единственно.

Метод решения поставленной задачи называется **методом наименьших квадратов или методом наилучшего среднеквадратичного приближения**. Заметим, что при <u>**m**</u>>>1 система (3.7), полученная в ходе применения условия безусловного экстремума к $\delta_m(\bar{a})$, **становится плохо обусловленной,** и определить полином $\tilde{f}_m(t,\bar{a})$ практически невозможно. Это связано с тем, что строки матрицы ***A*** (3.8) при больших ***m*** оказываются почти линейно зависимыми и, следовательно, $|A| \approx 0$.

Ряд преимущественных особенностей решения **задачи сглаживания** при построении зависимости кривой доходности к погашению от времени для Еврооблигаций Минфина РФ методом наименьших квадратов по сравнению с решением задачи интерполяции.

Метод интерполяции – точечный метод, поскольку требует выполнения точечных условий интерполяции.

Рассматриваемый данный интегральный метод (МНК) является альтернативной точечному методу, и **не требует точного удовлетворения функциональных условий**, **а требует выполнения соответствия** $\tilde{f}_m(t,\bar{a})$ **и** $r_i = f(t_i)$ **в среднем по интегральной сумме**.

Исходная функция $r_i = f(t_i)$ задана не точно, а с погрешностью, существенно большей, чем в методе интерполяции. Это является следствием проведения ежедневных котировок облигаций и, следовательно, существенного изменения значений доходности к погашению, то есть значений исходных функций $r_i = f(t_i)$.

Количество точек t_i $(i = \overline{0,n})$, в которых задана функция, как правило, значительно больше степени m многочлена ($n >> m$). Поэтому **между** n **и** m **нет строгого соответствия, как это имеет место в методе интерполяции**.

Метод наименьших квадратов реализует **наилучшее в среднем приближение на всей области определения сеточной функции** $y_i = f(t_i)$ и в некоторых случаях не учитывает локальных свойств аппроксимируемой функции (например, **одиночный "всплеск"**).

На основе данных агентства Reuters Авторы статьи провели статистические исследования значений доходности к погашению (***YTM***), в зависимости от срока до погашения на интервале полгода, на три расчётные даты (17.09.2004; 10.12.2004; 11.03.2005 гг.), в которые проводились котировки. Далее, применяя процедуру метода наименьших квадратов с использованием программы STATISTICA-6 к сеточной функции $r_i = f(t_i)$, где в качестве базисных функций используем степенные функции вида $\varphi_j(t) = t_j$, $j = \overline{0,m}$, получим зависимость кривой доходности к погашению в виде квадратичного полинома:

$$r = -0{,}0114 \cdot t^2 + 0{,}4346 \cdot t + 3{,}116, \qquad (3.9)$$

где

r = YTM (Yield to maturity) – доходность к погашению, %;

t – срок до погашения, лет.

Полученная зависимость (3.9) имеет коэффициент парной корреляции (коэффициент Пирсона), равный 0,855, что свидетельствует о наличии достаточно высокой причинно-следственной связи между доходностью к погашению (***YTM***) и сроком к погашению Еврооблигаций Минфина РФ. В нашем случае зависимость имеет вид возрастающей кривой (см. рис. 12).

Полученный вид кривой объясняется двумя теориями временной зависимости (term structure theories):

- теория непредвзятых ожиданий ожидаемая (unbiased expectations theory) предполагает, что будущая спот-ставка равна по величине соответствующей форвардной ставке, то есть ожидаемое увеличение годовой спот-ставки является причиной возрастания кривой доходности;
- теория наилучшей ликвидности (liquidity preference theory) предполагает, что ожидаемая спот-ставка должна быть несколько меньше, чем форвардная ставка на величину премии за ликвидность.

Однако премия за ликвидность для ценных бумаг со сроком погашения более одного года не превышают премии за ликвидность ценных бумаг со сроком погашения до одного года ($L_{0,5;1} = L_{1;1,5}$).

Принимая во внимание теорию непредвзятых ожиданий, Авторы статьи в своих расчётах руководствуются тем фактом, что премия за ликвидность для спот-ставок со сроком погашения более чем один год не меняется.

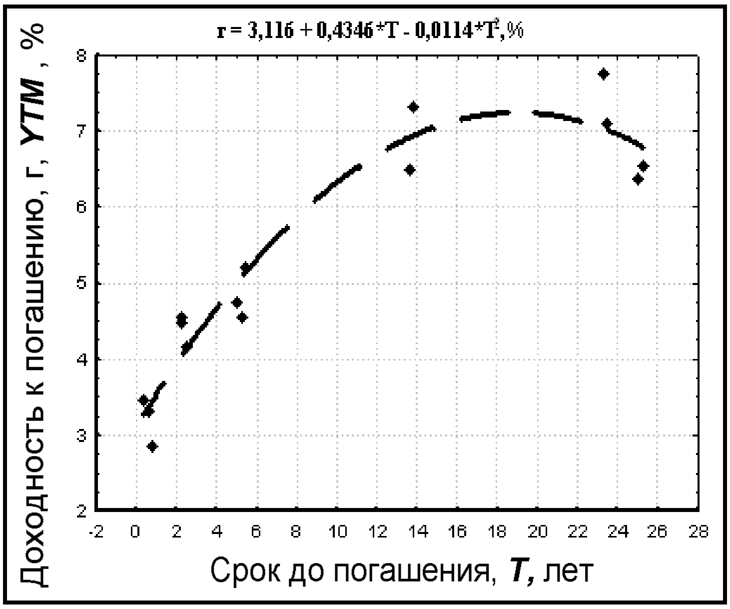

Рис. 12. Кривая доходности (yield curve) Еврооблигаций Минфина РФ от срока до погашения

Обычно в качестве безрисковой составляющей ставки дисконтирования, например, для Проекта №2 принимают доходность к погашению Еврооблигаций Минфина РФ через пять лет, поскольку расчёт интегральных показателей Проекта №2 производится на периоде, равном пяти годам. То есть срок инвестирования (период владения) в альтернативный безрисковый актив (Еврооблигации Минфина РФ) и срок погашения по этим ценным бумагам должны совпадать. В противном случае данные ценные бумаги не могут рассматриваться как безрисковые активы.

Рассмотрим две ситуации:

1. Срок инвестирования (период владения) в государственные ценные бумаги меньше, чем срок погашения.
2. Срок инвестирования (период владения) в государственные ценные бумаги больше, чем срок погашения.

В первом случае возникает ситуация неопределённости по отношению к процентной ставке, значение которой может измениться в течение периода владения, что повлечёт изменение рыночной стоимости ценной бумаги. Следовательно, возникновение подобного **риска процентной ставки** (interest-rate risk) делает стоимость ценной бумаги неопределённой, и она в свою очередь уже не может рассматриваться как безрисковый актив.

Второй случай представляет ситуацию, когда потенциальной инвестор не обладает информацией в начале инвестирования, какой будет процентная ставка к моменту погашения ценной бумаги. То есть инвестор не знает величины процентной ставки, по которой доходы от ценной бумаги могут быть реинвестированы на оставшийся период владения. Присутствие **риска ставки реинвестирования** (reinvestment-rate risk) для ценных бумаг со сроком погашения меньшим, чем период владения (период инвестирования), означает, что такие ценные бумаги не могут считаться безрисковым активом.

В общем виде для спот-ставок в годы ***t-1*** и ***t*** связь с форвардной ставкой между годами ***t-1*** и ***t*** такова:

$$r_{t-1,t} = \frac{(1+r_t)^t}{(1+r_{t-1})^{t-1}} - 1,$$

или

$$(1 + r_{t-1})^{t-1} \times (1 + r_{t-1,t}) = (1 + r_t)^t. \quad (3.10)$$

Если в вышеприведённом уравнении не соблюдалось равенство, скажем левая часть в какой-то момент времени была больше правой, то это привело бы к процедуре арбитража (получения безрисковой прибыли путём использования разных цен на одинаковые ценные бумаги). Предположим, что правая часть приведённого равенства представляет двухгодовую спот-ставку, которая меньше произведения одногодовой спот-ставки и годовой форвардной ставкой $r_{1,2}$. Тогда бы потенциальный инвестор покупал бы двухгодовые спот-ставки $r_{0,2}$ и продавал одногодовые спот-ставки $r_{0,1}$ и форвардные ставки $r_{1,2}$, пока рынок не достиг бы своего равновесия.

Теперь на основе полученной зависимости для доходности к погашению Еврооблигаций Минфина РФ (3.9) рассчитаем форвардные ставки, значения которых представлены в табл. 12.

В качестве примера будем рассматривать инвестиционный проект по вводу в строй новой производственной линии на периоде расчёта интегральных показателей равным 10 лет.

Для упрощения расчетов примем, что значение премии за риск, включая среднерыночный риск и риск, учитывающий характерные особенности самого инвестиционного проекта не будет меняться на протяжении всего периода реализации проекта и равняется 10%.

Отметим, что при проведении достаточно "грубых" расчётов, когда шаг дисконтирования берётся на уровне одного года, первый множитель коэффициента дисконтирования относится к денежному потоку второго года. Обычно, как это уже отмечалось, несмотря на длительность прогнозного периода, в нашем примере это 10 лет, процедура дисконтирования денежных потоков **(CF_i)** проводится с квартальным либо месячным шагом. Тогда для дисконтирования денежных потоков нулевого года реализации проекта мы должны знать значение спот-ставки с периодом погашения через год, если мы принимаем во внимание, что ставка дисконтирования меняется по периодам.

В табл. 12 процедура дисконтирования для большей наглядности и простоты расчётов проводится с шагом дисконтирования, равным году.

В столбце 5 табл. 12 приводится значение коэффициента (фактора) дисконтирования при допущении, что ставка дисконтирования на протяжении всего прогнозного периода остаётся неизменной. Следовательно, чтобы избежать ситуаций, связанных с неопределённостью, которая приводит к риску процентной ставки и риску ставки реинвестирования, мы в качестве безрисковой составляющей берём доходность к погашению (***YTM***) со сроком погашения через десять лет (величина прогнозного периода) на основе формулы (3.9) и получаем значение, равное 0,0632.

В случае, когда безрисковая величина ставки дисконтирования (цена альтернативных издержек привлечения капитала) меняется по периодам реализации проекта, значения денежных потоков приводим, пользуясь формулой (3.1).

Как показывают расчёты, приведённые в табл. 12, разница в величине ***NPV*** на прогнозном периоде 10 лет и значении премии за риск, равном 10% в случаях когда денежных потоки приводятся по постоянной и переменной цене привлечения капитала, составляет **13%**. Данная величина весьма существенна и находится на уровне рентабельности продаж (Return on sales, ***ROS***) машиностроительных предприятий и, следовательно, может иметь определяющее значение при принятии решения об эффективности капитальных вложений на основе критерия ***NPV***. При проведении анализа рисков, например, в рамках имитационного моделирования (метод Монте-Карло) может оказаться, что уменьшение критерия ***NPV*** на 13% создаёт достаточно большую вероятность выпадения отрицательного значения ***NPV*** и, как следствие, проект может быть признан как достаточно неустойчивый при изменении его ключевых параметров.

Таблица 12

ФОРВАРДНЫЕ СТАВКИ

Период реализации проекта, *n, лет*	Период до погашения, t, *лет*	Risk free spot rate для данного периода	Risk free forward rate для периода времени между t_{n-1} и t_n	Полный коэффициент дисконтиров. на основе spot rate	Полный коэффициент дисконтиров. на основе forward rate	Δ,%
1	2	3	4	5	6	7 = =5-6
0	1	0,0354		1,0000	1,0000	
1	2	0,0394	0,04342	0,9405	0,9405	0,00
2	3	0,0432	0,04696	0,7652	0,7391	2,61
3	4	0,0467	0,05385	0,6632	0,6354	2,78
4	5	0,0500	0,06006	0,5717	0,5462	2,55
5	6	0,0531	0,06559	0,4905	0,4696	2,09
6	7	0,0560	0,07043	0,4190	0,4037	1,54
7	8	0,0586	0,07459	0,3568	0,3470	0,97
8	9	0,0610	0,07805	0,3028	0,2983	0,45
9	10	0,0632	0,08082	0,2565	0,2565	0,00
∑						12,99

Вообще говоря, Авторы статьи считают, что процедуру дисконтирования денежных потоков **(CF_i)** при оценке эффективности инвестиционного проекта следует проводить по методу затрат собственного капитала (equity residual method), который не предполагает структуры источников финансирования проекта в ставке дисконтирования. Тогда как метод чистого операционного потока предполагает дисконтирование денежных потоков **(CF_i)** по ставке ***WACC*** (Weighted Average Cost of Capital), значение которой меняется (уменьшается) в ходе реализации инвестиционного проекта, по мере погашения задолженности.

Согласно правилу внутренней нормы доходности ***(IRR)*** мы принимаем проект, если значение ***IRR*** больше альтернативных издержек капитала. В нашем случае цена альтернативных издержек капитала (полная ставка дисконтирования) в случае, когда они меняются на протяжении прогнозного периода проекта или остаются постоянными, равняется **18,08** и 16,32 % соответственно. Авторы статьи считают, что даже если величина ***IRR*** имеет недостаточно высокое значение, то для придания большей достоверности оценкам, при принятии решения об эффективности проекта, следует руководствоваться большим из двух значений ставок дисконтирования. Это, в свою очередь, уменьшает запас прочности при принятии проекта на основе критерия ***IRR*** .

Следует также отметить, что в нашем примере все ставки дисконтирования имеют долларовое значение. Как правило, денежные потоки проекта представляются в национальной валюте, например, в рублях, которые нужно приводить (дисконтировать) по рублёвому значению цены привлечения капитала. Тогда ставится вопрос о переходе к рублёвому значению ставки дисконтирования.

Процедура пересчета валютной доходности цены привлечения капитала в рублёвую доходность производится на основе теоремы паритета процентных ставок и валютного курса (interest-rate parity), что представляет собой особый случай применения модели фьючерсной цены.

В качества примера можно привести стратегию, связанную с инвестированием некоторой суммы ∑ в долларах США в безрисковые Еврооблигации РФ с валютной доходностью r_{USD}, которая принесёт через год денежные средства в размере $\sum x\ (1 + r_{USD})$. Стратегия, связанная с инвестированием этой же суммы ∑ в долларах США в Российские ценные бумаги с рублёвой доходность $r_{РУБЛ}$, при обменном спотовом курсе $s_{руб/USD}$ и фьючерсной цене $f_{руб/USD}$ принесёт через год сумму в долларах США в размере

$$\sum \frac{f_{USD/руб}}{s_{USD/руб}} *(1+r_{РУБЛ}),$$

где

$s_{руб/USD}$ и $f_{руб/USD}$ выражены в рублях за доллар США.

Поскольку сумма, полученная в результате этих стратегий, одинакова (∑), то и выплаты по ним также должны быть одинаковы. Отсюда получаем нижеследующее равенство.

$$\frac{1+r_{руб}}{1+r_{USD}} = \frac{s_{USD/руб}}{f_{USD/руб}},$$

где $r_{руб}$ – значение рублевой ставки дисконтирования;
r_{USD} – значение валютной ставка дисконтирования;
$f_{руб/USD}$ – форвардный курс рубля к доллару;
$s_{руб/USD}$ – текущий обменный спот-курс рубля к доллару
То есть:

$$r_{руб} = \frac{s_{USD/руб}}{f_{USD/руб}} * (1+r_{USD}) - 1.$$

На момент написания статьи $s_{руб/USD}$ и $f_{руб/USD}$ по данным торгов на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ) на 10 марта 2005 года значения равняются 27,461 *руб./ Доллар США* и 27,628 *руб./ Доллар США*, соответственно.

Тогда, воспользовавшись теоремой о паритете процентных ставок, описанной выше, можно установить, что рублёвая ставка дисконтирования, эквивалентная определённой выше валютной ставке в размере **18,08%**, равна **18,8%.**

Чтобы избежать трудностей, связанных с внутренней нормой доходности (***IRR***), обусловленных временной структурой процентных ставок, можно значение ***IRR*** сравнивать с доходностью к погашению (***YTM***) свободно обращающихся на рынке ценных бумаг, сопряженных с эквивалентным риском, оцениваемому проекту. Они имеют одинаковые сроки погашения, равные прогнозному периоду.

В качестве примера рассмотрим проект, инвестиции которого осуществляются в активы металлургической отрасли. Предположим, что длительность прогнозного периода составляет 4,25 года и совпадает с датой погашения облигаций (12 июня 2009 года)[1], имитированных ОАО "Углемет-трейдинг", с доходностью к погашению, равной 9,23% годовых по данным агентства Reuters. Даная компания является вертикально интегрированным металлургическим холдингом, то есть можно говорить, что риск инвестирования в активы ОАО "Углемет-трейдинг" сопоставим с риском инвестирования в оцениваемый проект. Тогда при оценке эффективности проекта доходность к погашению облигаций ОАО "Углемет-трейдинг" можно сравнивать со значением ***IRR*** проекта. Если значение ***IRR*** превышает ***YTM*** облигаций, то можно говорить о принятии проекта.

4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА ДИСКОНТИРУЕМЫХ ПЕРИОДОВ ОКУПАЕМОСТИ (*DPP*) ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ С НЕОРДИНАРНОЙ СХЕМОЙ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ

При анализе инвестиционных проектов с неординарным денежным потоком, который имеет две инвестиционные фазы, одна из которых находится в самом начале реализации проекта (в нашем примере, – в течение первых двух кварталов), а вторая – на втором году реализации проекта. Очевидно, возникает необходимость знать точное значение дисконтированного периода окупаемости первой инвестиции (DPP_1) при составлении полного финансового плана реализации всего инвестиционного проекта. Поскольку период окупаемости первой инвестиции наступает несколько раньше наступления второй инвестиционной фазы, то на момент реализации второй инвестиции возникает некая свободная денежная наличность, проще говоря, NPV_1, приносимой первой инвестицией, а следовательно, потребность во внешнем финансировании при реализации второй инвестиционной фазы меньше на величину NPV_1.

При составлении бизнес-планов и расчёте их интегральных показателей на программе **Project Expert** выдаётся только одно значение дисконтируемого периода окупаемости (DPP). Этот интегральный показатель рассчитывается программой Project Expert как некая точка (момент времени), когда сумма всех дисконтированных потоков от трёх деятельностей (операционной, инвестиционной, финансовой) равняется нулю, то есть рассчитывается минимально необходимое время для покрытия совокупных инвестиционных затрат за счёт денежного потока за период реализации всего инвестиционного проекта.

Для расчёта двух периодов окупаемости авторы статьи решили воспользоваться процедурой функционального интерполирования на основе многочлена Ньютона, степень которого можно повышать, а следовательно и увеличивать точность расчёта, путём добавления очередных слагаемых, имеющих более высокую степень. То есть данный метод обладает преимуществом по сравнению с интерполяционным многочленом Лагранжа, так что при введении дополнительных узлов интерполяции (увеличение прогнозного периода расчёта интегральных показателей инвестиционного проекта) все коэффициенты многочлена Лагранжа следует пересчитывать заново.

Постановка задачи выглядит следующим образом:

Исходная интерполируемая сеточная функция (значение $NPV(T_i),\ i=0,..n,$ по периодам реализации проекта) задана на непрерывной сетке $\Omega n = \{T_0, T_1, T_3, \dots T_n\}$ – узлы интерполяции, характеризуется шагами $h_{i+1} = T_{i+1} - T_i = var.$ Геометрически это означает, что нужно найти кри-

[1] На момент написания статьи

вую (см. рис. 13) $\tilde{f}_m(T,\bar{a})$, проходящую через заданное множество точек ***(T_i, NPV_i), i=0,..,n.***

Такой несимметричный многочлен Ньютона является альтернативным симметричным многочленам Лагранжа, основан на раздельных разностях, поскольку (в нашем случае) шаг интерполирования непостоянен ***($h_{i+1} = T_{i+1} - T_i = var$).***

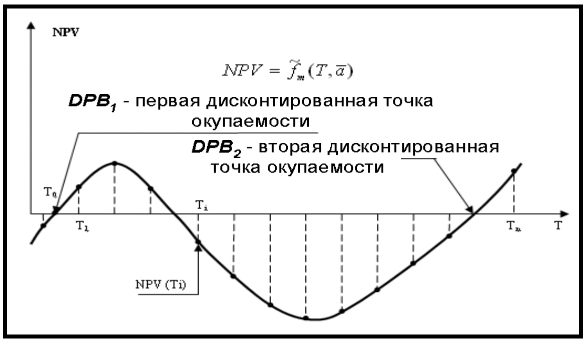

Рис. 13. Расчёт дисконтируемых периодов окупаемости

Таблица 13

СХЕМА ДЕНЕЖНОГО ПОТОКА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

№	Наименование	1 квартал 0 года	2 квартал 0 года	3 квартал 0 года	4 квартал 0 года
1	T_i				
2	CF_i от операционной деятельности, *тыс. руб.*			30 000	60 000
3	CF_i от инвестиционной деятельности, *тыс. руб.*	-45 000	-15 000		
4	Σ денежный поток, *тыс. руб.* (п.2+п.3).	**-45 000**	**-15 000**	**30 000**	**60 000**
5	Фактор дисконтирования.	**1,0000**	**0,9595**	**0,9206**	**0,8833**
6	Σ дисконтированный денежный поток, *тыс. руб.* (п.4 * п.5).	**-45 000**	**-14 392**	**27 617**	**52 996**
7	Σ дисконтированный денежный поток накопленным итогом, *тыс. руб.*	**-45 000**	**-59 392**	**-31 775**	**21 221**

В общем виде параболическая интерполяция в виде многочлена Ньютона ***n***-ой степени для нашего случае имеет вид:

$$NPV(T) = NPV_0 + NPV(T_0, T_1)*(T-T_0) + $$
$$+NPV(T_0, T_1, T_2)*(T- T_0)*(T-T_1) + \ldots + $$
$$+NPV(T_0, T_1, \ldots,Tn)*(T-T_0)*(T-T_0)*(T-T_0)*\ldots$$
$$*(T-T_{n-1}) \qquad (4.1)$$

Согласно теореме о единственности решения задачи интерполяции вышеуказанный интерполяционный многочлен Ньютона, либо многочлен Лагранжа n-ой степени являются тождественными многочлену

$$\tilde{f}_m(T,\bar{a}) = \sum_{j=0}^{m} a_j * x^j \qquad (4.2)$$

Поскольку функцию ***NPV(T)*** можно характеризовать как гладкую функцию, то ***NPV(T_j, T_{j+1}, …, T_{j+k})*** при возрастании ***k*** уменьшается и стремится к нулю, то есть ***NPV(T_j, T_{j+1}, …, T_{j+k}) → 0*** при ***k***→ ∞.

В табл. 13 и 14 приводится схема денежного потока инвестиционного проекта, который имеет две инвестиционные фазы. Поскольку значение ***NPV*** в четвёртом квартале 0 года становится положительной, на момент реализации второй инвестиционной фазы, то можно с уверенностью говорить о существовании двух дисконтируемых периодах окупаемости (***DPP***).

Таблица 14

СХЕМА ДЕНЕЖНОГО ПОТОКА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

№	Наименование	1 пол. 1 года	2 пол. 1 года	2 год	3 год
1	T_i				
2	CF_i от операционной деятельности, *тыс. руб.*	100 000	140 000	280 000	300 000
3	CF_i от инвестиционной деятельности, *тыс. руб.*	-350 000	-150 000		
4	Σ денежный поток, *тыс. руб.* (п.2+п.3)	**-250 000**	**-10 000**	**280 000**	**300 000**
5	Фактор дисконтирования	**0,8475**	**0,7801**	**0,7182**	**0,6086**
6	Σ дисконтированный денежный поток, *тыс. руб.* (п.4 * п.5).	**-211 864**	**-7 801**	**201 092**	**182 589**
7	Σ дисконтированный денежный поток накопленным итогом, *тыс. руб.*	**-190 644**	**-198 445**	**2 647**	**185 236**

Построим для данной схемы денежного потока интерполяционный алгебраический многочлен Ньютона, значения раздельных разностей которого представлены в табл. 15.

Тогда формула для алгебраического интерполяционного многочлена Ньютона для рассматриваемого денежного потока имеет следующий вид:

$$NPV(T) = - 45\,000 + (T-0,25)*(-57\,567,9) +$$
$$+ (T-0,25)*(T-0,5)*336\,073,8 + (T-0,25)*(T-0,5)*$$
$$*(T-0,75)*(-177\,396,0) + (T-0,25)* \ldots *(T-1,0)*$$
$$*(-698\,596,6) + (T-0,25)* \ldots *(T-1,0)*(T-1,5)*$$
$$*1\,182\,144,5 + (T-0,25)* \ldots *(T-1,5)*(T-2)*$$
$$*(-702\,632,0) + (T-0,25)* \ldots *(T-2)*(T-3)*256\,908,8 =$$
$$= 256\,908,80*T^7 - 3\,014\,811,20*T^6 +$$
$$+13\,602\,961,30*T^5 - 30\,056\,591,30*T^4 +$$
$$+ 34\,482\,262,17*T^3 - 20\,250\,658,72*T^2 +$$
$$+ 5\,619\,232,302*T - 618\,082,477.$$

Таким образом, авторы статьи получили зависимость ***NPV*** по периодам реализации проекта (***T***, лет) алгебраического итерполяционного многочлена Ньютона (сеточной функции). Приравнивая полученный многочлен к нулю, находим значения ***T*** (корни уравнения), при которых ***NPV*** становится равным нулю.

При этом не все значения корней являются дисконтируемыми периодами окупаемости (***DPP***) рассматриваемого инвестиционного проекта, а только те корни, для которых выполняется необходимое и достаточное условия возрастания функции на заданном интервале, то есть для всех ***T*** на интервале нахождения корня уравнения ***NPV(T)=0*** должно выполняться условие ***NPV' (T) ≥ 0*** .

Таблица 15

ЗНАЧЕНИЯ РАЗДЕЛЬНЫХ РАЗНОСТЕЙ

i	1	2	3	4	5	6	7	8
T_i	0,25	0,5	0,75	1,0	1,5	2	3	4
NPV_i, тыс. руб.	-45 000,0	-59 392,0	-31 774,7	21 220,8	-190 643,6	-198 445,0	2 646,6	185 235,9
$NPV(x_j, x_{j+1})$, тыс. руб.		-57 567,9	110 469,0	211 982,4	-423 728,8	-15 603,0	201 091,6	182 589,3
$NPV(x_j, x_{j+1}, x_{j+2})$, тыс. руб.			336 073,8	203 026,8	-847 614,9	408 125,9	144 463,1	-9 251,2
$NPV(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3})$, тыс. руб.				-177 396,0	-1050641,7	1 004592,6	-131 831,4	-61 485,7
$NPV(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_{j+4})$, тыс. руб.					-698 596,6	1 370156,2	-505 077,3	23 448,6
$NPV(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{j+5})$, тыс. руб.						1182 144,5	-750 093,4	162 623,4
$NPV(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{j+6})$, тыс. руб.							-702 632,0	260 776,2
$NPV(x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{j+7})$, тыс. руб.								256 908,8

$$NPV(T) = 256\,908{,}80 \cdot T^7 - 3\,014\,811{,}20 \cdot T^6 + 13\,602\,961{,}30 \cdot T^5 - 30\,056\,591{,}30 \cdot T^4 + 34\,482\,262{,}17 \cdot T^3 - 20\,250\,658{,}72 \cdot T^2 + 5\,619\,232{,}302 \cdot T - 618\,082{,}477 = 0 \quad (4.3)$$

Прибегая к компьютерной программе **MAPLE-9**, авторы статьи графически отделили интервалы нахождения корней (см. рис. 13) для полученной сеточной функции ***NPV(T)*** в виде алгебраического многочлена. Далее обращаясь к вышеизложенному методу секущих (метод Ньютона), получаем следующие действительные значения корней (***T***), в которых значение сеточной функции ***NPV(T)*** равняется нулю:

T = 0,8705; T = 1,174; T = 2,14, *[лет].*

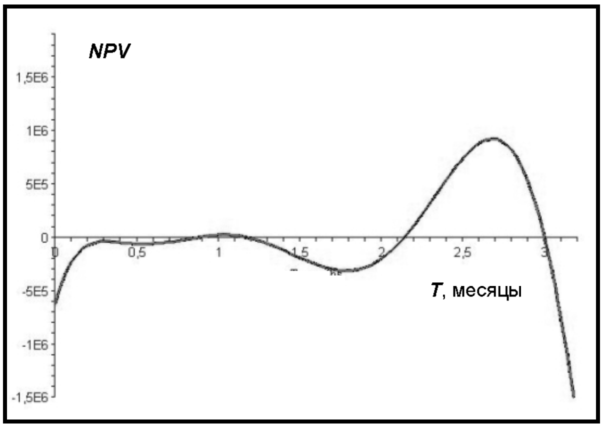

Рис. 14. NPV on Time Dependency

Теперь исследуем, какие из полученных значений корней уравнения являются дисконтируемыми периодами окупаемости.

Поскольку ***NPV'(T) ≥ 0*** на интервале [0,4; 0,7], и ***NPV'(T) < 0*** на интервале [1,2; 1,6], а на интервале [1,7; 2,5] ***NPV'(T)≥0***, следовательно, ***T* = 0,8705** года; ***T* = 2,14** года являются первым и вторым дисконтируемыми периодами окупаемости, DPP_1 и DPP_2, соответственно.

Поскольку в рассматриваемом случае авторы статьи ставили задачей построение интерполяционного многочлена (сеточной функции) при отсутствии какой-либо реальной функции, описывающей зависимость ***NPV(T)***. Следовательно, отсутствует возможность рассчитать априорную погрешность для полученного интерполяционного многочлена Ньютона. Авторы статьи не приводят расчётов по построению интерполяционного многочлена Лагранжа, поскольку, обращаясь к **тереме о единственности решения задачи интерполяции,** можно с уверенностью утверждать, что полученный интерполяционный многочлен является единственным в своём роде.

Здесь же отметим, что единственное отличие интерполяционного многочлена Ньютона от многочлена Лагранжа для функции, заданной на неравномерной сетке, заключается в том, что многочлен Ньютона записан не через значения функции, а через раздельные разности.

Литература

1. В. Е. Барбаумов, И.М. Гладких, А.С. Чуйко. Финансовые инвестиции. Финансы и статистика, Москва, 2003 год.
2. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. Численные методы. БИНОМ. Лаборатория знаний, Москва, 2004 год.
3. С. В. Валдайцев. Управление стоимостью предприятия. «Юнити», Москва, 2002 год.
4. Ф. П. Васильев. Методы оптимизации. Факториал Пресс, Москва, 2002 год.
5. П. Л. Виленский, В.Н. Лившиц, С.А. Смоляк. Оценка эффективности инвестиционных проектов, теория и практика. Издательский дом «ДЕЛО», Москва, 2001 год.
6. Е. А. Волков. Численные методы. Наука, Москва, 1982 год.
7. И.М. Волков, М.В. Грачёва. Проектный анализ. «Инфра-М», Москва, 2004 год.
8. М. В. Грачёва. Риск-анализ инвестиционного проекта. «Юнити», Москва, 2001 год.
9. М. В. Грачёва, Л. Н. Фадеева, Ю. Н. Черёмных. Количественные методы в экономических исследованиях, «Юнити», Москва, 2004 год.
10. А. Г. Грязнова, М. А. Федотова. Оценка бизнеса, «Финансы и статистика», Москва, 2003 год.
11. С. В. Жуленев. Финансовая математика. Издательство Московского университета, 2001 год.
12. О.О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н.Черёмных. Математические методы в экономике. «Дело и Сервис», Москва, 2004 год.
13. В. И. Киреев, А. В. Численные методы в примерах и задачах. «Высшая школа», Москва, 2004 год.
14. В. В. Ковалёв. Введение в финансовый менеджмент. «Финансы и статистика», Москва, 2001 год.

15. В. В. Ковалёв, В. А. Уланов. Курс финансовых вычислений. «Финансы и статистика», Москва, 2002 год.
16. А. А. Лобанов, А. В. Чугунова. Энциклопедия финансового риск-менеджмента. «Альпина паблишер», Москва, 2003 год.
17. П. В. Конюховский. Математические исследования операций в экономике. Издательский дом «Питер», Санкт-Петербург, 2002 год.
18. И. Я. Лукасевич. Анализ финансовых операций. Издательское объединение «Юнити», Москва,1998 год.
19. С. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич. Математические методы и модели в экономике. ТетраСистемс, Минск, 2002 год.
20. Международные стандарты финансовой отчётности (МСФО) International Accounting Standards (IAS). «АСКЕРИ», Москва, 2004 год.
21. В. П. Попов. Финансовый бизес-план. «Финансы и статистика», Москва, 2001 год.
22. М. А. Рогов. Риск-менеджмент. «Финансы и статистика», Москва, 2001 год.
23. В. В. Розен. Математические модели принятия решений в экономике. «Высшая школа», Москва, 2002 год.
24. Ю. В. Тарануха, Д.З. Земляков. Микроэкономика. «Дело и Сервис», Москва, 2002 год.
25. В. М. Трояновский. Математическое моделирование в менеджменте. РДЛ, Москва, 2002 год.
26. В. З. Черняк. А.В. Черняк. И. В. Довыденко. Бизнес планирование. ООО «Издательство РДЛ», Москва, 2002 год.
27. Е. М. Четыркин. Финансовая математика. «Дело», Москва, 2001 год.
28. Е. М. Четыркин. Финансовый анализ производственных инвестиций. Издательство «ДЕЛО», Москва, 2002 год.
29. Шапкин А. С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций. Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», Москва, 2005 год.
30. Шапкин А. С. Математические методы и модели исследования операций. Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», Москва, 2004 год.
31. Юджин Бригхем, Луис Гапенски. Финсовый менеджмент. Экономическая школа, Санкт-Петербург, 2001 год.
32. Ричард Брейли, Стюарт Майерс. Принципы корпоративных финансов. ЗАО «Олимп –Бизнес», Москва, 2004 год.
33. Асват Дамодаран. Инвестиционная оценка. «Альпина бизнес бук», Москва, 2004 год.
34. Кристофер Доугерти. Введение в эконометрику. ИНФРА-М, Москва, 2001 год.
35. Том Коупленд, Тим Колер, Джек Мурин. Стоимость компаний. Оценка и управление. ЗАО «ОЛИМП-БИЗНЕС», Москва, 2002 год.
36. Лутц Крушвиц. Инвестиционные расчёты. Издательский дом «Питер», Санкт-Петербург, 2001 год.
37. Л. Крушвиц, Д. Шеффер, М. Шваке. Финансирование и инвестиции. Издательский дом «Питер», Санкт-Петербург, 2001 год.
38. Кэмпбэлл Р. Макконнелл. Стэнли Л. Брю. Экономикс, принципы, проблемы и политика. «Инфра-М», Москва, 2001 год.
39. Ченг Ф. Ли, Джозеф И. Финнерти. Финансы корпораций: теория, методы и практика. «Инфра-М», Москва, 2000 год.
40. Франко Модильяни, Мертон Миллер. Сколько стоит фирма? Издательство «Дело», Москва, 1999 год.
41. Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк. Численные методы. Издательский дом «Вильямс», Москва, Санкт-Петербург, Киев, 2001 год.
42. Т. Дж. Уотшем, К. Паррамоу. Количественные методы в финансах. «Юнити», Москва, 1999 год.
43. Фрэнк Дж. Фаббоци. Управление инвестициями, «Инфра-М», Москва, 2001 год.
44. Эрик Хелферт. Техника финансового анализа. Издательское объединение «ЮНИТИ», Москва, 1996 год.
45. Роберт Н. Холт, Сет Б. Барнес. Планирование инвестиций. Издательство «Дело ЛТД», Москва, 1994 год.
46. Джеймс К. Ван Хорн, Джон М. Вахович. Основы финансового менеджмента. Издательский дом «Вильямс» Москва, Санкт-Петербург, 2001 год.
47. Джон Уайли энд Санз. Составление бизнес-плана. Пособия Эрнст & Янг, Москва, 1996год.
48. Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александр, Джеффери В. Бэйли. Инвестиции. «Инфра-М», Москва, 1999 год.

Мальцев Александр Святославович