3.8. УЧЕТ НЕТОЧНОСТИ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РАСЧЕТЕ НЕКОТОРЫХ ВАРИАНТОВ БИЗНЕС-ПЛАНА ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКЦИИ ОАО «МОСКОВСКИЙ ЗАВОД ДОМАШНИХ ХОЛОДИЛЬНИКОВ»

Романов Б.А., к.т.н., заведующий кафедрой математических дисциплин

Московский бухгалтерский институт

В статье выполнен учет неточности параметров в задаче анализа инвестиционного производственного проекта. Неточности параметров рассматривается как случайные величины, распределенные на заданных отрезках. В качестве законов распределения используются равномерное и нормальное распределения. С целью выявления влияния отдельных параметров на результаты расчетов рассматриваются наряду с частными случаями неточности отдельных параметров также и общий случай неточности всех параметров. Рассчитываются математические ожидания и дисперсии выпуска продукции в зависимости от заданных интервалов неточности исходных случайных величин; выполнен анализ результатов расчетов.

В статье [5] приводятся расчеты некоторых вариантов бизнес-плана реализации производственного инвестиционного проекта ОАО «Московский завод домашних холодильников». В качестве вариантных параметров рассматривались отклонения в планах реализации производимой продукции, задержки поступлений денежных средств после отгрузки продукции (период задержки и доля от общей дебиторской задолженности), величина начального капитала. В статье выполнен анализ результатов расчетов в зависимости от конкретных числовых значений анализируемых параметров.

В расчетах использовалась математическая модель реализации производственного проекта группой предприятий, изложенная в [4] (Раздел 5.2 «Модель расчета прибыльности и срока окупаемости производственного проекта»). В статье [5] предполагается, что исходные параметры заданы точно. Однако в экономике точные значения параметров определить практически невозможно в силу ряда причин. Во-первых, в прогнозных вариантах бизнес-планов параметры практически всегда известны, если известны вообще, с достаточно большой неточностью. Во-вторых, даже при непосредственном измерении этих параметров всегда существует достаточно большая погрешность их определения.

Поэтому представляет интерес учесть при анализе вариантов бизнес-планов неточность исходных параметров. Расчеты по учету неточности (неопределенности) параметров в статической модели реализации производственного проекта группой предприятий выполнены в [6]. В данной статье осуществлен анализ неточности параметров на динамической модели реализации производственного проекта на одном предприятии. Этот анализ основан на представлении модели [5] в стохастической интерпретации.

Динамическую модель [5] в случае неточности (неопределенности) ее параметров можно рассматривать как стохастический процесс, т.е. последовательность случайных значений выходных переменных в моменты времени $t\ (t = 0, 1, 2, ...)$. Случайные переменные принимают непрерывные значения, а время – дискретные значения.

Состояние системы переменных в каждый момент времени зависит от состояний в предшествующие моменты времени. Однако на практике моделировать такие процессы очень сложно, поэтому обычно применяют упрощающие предложения. Важнейшим среди них является предположение, что состояние системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящий момент и не зависит от прошлого. Такие процессы называются процессами Маркова.

Допустим, что состояние динамической системы можно представить процессом Маркова. Этот процесс определен, если есть правило, с помощью которого можно определить вероятности последовательности состояний системы в моменты времени t. Для этого необходимо решить следующие задачи:

- определить информацию, на основе которой можно получить все другие данные о состоянии системы;
- определить распределение вероятностей после некоторого числа шагов по времени и выяснить, приближается ли оно с ростом числа шагов к какому-либо предельному распределению;
- определить вероятности перехода из одного фазового состояния в другое на некотором шаге по времени.

Рассматриваемый нами динамический процесс определяется рекуррентными соотношениями типа

$$X(t+1) = \Phi(t+1, X(t), \xi(t+1)),\ t = 0, 1, 2, ..., \quad (1)$$

где $\Phi(t+1, x, y),\ x \in E_L, y \in E_\Xi$ при каждом t случайная функция $L + \Xi$ переменных x, y, а $\xi(1), \xi(2), ...$ – некоторые случайные векторы со значениями из E_Ξ.

Для того чтобы рекуррентное соотношение (1) определяло некоторый процесс $X(t)$, необходимо задать начальное условие $X(0)$ в момент времени $t = 0$. Процесс $X(t)$ с таким начальным условием будем обозначать $X^{0,X(0)}(t)$. В нашем случае $X(0) = x$ не случайно и $X^{0,x}(t)$- процесс, выходящий в момент времени ноль из фиксированной точки x.

Пусть случайные величины $\xi(1), \xi(2), ...$ независимы в совокупности. Тогда из вида системы (1) вытекает и независимость процесса $X(u) = X^{0,X(0)}(u)$, $\xi(u+1), \xi(u+2), ...$ при $u > 0$. При этом процесс $X(t) = X^{0,X(0)}(t)$ полностью определяется по величинам $X(0), \xi(1), \xi(2), ..., \xi(t)$ т.е. является некоторой функцией величин $X(0),\ \xi(1), \xi(2), ..., \xi(t)$. В [3] доказывается, что процесс $X(t) = X^{0,X(0)}(t)$, определяемый рекуррентными соотношениями (1) и начальным условием $X(0)$, является марковским и его переходная функция $P(u, x, u+1, \Gamma)$ за один шаг равна:

$$P\{\Phi(u+1, x, \xi(u+1))\} \in \Gamma .$$

В качестве выходных показателей, для которых целесообразно разработать стохастическую интерпретацию можно использовать выпуск продукции $DXL(l,t)$

(прямая задача) и количество занятых $PL(I,t)$, которое требуется для обеспечения заданного объема выпуска продукции на предприятии в каждой точке по времени (обратная задача). В данной статье рассмотрим стохастическую интерпретацию только прямой задачи, т.е. в качестве выходного случайного показателя рассмотрим выпуск продукции $DXL(I,t)$. В качестве неопределенных исходных переменных, для которых задаются функции распределений на заданных интервалах, рассмотрим параметры:

$$PL(I,t),\ MXL(I,t),\ ear(I),\ ptearsum(I),$$

где

$DXL(I,t+1)$ – выпуск изделия I-го типа в точке по времени $t+1$;

$PL(I,t)$ – количество занятых на выпуске изделия I-го типа в точке по времени t;

$MXL(I,t)$ – производственная мощность по выпуску изделия I-го типа в точке по времени t;

$ear(I)$ – средняя заработная плата на одного цехового работника, производящего I-го изделие;

$ptearsum(I)$ – доля цеховых затрат на заработную плату (включая единый социальный налог), приходящихся на единицу I-го изделия от общих цеховых затрат на заработную плату.

В общем виде $MXL(I,t)$ - производственная мощность по выпуску изделия I-го типа в точке по времени t определяется вне рамок модели [5]. В данной статье для упрощения расчетов будем вычислять эту величину по формуле:

$$MXL(I,t)=\frac{ear(I)PL(I,t)}{ptearsum(I)}.$$

В модели [5] могут использоваться два алгоритма, в которых отличается расчет величины $DXL(I,t+1)$. В 1-м алгоритме нет ограничений на расход материалов и комплектующих, поскольку в случае недостатка денежных средств необходимый приход обеспечивается за счет займов и кредитов. Во 2-м алгоритме есть ограничения на расход материалов и комплектующих, поскольку их количество определяется наличием денежных средств на предприятии. В данной статье рассмотрен только 1-й алгоритм.

В этом алгоритме выражение для вычисления показателя выпуска продукции $DXL(I,t+1)$ можно записать в виде:

$$DXL(I,t+1)=min\left\{\frac{ear(I)PL(I,t)}{ptearsum(I)},MXL(I,t)\right\}. \quad (2)$$

В соответствии с данным алгоритмом выпуск продукции может изменяться при изменении количества занятых и при изменении производственных мощностей. Сначала рассмотрим вариант, когда неточными (неопределенными) считаются только величины $PL(I,t)$ и $MXL(I,t)$. Эти величины трактуются как случайные с заданными функциями распределений. Зависимости этих величин как функции времени можно записать в виде не случайного слагаемого и случайного приращения:

$$PL(I,t)=\overline{PL}(I,t)+\widehat{PL}(I,t)$$

и

$$MXL(I,t)=\overline{MXL}(I,t)+\widehat{MXL}(I,t),$$

где

$\overline{PL}(I,t)$ – среднее значение количества занятых на производстве продукции I-го типа в точке по времени t;

$\widehat{PL}(I,t)$ – случайное изменение количества занятых на производстве продукции I-го типа в точке по времени t;

$\overline{MXL}(I,t)$ – среднее значение мощности по производству продукции I-го типа в точке по времени t;

$\widehat{MXL}(I,t)$ – случайное изменение мощности по производству продукции I-го типа в точке по времени t.

Будем считать случайные величины $\widehat{PL}(I,t)$ и $\widehat{MXL}(I,t)$ центрированными, т.е. их математические ожидания равны нулю. Подставляя эти выражения в формулу для вычисления выпуска продукции $DXL(I,t)$ и после преобразований получаем рекуррентное выражение процесса Маркова для этой величины:

$$DXL(I,t+1)=min\left\{\overline{DXL}(I,t)\right\}+$$
$$+min\left\{\frac{ear(I)\widehat{PL}(I,t)}{ptearsum(I)},\widehat{MXL}(I,t)\right\},$$

где $\overline{DXL}(I,t)=min\left\{\frac{ear(I)\overline{PL}(I,t)}{ptearsum(I)},\overline{MXL}(I,t)\right\}$.

Первое слагаемое в этой сумме представляет собой не случайную величину, а второе случайную. Поэтому для определения переходной функции процесса Маркова случайной величины $DXL(I,t+1)$ требуется только вычислить переходную функцию второго слагаемого. В [3] доказано, что переходная функция процесса Маркова для рекуррентной величины $DXL(I,t+1)$ за один шаг по времени – это функция распределения этой величины.

Конечной целью построения стохастической модели является определение числовых характеристик выходных показателей, в нашем случае случайной величины $DXL(I,t+1)$. Обычно такими характеристиками являются математическое ожидание и дисперсия, для расчета которых используется не функция распределения, а плотность этой функции, т.е. продифференцированная функция распределения. Поскольку выражения случайных величин, $\widehat{PL}(I,t)$, $\widehat{MXL}(I,t)$ и $DXL(I,t+1)$ одинаковы для любого индекса I и шага по времени t, то для удобства записи их опустим и обозначим эти случайные величины так:

$$z=\frac{ear(I)\widehat{PL}(I,t)}{ptearsum(I)},\ y=\widehat{MXL}(I,t),$$
$$\varphi=DXL(I,t+1)=min(z,y).$$

Полагая случайные величины z и y независимыми (никаких оснований считать обратное нет), плотность функции распределения случайной величины φ, обозначаемой через f_φ, записывается в виде [2]:

$$f_\varphi=f_z[1-F_y]+f_y[1-F_z], \quad (3)$$

где f_z и f_y – плотности распределения случайных величин z и y;

F_z и F_y – функции распределения случайных величин z и y.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины φ, обозначаемые через M_φ и D_φ, вычисляются по формулам:

$$M_\varphi = M_z + M_y, \qquad (4)$$

где

$$M_z = \int_{G_z} z f_z(z)[1 - F_y(z)]dz;$$

$$M_y = \int_{G_y} y f_y(y)[1 - F_z(y)]dy.$$

$$D_\varphi = D_z + D_y, \qquad (5)$$

где

$$D_z = \int_{G_z} z^2 f_z(z)[1 - F_y(z)]dz;$$

$$D_y = \int_{G_y} y^2 f_y(y)[1 - F_z(y)]dy.$$

где

G_z, G_y – области интегрирования по z и y;

$F(z)$ и $f(z)$ – функция и плотность распределения величины z.

Как уже указывалось, рассматриваемые случайные величины не являются действительно случайными, которые можно определить из опытных данных. Эти величины представляют собой имитацию случайных величин посредством задания их функций распределения. При этом задаются функции распределения элементарных величин нижнего уровня, на основе которых в дальнейшем определяются функция распределения случайной величины высшего уровня – в данном случае выпуск продукции, являющийся функцией исходных случайных величин.

В качестве функций распределения элементарных случайных величин будем рассматривать равномерное и нормальное распределения. То и другое распределение имеет определенные преимущества и недостатки при имитации неопределенности параметров. Равномерное распределение более подходит в тех случаях, когда нельзя ничего сказать о преимуществе тех или иных значений параметров. В то же время в некоторых случаях имитации неточности (неопределенности) параметров целесообразнее исходить из преимущества параметров близких к некоторым средним значениям и описывать распределения в виде нормальных. Поэтому целесообразно рассмотреть использование как равномерного, так и нормального распределений.

Элементарными случайными величинами в данном случае являются величины z и y. Эти случайные величины распределены на интервалах с границами (z_-, z_+) и (y_-, y_+). Функции и плотности равномерного распределения F_z, F_y, f_z, f_y имеют вид:

$$F_z = \frac{z - z_-}{\Delta z}; \; F_y = \frac{y - y_-}{\Delta y}; f_z = \frac{1}{\Delta z}; \; f_y = \frac{1}{\Delta y},$$

где

$\Delta z = z_+ - z_-$;

$\Delta y = y_+ - y_-$.

После подстановки выражений для функций и плотностей распределения случайных величин z и y в формулу для математического ожидания и взятия интегралов получаем:

$$M_z = \frac{1}{\Delta z \Delta y}\left[\frac{\Delta z_2}{2}(\Delta y + z_-) - \frac{\Delta z_3}{3}\right];$$

$$M_y = \frac{1}{\Delta z \Delta y}\left[\frac{\Delta y_2}{2}(\Delta z + y_-) - \frac{\Delta y_3}{3}\right], \qquad (6)$$

где $\Delta z_i = z_+^i - z_-^i$, $\Delta y_i = y_+^i - y_-^i$, $i = \overline{2,3}$.

Учитывая, что $\Delta z_2 = \Delta y_2 = 0$, окончательно имеем:

$$M_\varphi = -\frac{\Delta z_3 + \Delta y_3}{3\Delta z \Delta y}.$$

После подстановки выражений для функций и плотностей распределения случайных величин z и y в формулу для дисперсии и взятия интегралов получаем:

$$D_z = \frac{1}{\Delta z \Delta y}\left[\frac{\Delta z_3}{3}(\Delta y + z_-) - \frac{\Delta z_4}{4}\right];$$

$$D_y = \frac{1}{\Delta z \Delta y}\left[\frac{\Delta y_3}{3}(\Delta z + y_-) - \frac{\Delta y_4}{4}\right],$$

где $\Delta z_i = z_+^i - z_-^i$, $\Delta y_i = y_+^i - y_-^i$, $i = \overline{3,4}$.

Учитывая, что $\Delta z_4 = \Delta y_4 = 0$, окончательно имеем:

$$D_\varphi = -\frac{\Delta z_3(\Delta y + z_-) + \Delta y_3(\Delta z + y_-)}{3\Delta z \Delta y}.$$

При использовании нормального распределения для неопределенных величин, заданных на конечном отрезке, функция распределения усечена за границами этого отрезка. Плотности и функции нормального распределения случайных величин z и y (учитывая $\bar{z} = M_z = 0$ и $\bar{y} = M_y = 0$) записываются в виде:

$$f_z = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}; \; f_y = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}};$$

$$F_z = \Phi\left(\frac{z}{\sigma_z}\right); \; F_y = \Phi\left(\frac{y}{\sigma_y}\right);$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt,$$

где

σ_z, σ_y – средние квадратические отклонения (корни квадратные из дисперсий) случайных величин z и y.

После подстановки выражений для функций и плотностей нормального распределения случайных величин z и y в формулу для математического ожидания получаем:

$$M_\varphi = M_z + M_y,$$

где

$$M_z = \int_{z_-}^{z_+} z \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} \left[1-\Phi\left(\frac{z}{\sigma_y}\right)\right] dz;$$

$$M_y = \int_{y_-}^{y_+} y \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \left[1-\Phi\left(\frac{y}{\sigma_z}\right)\right] dy.$$

Интегралы в этих формулах не выражаются через элементарные функции. Чтобы избежать численного интегрирования, можно использовать приближенные выражения подинтегральных функций, позволяющие в конечном итоге интегрировать через элементарные функции. Функцию $\Phi(x)$ можно заменить на близкую к ней логистическую функцию [7], которая имеет для переменной z вид:

$$\Phi\left(\frac{z}{\sigma_z}\right) \cong \frac{e^{\frac{z}{\bar\sigma z}}}{e^{\frac{z}{\bar\sigma z}}+1}, \qquad (7)$$

где $\bar\sigma i = \frac{\sigma_i}{1{,}7}$. Далее логистическую функцию также можно представить приближенно в виде разложения в ряд Тейлора в точке $z=0$. Это можно сделать, воспользовавшись известными разложениями числителя и знаменателя (разложение знаменателя отличается от разложения числителя на единицу в свободном члене). Затем, применяя теорему о подстановке ряда в ряд и поделив числитель на знаменатель [8], в итоге можно получить приближенное выражение логистической функции, оставив два члена разложения:

$$\Phi\left(\frac{z}{\sigma_z}\right) \cong \frac{1}{2} + \frac{z}{4\bar\sigma z}.$$

Функцию плотности распределения также можно представить в виде разложения в ряд Тейлора в точке $z=0$. Оставив два члена разложения, получим:

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} \cong \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right).$$

Учитывая это подинтегральное выражение, можно приближенно представить в виде интегрируемой целой рациональной функции:

$$M_z = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} \int_{z_-}^{z_+} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} \left[1-\Phi\left(\frac{z}{\sigma_y}\right)\right] *$$

$$* dz \cong \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} \int_{z_-}^{z_+} z\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{4\bar\sigma y}\right)\left(1-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\Delta z_2}{4} - \frac{\Delta z_3}{12\bar\sigma y} - \frac{\Delta z_4}{16\sigma_z^2} + \frac{\Delta z_5}{40\bar\sigma y \sigma_z^2}\right),$$

где $\Delta z_i = z_+^i - z_-^i$, $i = \overline{2,5}$.

Учитывая, что $\Delta z_2 = \Delta z_4 = 0$, получаем:

$$M_z = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{\Delta z_3}{12\bar\sigma y} + \frac{\Delta z_5}{40\bar\sigma y \sigma_z^2}\right).$$

Поскольку функция плотности распределения представлена приближенно, то интегрирование нужно проводить на отрезке ее положительной определенности, который определяется из решения уравнения

$$1 - \frac{z^2}{2\sigma_z^2} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$z_- = -\sigma_z\sqrt{2}, \quad z_+ = +\sigma_z\sqrt{2}.$$

Аналогичное выражение имеет и второй интеграл (по переменной y – величина M_y) в формуле математического ожидания M_φ, где интегрирование выполняется на отрезке $y_- = -\sigma_y\sqrt{2}$, $y_+ = +\sigma_y\sqrt{2}$:

$$M_y = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \int_{y_-}^{y_+} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \left[1-\Phi\left(\frac{y}{\sigma_z}\right)\right] dz \cong$$

$$\cong \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} \int_{y_-}^{y_+} y\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{4\bar\sigma z}\right)\left(1-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\Delta y_2}{4} - \frac{\Delta y_3}{12\bar\sigma y} - \frac{\Delta y_4}{16\sigma_z^2} + \frac{\Delta y_5}{40\bar\sigma y \sigma_z^2}\right),$$

где $\Delta y_i = y_+^i - y_-^i$, $i = \overline{2,5}$.

Учитывая, что $\Delta y_2 = \Delta y_4 = 0$, получаем:

$$M_y = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{\Delta y_3}{12\bar\sigma z} + \frac{\Delta y_5}{40\bar\sigma z \sigma_y^2}\right).$$

Выражение для дисперсии в рассматриваемом случае имеет вид:

$$D_\varphi = D_z + D_y,$$

где

$$D_z = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} \int_{z_-}^{z_+} z^2 e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} \left[1-\Phi\left(\frac{z}{\sigma_y}\right)\right] dz;$$

$$D_y \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \int_{y_-}^{y_+} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \left[1-\Phi\left(\frac{y}{\sigma_z}\right)\right] dy.$$

Выполняя для величины D_z аналогичные операции к подинтегральному выражению, как и для P_z, получаем:

$$D_z = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\int_{z_-}^{z_+} z^2 e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}\left[1-\Phi\left(\frac{z}{\sigma_y}\right)\right]dz \cong$$

$$\frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\int_{z_-}^{z_+} z^2\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{4\bar{\sigma}y}\right)\left(1-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right)dz =$$

$$= \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\Delta z_3}{6}-\frac{\Delta z_4}{16\bar{\sigma}y}+\frac{\Delta z_5}{10\sigma_z^2}+\frac{\Delta z_6}{48\bar{\sigma}y\sigma_z^2}\right),$$

где $\Delta z_i = z_+^i - z_-^i$, $i = \overline{3,6}$ и интегрирование также выполняется на отрезке $z_- = -\sigma_z\sqrt{2}$, $z_+ = +\sigma_z\sqrt{2}$.

Учитывая, что $\Delta z_4 = \Delta z_6 = 0$, получаем:

$$D_z = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\Delta z_3}{6}+\frac{\Delta z_5}{10\sigma_z^2}\right).$$

Поскольку для величины D_y выражение интеграла аналогично, то его можно записать в следующем виде:

$$D_y = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\Delta y_3}{6}-\frac{\Delta y_4}{16\bar{\sigma}z}-\frac{\Delta y_5}{10\sigma_y^2}+\frac{\Delta y_6}{48\bar{\sigma}z\sigma_y^2}\right),$$

где $\Delta y_i = y_+^i - y_-^i$, $i = \overline{3,6}$ и интегрирование также проводится на отрезке $y_- = -\sigma_y\sqrt{2}$, $y_+ = +\sigma_y\sqrt{2}$.

Учитывая, что $\Delta y_4 = \Delta y_6 = 0$, получаем:

$$D_y = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\Delta y_3}{6}+\frac{\Delta y_5}{10\sigma_y^2}\right).$$

Рассмотрим теперь вариант, когда неопределенными наряду с величинами $PL(l,t)$ и $MXL(l,t)$ считаются также величина $ear(l)$. В этом случае выражение (2) будет функцией случайных величин $ear(l,t)$, $PL(l,t)$ и $MXL(l,t)$. Зависимости этих величин, как и в предыдущем варианте, запишем в виде не случайного слагаемого и случайного приращения:

$$ear(l,t) = \overline{ear}(l,t) + \hat{ear}(l,t);$$

$$PL(l,t) = \overline{PL}(l,t) + \hat{PL}(l,t);$$

$$MXL(l,t) = \overline{MXL}(l,t) + \hat{MXL}(l,t),$$

где $\overline{ear}(l,t)$ – среднее значение заработной платы занятых на производстве продукции l-го типа в точке по времени t;

$\hat{ear}(l,t)$ – случайное изменение величины заработной платы занятых на производстве продукции l-го типа в точке по времени t.

Подставляя эти выражения в формулу для вычисления выпуска продукции, после преобразований получаем:

$$DXL(l,t+1) = \min\left\{\frac{\overline{ear}(l,t)\overline{PL}(l,t)}{ptearsum(l)}, \overline{MXL}(l,t)\right\} +$$
$$+ \min\left\{[\hat{ear}(l,t)\overline{PL}(l,t) + \hat{PL}(l,t)\overline{ear}(l,t) + \hat{ear}(l,t)\hat{PL}(l,t)] / ptearsum(l), \hat{MXL}(l,t)\right\}.$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой не случайную величину. Второе слагаемое при определенном значении l является функцией случайных величин $\hat{ear}(l)$, $\hat{PL}(l,t)$, $\hat{MXL}(l,t)$, которую обозначим через φ:

$$\varphi = \min\left\{[\hat{ear}(l,t)\overline{PL}(k,t) + \hat{PL}(l,t)\overline{ear}(k,t) + \hat{ear}(l)\hat{PL}(l,t)] / ptearsum(l), \hat{MXL}(l,t)\right\}.$$

Для упрощения записи примем во внимание, что для каждого шага по времени t это выражение неизменно, поэтому индекс t опустим, а также для простоты записи опустим фиксированный индекс l и обозначим:

$$r = \hat{ear}(l,t);\ p = \hat{PL}(l,t);\ \overline{ear} = \overline{ear}(l,t);$$
$$\overline{PL} = \overline{PL}(l,t)\quad y = \hat{MXL}(l,t),\ q = ptearsum(l),$$
$$l = \overline{1,PR},$$

Тогда предыдущее выражение будет выглядеть так:

$$\varphi = \min\left\{\frac{r\overline{PL} + p\overline{ear} + rp}{q}, y\right\},$$

где φ – случайная величина, являющаяся функцией элементарных случайных величин r, p, y. Случайные величины r, p и y центрированные, поэтому их математические ожидания равны нулю.

Для вычисления математического ожидания и дисперсии этой случайной величины надо определить плотность ее распределения как функцию входящих в ее состав элементарных случайных величин. Чтобы найти плотность распределения целесообразно найти сначала функцию ее распределения, которую обозначим через F_φ. Эта функция имеет вид [1]:

$$F_\varphi = \int\!\!\int\!\!\int_{G_\varphi}\!\!\int f(r,p,y,q)\,drdpdy\ ,$$

где $f(r,p,y)$ – функция плотности совместного распределения случайных величин r, p, y;

G_φ – область интегрирования как функция случайной величины φ.

Зависимость функции F_φ от аргумента φ появляется в результате интегрирования по области G_φ. Эта область представляет собой множество, которое образуется как проекция сечения множества, заданного функцией φ, гиперплоскостью (r,p,y) перпендикулярной оси φ и на расстоянии φ от начала координат [1].

Чтобы определить конкретно область интегрирования представим функцию φ в виде суперпозиции составляющих ее функций, в результате чего интегрирование трехмерного интеграла можно свести к взятию двукратных интегралов. Обозначим

$$z = \frac{u}{q},$$

где $u = r\overline{PL} + \overline{ear}p + rp$.

Тогда функцию φ и ее функцию распределения перепишем в виде:

$$\varphi = min(z,y);$$

$$F_\varphi = \iint_{G_{zy}} f_{zy}(z,y)dzdy,$$

где

$f_{zy}(z,y)$ – функция плотности совместного распределения случайных величин z и y;

G_{zy} – область интегрирования, представляющая собой область на плоскости определяемой координатами z,y справа и выше прямых $z=\varphi$ и $y=\varphi$, являющуюся функцией случайной величины φ [2].

Случайные величины z и y в нашем случае не зависимы, поэтому для определения плотности распределения случайной величины φ как функции случайных величин z и y можно использовать формулу (3) из предыдущего случая, когда случайные величины z и y были элементарными. В данном случае величина z является функцией случайных величин r и p, но функция плотности распределения случайной величины φ имеет вид, аналогичный предыдущему случаю (3).

Для того чтобы найти M_φ и D_φ, надо сначала определить функцию распределения случайной величины z как функцию входящих в ее состав элементарных случайных величин r и p [2]. Для этого сначала находим функцию распределения случайной величины $w = rp$ как произведения случайных величин r, p, которая записывается в виде:

$$F(w) = \iint_{G_{rp}} f(r)f(p)drdp,$$

где $f(r)$ – плотность функции распределения случайной величины r;

$f(p)$ – плотность функции распределения величины p;

G_{rp} – область совместного распределения случайных величин r и p.

Потом находим функцию распределения суммы двух случайных величин $s = r\overline{PL} + p\overline{ear}$:

$$F(s) = \iint_{G_{\hat{r}\hat{p}}} f(\hat{r})f(\hat{p})d\hat{r}d\hat{p},$$

где $f(\hat{r})$ – плотность функции распределения случайной величины $\hat{r} = r\overline{PL}$;

$f(\hat{p})$ – плотность функции распределения величины $\hat{p} = p\overline{ear}$;

$G_{\hat{r}\hat{p}}$ – область совместного распределения случайных величин $\hat{r}$ и $\hat{p}$.

Затем окончательно находим функцию распределения случайной величины u как суммы случайных величин s и w – функцию распределения суммы случайных величин $u = r\overline{PL} + \overline{ear}p + rp$:

$$F(u) = \iint_{G_{sw}} f(s)f(w)dsdw,$$

где

$f(s)$ – плотность функции распределения случайной величины s;

$f(w)$ – плотность функции распределения величины p;

G_{sw} – область совместного распределения случайных величин s и w.

После того как определены формулы для вычисления плотности и распределения случайной величины φ можно по формулам (4) и (5) рассчитать ее числовые характеристики, такие как математическое ожидание и дисперсия.

Формула распределения случайной величины φ является функцией распределений элементарных случайных величин, входящих в её состав. Рассмотрим сначала случай, когда элементарные случайные величины распределены по закону равномерной (постоянной) плотности на заданных отрезках:

$$f_r = \frac{1}{\Delta r};\ f_p = \frac{1}{\Delta p};\ f_y = \frac{1}{\Delta y}.$$

В соответствии с принципом разложения сложной функции на элементарные функции для определения $f(\varphi)$ нужно найти функции $f(w)$, $f(s)$. Плотность функции распределения случайной величины w целесообразно находить в два этапа: сначала найти функцию распределения $F(w)$, а затем плотность распределения дифференцированием функции распределения $f(w)$.

Случайная величина $w = rp$ распределена равномерно в прямоугольнике, расположенном симметрично относительно осей r и p. Функция распределения $F(w)$ случайной величины w это часть прямоугольника со сторонами Δr и Δp, отсекаемая кривой $w = rp$ и лежащая в 1-м и 3-м квадранте соответственно слева и ниже и справа и выше этой кривой, а во 2-м и 4-м квадрантах это части прямоугольника.

Поскольку по смыслу функции распределения часть прямоугольника, отсекаемая кривой $w = rp$, должна быть положительной, а кривая расположена в 1-м квадранте, то разместим этот прямоугольник на оси абсцисс и будем искать его часть, отсекаемую кривой $w = rp$ в 1-м квадранте. Пусть для определенности величина r распределена по оси ординат, а p по оси абсцисс. Функция распределения $F(w)$ записывается в виде:

$$F(w) = 1 - \frac{1}{\Delta p \Delta r}\int_{\frac{w}{\Delta r}}^{\Delta p} dp \int_{\frac{w}{p}}^{\Delta r} dr.$$

Исходя из того, что по смыслу функции распределения должно выполняться условие $K_{rp}\Delta p\Delta r = 1$, получаем $K_{rp} = \frac{1}{\Delta p \Delta r}$ и функцию $F(w)$ перепишем в виде:

$$F(w) = 1 - K_{rp}\int_{\frac{w}{\Delta r}}^{\Delta p} dp \int_{\frac{w}{p}}^{\Delta r} dr.$$

После взятия интеграла получаем:

$$F(w)=1-K_{rp}\left(\Delta p\Delta r-w\ln\Delta p-w+w\ln\frac{w}{\Delta r}\right)=$$
$$=K_{rp}\left[w(\ln\Delta r+\ln\Delta p+1)-w\ln w\right].$$

Дифференцируя функцию $F(w)$ по w, имеем:

$$f(w)=K_{rp}[\ln(\Delta r\Delta p)-\ln w]$$

при

$0<w\le\Delta r\Delta p$.

Плотность функции распределения величины $s=\hat{r}+\hat{p}$ также целесообразно искать в два этапа: сначала найти функцию распределения, а затем плотность получить дифференцированием функции распределения [2].

Плотности функций распределений величин $\hat{r}$ и $\hat{p}$ имеют вид $f_{\hat{r}}=\dfrac{1}{\Delta\hat{r}}$; $f_{\hat{p}}=\dfrac{1}{\Delta\hat{p}}$, а функция распределения суммы двух случайных величин $\overline{rPL}$ и $\overline{pear}$ постоянной плотности, обозначаемая через $F(s)$, будет равна:

$$F(s)=\frac{1}{\Delta\hat{r}\Delta\hat{p}}\int_{G_s}d\hat{r}d\hat{p},$$

где G_s – часть квадрата со сторонами $\Delta\hat{r}$ и $\Delta\hat{p}$, лежащая ниже и левее прямой $s=\hat{r}+\hat{p}$. Выбрав в качестве ординаты и абсциссы соответственно величины $\hat{r}$ и $\hat{p}$, получим, что в этой системе координат прямая $s=\hat{r}+\hat{p}$ пересекает эти оси под углом 45 градусов. Чтобы определить часть площади квадрата как функцию s, расположим его на оси абсцисс. Для упрощения дальнейших операций сдвинем этот квадрат вправо так, чтобы левый нижний угол находился в начале координат. Этот сдвиг влияет лишь на области распределения случайных величин, входящих в состав функции F_φ, что будет далее учтено.

Тогда при увеличении s прямая $s=\hat{r}+\hat{p}$ движется слева направо, пересекая квадрат в точке $(0,0)$, далее пересекает верхний левый и нижний правый углы прямоугольника и затем в точке $(\Delta\hat{r},\Delta\hat{p})$ выходит за его пределы.

Часть квадрата, лежащая ниже и левее этой прямой, представляет собой сначала треугольник, а затем квадрат за вычетом треугольника, отсекаемого прямой и лежащего выше и правее этой прямой. Обозначим $\Delta s=\Delta\hat{r}+\Delta\hat{p}$. Тогда выражение для части площади квадрата как функцию s можно записать в виде соотношений:

1) при
$s<0$ $F(s)=0$;

2) при
$$0<s<\Delta s\quad F(s)=\int_0^s d\hat{p}\int_0^{s-\hat{p}}d\hat{r}=\frac{s^2}{2};$$

3) при
$$\Delta s<s<2\Delta s\quad F(s)=1-\int_{s-\Delta s}^{\Delta s}d\hat{p}\int_{s-\hat{p}}^{\Delta s}d\hat{r}=1-\frac{(2\Delta s-s)^2}{2};$$

4) при
$2\Delta s<s$ $F(s)=1$.

Дифференцируя функцию распределения по s, получаем плотность распределения $f_s(s)$:

1) при
$s<0$ $f(s)=0$;

2) при
$0<s<\Delta s$ $f_1(s)=s$;

3) при
$\Delta s<s<2\Delta s$ $f_2(s)=2\Delta s-s$;

4) при
$2\Delta s<s$ $f(s)=0$.

После определения плотности распределения случайной величины $f(s)$ можно вычислить функцию $f(u)$ – плотность распределения случайной величины $u=s+w$ как суммы случайных величин s и w. Функция $f(w)$ отлична от нуля и положительно определена на отрезке $(0,1)$, а функция $f(s)$ имеет различный вид на двух отрезках изменения величины s, представленных выше. Поэтому для определения плотности функции распределения целесообразно сначала найти функцию распределения $F(u)$ суммы случайных величин $u=s+w$, а затем получить плотность распределения дифференцированием функции распределения.

Функцию распределения суммы двух случайных переменных определяем по формуле:

$$F(u)=\iint_{G_u}f(s)f(w)dsdw,$$

где G_u – область интегрирования, как функция величины $u=s+w$, представляющая собой часть прямоугольника в системе координат s и w, ограниченного отрезком $(0,\Delta p\Delta r)$ по w (ось ординат), и отрезком $(0,2)$ по s (ось абсцисс), отсекаемая прямой $u=s+w$ и находящаяся слева и ниже этой прямой. Ниже в численных примерах будет рассмотрен случай когда $\Delta\hat{r}$ много больше $\Delta p\Delta r$. В этом случае приближенно можно считать, что прямая $u=s+w$ расположена вертикально, т.е. $u=s$.

Тогда функцию $F(u)$ можно записать в виде двукратных повторных интегралов на двух участках $(0,\Delta s)$, $(\Delta s,2\Delta s)$:

1) при
$u\le 0$ $F(u)=0$;

2) при
$$0<u<\Delta s\quad F_1(u)=\int_0^u f_1(s)ds\int_0^{\Delta r\Delta p}f(w)dw;$$

3) при
$\Delta s<u<2\Delta s$

$$F_2(u) = \int_0^{\Delta s} f_1(s)ds \int_0^{\Delta r\Delta p} f(w)dw + \int_{\Delta s}^{u} f_2(s)ds \int_0^{\Delta r\Delta p} f(w)dw$$

4) при
$2\Delta s < u \quad F(u) = 1$.

Интеграл от логарифма не берется в элементарных функциях. Однако его можно представить в виде разложения в ряд Тейлора в точке $w = \Delta p\Delta r$. Приняв линейное приближение, получаем:

$$\ln w \cong \ln(\Delta r\Delta p) + \frac{w - \Delta r\Delta p}{\Delta r\Delta p}$$

и

$$f(w) \cong K_{rp}[1 - K_{rp}w].$$

Тогда после взятия интегралов имеем:

1) при
$u \le 0 \quad F(u) = 0$;

2) при
$0 < u < \Delta s \quad F_1(u) = \frac{u^2}{4}$;

3) при
$\Delta s < u < 2\Delta s$

$$F_2(u) = \frac{(\Delta s)^2}{4} + \left(\Delta su - \frac{u^2}{4} - \frac{3(\Delta s)^2}{4}\right);$$

4) при
$2\Delta s < u \quad F(u) = 1$.

Поскольку должно выполняться условие $K_u F(2\Delta s) = 1$, то для функции $F(u)$ получаем нормирующий коэффициент, равный $K_u = \frac{2}{(\Delta s)^2}$. Плотность функции распределения $f(u)$ получаем дифференцированием функции распределения $F(u)$:

1) при
$u \le 0 \quad f(u) = 0$;

2) при
$0 < u < \Delta s \quad f_1(u) = K_u \frac{u}{2}$;

3) при
$\Delta s < u < 2\Delta s \quad f_2(u) = K_u\left(\Delta s - \frac{u}{2}\right)$;

4) при
$2\Delta s < u \quad f(u) = 0$.

Поскольку случайная величина z равна случайной величине u деленной на не случайную величину q, то вместо функций $f(z)$ и $F(z)$ используем функции $f(u)$ и $F(u)$. Подставляя их в формулы (4) и (5), получаем выражения для математического ожидания и дисперсии случайной величины $\hat{\varphi} = \min(u, y)$. При этом учтем, что интегрирование по u выполняется на двух участках, поэтому величины M_u, M_y и D_u, D_y состоят из двух слагаемых.

Кроме того, вернемся к первоначальному расположению области интегрирования по оси u – сдвинем ее влево на величину $\frac{\Delta\hat{r}}{2}$ и учтем, что

$$1 - F_y(u) = \frac{y_+ - u}{\Delta y}.$$

Тогда областью интегрирования по u будут два смежных отрезка $(u_-, \bar{u})$ $(\bar{u}, u_+)$, где

$$u_- = \frac{-\Delta\hat{r} + 2\Delta\hat{p}}{2}, \quad \bar{u} = \frac{\Delta\hat{r} + 4\Delta\hat{p}}{2} \quad u_+ = \frac{3\Delta\hat{r} + 6\Delta\hat{p}}{2}.$$

Функция распределения $F_y(u) = \frac{u - y_-}{\Delta y}$ не нормирована. Для нормировки введем в эту функцию величину Δu, такую, что $u_- - y_- + \Delta u = 0$ и коэффициент K_z такой, что $\frac{u_+ - y_- + \Delta u}{K_z} = 1$. Также не нормирована функции $F_u(y)$ на отрезках $(u_-, \bar{u})$ и $(\bar{u}, u_+)$, Для нормировки функции $F_z(y)$ на отрезке $(u_-, \bar{u})$ вводим величину $\Delta\hat{y}$, определяемую по формуле $\Delta\hat{y} = \frac{K_u}{4} y_-^2$ и коэффициент $K_{\hat{y}}$, вычисляемые по формулам: $K_{\hat{y}} = \frac{K_u}{4} y_+^2 - \Delta\hat{y}$. Для нормировки функции $F_z(y)$ на отрезке $(\bar{u}, u_+)$ вводим величину $\Delta\breve{y}$, вычисляемую по формуле (6):

$$\Delta\breve{y} = \frac{K_u(\Delta s)^2}{4} + \frac{K_u}{2}\left(2\Delta s y_- - \frac{y_-^2}{2} - \frac{3(\Delta s)^2}{2}\right)$$

и коэффициент $K_{\breve{y}}$, вычисляемый по формуле:

$$\frac{K_u(\Delta s)^2}{4} + \frac{K_u}{2}\left(2\Delta s y_+ - \frac{y_+^2}{2} - \frac{3(\Delta s)^2}{2}\right) - \Delta\breve{y}.$$

В итоге получаем следующие формулы:

$$M_z = \frac{K_u}{K_z}\left\{\frac{1}{2}\int_{u_-}^{\bar{u}} u^2 \frac{y_+ - \Delta u - u}{\Delta y} du - \right.$$
$$\left. - \int_{\bar{u}}^{u_+} u\left(\Delta s - \frac{u}{2}\right)\frac{y_+ - \Delta u - u}{\Delta y} du\right\};$$

$$M_y = \frac{1}{2\Delta y}\int_{y_-}^{y_+} y\left(1-\frac{K_u}{4K_{\hat y}}y^2+\frac{\Delta\hat y}{K_{\hat y}}\right)dy +$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\int_{y_-}^{y_+} y\left[1+\frac{\Delta\breve y}{K_{\breve y}}-\frac{K_u(\Delta s)^2}{4K_{\breve y}}-\right.$$

$$\left.-\frac{K_u}{2K_{\breve y}}\left(2\Delta s y-\frac{y^2}{2}-\frac{3(\Delta s)^2}{2}\right)\right]dy\ ;$$

$$D_z = \frac{K_u}{K_z}\left\{\frac{1}{2}\int_{u_-}^{\bar u} u^3\,\frac{y_+-\Delta u-u}{\Delta y}du -\right.$$

$$\left.-\int_{\bar u}^{u_+} u^2\left(\Delta s-\frac{u}{2}\right)\frac{y_+-\Delta u-u}{\Delta y}du\right\};$$

$$D_y = \frac{1}{2\Delta y}\int_{y_-}^{y_+} y^2\left(1-\frac{K_u}{4K_{\hat y}}y^2+\frac{\Delta\hat y}{K_{\hat y}}\right)dy +$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\int_{y_-}^{y_+} y^2\left[1+\frac{\Delta\breve y}{K_{\breve y}}-\frac{K_u(\Delta s)^2}{4K_{\breve y}}-\right.$$

$$\left.-\frac{K_u}{2K_{\breve y}}\left(2\Delta s y-\frac{y^2}{2}-\frac{3(\Delta s)^2}{2}\right)\right].$$

После взятия этих интегралов формулы принимают вид:

$$M_u = \frac{K_u}{2K_z\Delta y}\left(\frac{y_+-\Delta u}{3}\Delta u_3^- - \frac{\Delta u_4^-}{4}\right)+$$

$$+\frac{K_u}{K_z\Delta y}*$$

$$*\left[(y_+-\Delta u)\frac{\Delta s\Delta u_2^+}{2}+(\Delta u-y_+-2\Delta s)\frac{\Delta u_3^+}{6}+\frac{\Delta u_4^+}{8}\right];$$

$$M_y = \frac{1}{4\Delta y}\left(\Delta y_2-\frac{K_u}{8K_{\hat y}}\Delta y_4+\frac{\Delta\hat y}{K_{\hat y}}\Delta y_2\right)+$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\left\{\left[1+\frac{\Delta\breve y}{K_{\breve y}}-\frac{K_u(\Delta s)^2}{4K_{\breve y}}\right]\frac{\Delta y_2}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{K_u}{2K_{\breve y}}\left[\frac{2\Delta s}{3}\Delta y_3-\frac{3(\Delta s)^2}{4}\Delta y_2-\frac{\Delta y_4}{8}\right]\right\};$$

$$D_u = \frac{K_u}{2K_z\Delta y}\left(\frac{y_+-\Delta u}{4}\Delta u_4^- - \frac{\Delta u_5^-}{5}\right)+$$

$$+\frac{K_u}{K_z\Delta y}\left[\Delta s y_+\frac{\Delta u_3^+}{3}-(y_+-\Delta u+\Delta s)\frac{\Delta u_4^+}{4}+\frac{\Delta u_5^+}{5}\right];$$

$$D_y = \frac{1}{2\Delta y}\left(\frac{\Delta y_3}{3}-\frac{K_u}{20K_{\hat y}}\Delta y_5+\frac{\Delta\hat y}{3K_{\hat y}}\Delta y_3\right)+$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\left\{\left[1+\frac{\Delta\breve y}{K_{\breve y}}-\frac{K_u(\Delta s)^2}{4K_{\breve y}}\right]\frac{\Delta y_3}{3}-\right.$$

$$\left.-\frac{K_u}{2K_{\breve y}}\left[\frac{\Delta s}{2}\Delta y_4-\frac{(\Delta s)^2}{2}\Delta y_3-\frac{\Delta y_5}{10}\right]\right\},$$

где $\Delta u_i^- = \bar u^i - u_-^i$, $\Delta u_i^+ = u_+^i - \bar u^i$; $\Delta y_i^- = \bar y^i - y_-^i$, $\Delta y_i^+ = y_+^i - \bar y^i$ $i=\overline{2,5}$.

Затем окончательно вычисляем:

$$M[\varphi] = \frac{M_u}{q}+M_y\ ,\ D[\varphi] = \frac{D_u}{q^2}+D_y\ .$$

Выведем теперь выражения для математического ожидания и дисперсии случайной величины φ в случае нормального распределения элементарных случайных величин, входящих в ее состав. В этом случае плотности распределения для случайных величин r и p имеют вид:

$$f_r = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}\ ;\ f_p = \frac{1}{\sigma_p\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{p^2}{2\sigma_p^2}}\ .$$

Функция плотности распределения $f(w)$ для $w>0$ имеет вид [1]:

$$f(w) = -\frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_p}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{r}e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}e^{-\frac{\left(\frac{w}{r}\right)^2}{2\sigma_p^2}}dr +$$

$$+\frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_p}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{r}e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}e^{-\frac{\left(\frac{w}{r}\right)^2}{2\sigma_p^2}}dr\ .$$

Эту формулу можно переписать в виде:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|r|}e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}e^{-\frac{\left(\frac{w}{r}\right)^2}{2\sigma_p^2}}dr\ .$$

Для упрощения взятия интеграла разложим подинтегральные функции в ряд Тейлора – функцию $e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}$ в точке $r=0$, а функцию $e^{-\frac{\left(\frac{w}{r}\right)^2}{2\sigma_p^2}}$ в точке $r=w$, оставив два члена разложения:

$$e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}} \cong 1-\frac{r^2}{2\sigma_r^2};\quad e^{-\frac{\left(\frac{w}{r}\right)^2}{2\sigma_p^2}} \cong e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2}}\left(1+\frac{r-w}{2w\sigma_p^2}\right).$$

После замены приближенными выражениями получаем:

$$f(w)=R\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|r|}\left(1-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right)\left(1+\frac{r-w}{2w\sigma_p^2}\right)dr=$$

$$=R\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}\frac{1}{|r|}\left(1-\frac{1}{2\sigma_p^2}\right)+\left(\frac{1}{2\sigma_p^2}-1\right)* \\ *\frac{r}{2\sigma_r^2}-\frac{r^2}{4w\sigma_r^2\sigma_p^2}+\frac{1}{2w\sigma_p^2}\end{bmatrix}dr,$$

где $R=\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_p^2}}}{2\pi\sigma_r\sigma_p}$.

Поскольку подинтегральное выражение приближенное, то интегрирование выполняем на отрезке положительной определенности подинтегральной функции, обозначаемом через (r_-,r_+), который точками $r_\pm=\pm\sigma_r\sqrt{2}$.

В этом интеграле $r=0$ – особая точка, где он расходится. Однако его можно взять в смысле главного значения [8]. Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$R\int_{r_-}^{r_+}\frac{1}{|r|}\left(1-\frac{1}{2\sigma_p^2}\right)dr+$$

$$+R\int_{r_-}^{r_+}\left[\left(\frac{1}{2\sigma_p^2}-1\right)\frac{r}{2\sigma_r^2}-\frac{r^2}{4w\sigma_r^2\sigma_p^2}+\frac{1}{2w\sigma_p^2}\right]dr.$$

Пусть η – малое число. Обозначим числа $\eta_-=0-\eta$, $\eta_+=0+\eta$, перепишем первый интеграл в следующем виде. Полагая $\eta=|\eta_-|=\eta_+$ и учитывая, что $|r_-|=r_+$, получаем при $\eta\to 0$:

$$R\left(1-\frac{1}{2\sigma_p^2}\right)\left(\int_{r_-}^{\eta_-}\frac{1}{|r|}dr+\int_{\eta_+}^{r_+}\frac{1}{|r|}dr\right)=$$

$$=R\left(1-\frac{1}{2\sigma_p^2}\right)\left[\ln\left|\frac{\eta_-}{\eta_+}\right|+\ln\left|\frac{r_+}{r_-}\right|\right]\to 0$$

Тогда имеем:

$$f(w)=R\left[\left(\frac{1}{2\sigma_p^2}-1\right)\frac{\Delta r_2}{4\sigma_r^2}-\frac{\Delta r_3}{12w\sigma_r^2\sigma_p^2}+\frac{\Delta r}{2w\sigma_p^2}\right],$$

где $\Delta r_i=r_+^i-r_-^i$, $i=\overline{2,3}$.

Учитывая, что $\Delta r_2=0$, получаем:

$$f(w)=\frac{R}{w}\left(\frac{\Delta r}{2\sigma_p^2}-\frac{\Delta r_3}{12\sigma_r^2\sigma_p^2}\right).$$

Функция плотности распределения $f(w)$ для $w<0$ имеет вид [1]:

$$f(w)=-\frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_p}\int_0^{-\infty}\frac{1}{r}e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}e^{-\frac{\left(\frac{w}{r}\right)^2}{2\sigma_p^2}}dr+$$

$$+\frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_p}\int_{\infty}^{0}\frac{1}{r}e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}e^{-\frac{\left(\frac{w}{r}\right)^2}{2\sigma_p^2}}dr=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_p}\int_{\infty}^{-\infty}\frac{1}{|r|}e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}e^{-\frac{\left(\frac{w}{r}\right)^2}{2\sigma_p^2}}dr.$$

Отсюда получаем, что $f(w)=-f(-w)$ и функция записывается в виде:

$$f(w)=\frac{R}{|w|}\left(\frac{\Delta r}{2\sigma_p^2}-\frac{\Delta r_3}{12\sigma_r^2\sigma_p^2}\right)$$

для любых значений w.

После получения функции распределения величины $w=rp$ переходим к определению функции распределения величины $u=s+w$, где $s=r\overline{PL}+\overline{pear}$. Для нормально распределенных случайных величин $r\overline{PL}$ и $\overline{pear}$ плотность распределения их суммы также является нормальной функцией с математическим ожиданием $M_s=0$ ввиду $M[r\overline{PL}]=0$ и $M[\overline{pear}]=0$ и дисперсией $\sigma_s^2=\overline{PL}^2\sigma_r^2+\overline{ear}^2\sigma_p^2$, и плотность функции распределения $f(s)$ записывается в виде:

$$f(s)=\frac{1}{\sigma_s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}}.$$

Поскольку случайные величины в композиции $u=s+w$ заданы различными законами, то для вывода функции $f(u)$ целесообразно сначала определить функцию распределения $F(u)$, а затем дифференцированием получить плотность распределения.

Функция распределения суммы двух случайных величин определяется по формуле:

$$F(u)=S\int_{w_-}^{w_+}\frac{dw}{|w|}\int_{s_-}^{u-w}e^{-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}}ds,$$

где $S=\frac{R}{\sigma_s\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\Delta r}{2\sigma_p^2}-\frac{\Delta r_3}{12\sigma_r^2\sigma_p^2}\right)$.

После интегрирования получаем:

$$F(u)=S\int_{w_-}^{w_+}\frac{\Phi\left(\frac{u-w}{\sigma_s}\right)-\Phi\left(\frac{s_-}{\sigma_s}\right)}{|w|}dw.$$

Представим функцию распределения $\Phi\left(\frac{u-w}{\sigma_s}\right)$ приближенно в виде логистической функции:

$$\Phi\left(\frac{u-w}{\sigma_s}\right)\cong\frac{e^{\frac{u-w}{\bar{\sigma}_s}}}{e^{\frac{u-w}{\bar{\sigma}_s}}+1}.$$

Далее логистическую функцию также можно представить приближенно в виде разложения в ряд Тейлора в точке $z=0$. Это можно сделать воспользовавшись известными разложениями числителя и знаменателя (разложение знаменателя отличается от разложения числителя на единицу в свободном члене). Затем применяя теорему о подстановке ряда в ряд и поделив числитель на знаменатель [8], в итоге можно получить приближенное выражение логистической функции, оставив четыре члена разложения:

$$\frac{e^{\frac{u-w}{\bar{\sigma}_s}}}{e^{\frac{u-w}{\bar{\sigma}_s}}+1}\cong\frac{1}{2}+\frac{u-w}{4\bar{\sigma}_s}-\frac{(u-w)^3}{48\sigma_s^3}.$$

В итоге после преобразований получаем:

$$F(u)=S\int_{w_-}^{w_+}\frac{1}{|w|}\left[\frac{1}{2}+\frac{u}{4\bar{\sigma}_s}-\Phi\left(\frac{s_-}{\sigma_s}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{4\bar{\sigma}_s}+\frac{3u^2}{48\bar{\sigma}_s^3|w|}-\frac{3uw}{48\bar{\sigma}_s^3|w|}+\frac{w^2}{48\bar{\sigma}_s^3|w|}dw.$$

Интеграл от первого слагаемого (в квадратных скобках с множителем $\frac{1}{|w|}$) расходится, но, как показано выше, может быть взят в смысле главного значения:

$$F(u)=S\int_{w_-}^{w_+}\frac{1}{|w|}\left[\frac{1}{2}+\frac{u}{4\bar{\sigma}_s}-\Phi\left(\frac{s_-}{\sigma_s}\right)\right]dw=0.$$

После взятия интегралов от остальных слагаемых получаем

$$F(u)=S\left(-\frac{\Delta w}{4\bar{\sigma}_s}+\frac{\Delta w_3}{144\bar{\sigma}_s^3}+\frac{\Delta w}{16\bar{\sigma}_s^3}u^2\right)=P+Qu^2,$$

где

$$P=S\left(-\frac{\Delta w}{4\bar{\sigma}_s}+\frac{\Delta w_3}{144\bar{\sigma}_s^3}\right);\ Q=\frac{S\Delta w}{16\bar{\sigma}_s^3}.$$

Это выражение для функции $F(u)$ применимо только для $u\geq 0$. Для отрицательных значений оно не имеет содержательного смысла. Функция $F(u)$ не нормирована. Для нормировки вводим слагаемое ΔF_u и коэффициент K_u, которые находятся из условий $F(0)+\Delta F_u=0$ и $K_u[F(u_+)+\Delta F_u]=1$. Функция $F(u)$ используется для определения плотности распределения $f(u)$, а также непосредственно в формулах для M_y и D_y как функция переменной y. В этом качестве она также должна быть нормирована. Для нормировки вводим слагаемое ΔF_{uy} и коэффициент K_{uy}, которые находятся из условий $F(0)+\Delta F_{uy}=0$ и $K_{uy}[F(y_+)+\Delta F_{uy}]=1$.

Плотность функции распределения находим дифференцированием $F(u)$:

$$f(u)=\frac{K_uQ}{2}u.$$

Теперь учитывая, что $z=\frac{u}{q}$, где q – не случайная величина, используем функции $f(u)$ и $F(u)$, как в предыдущем варианте с равномерным распределением элементарных случайных переменных, для получения математического ожидания и дисперсии случайной величины $\hat{\varphi}=min(u,y)$ и далее аналогично получаем математического ожидания и дисперсии случайной величины $\varphi=min(z,y)$.

Плотность и функция нормального распределения случайной величины y имеют вид:

$$f(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}};F_y=\Phi\left(\frac{y}{\sigma_y}\right).$$

Для упрощения интегрирования представим функцию $f(y)$ разложением в ряд Тейлора в точке $y=0$, оставив два члена разложения:

$$f(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}\cong\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right). \qquad (8)$$

Функцию распределения величины y как и выше представим в виде:

$$F(y)=\Phi\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)\cong\frac{e^{\frac{y}{\bar{\sigma} y}}}{e^{\frac{y}{\bar{\sigma} y}}+1}\cong\frac{1}{2}+\frac{y}{4\bar{\sigma} y}. \qquad (9)$$

Однако ввиду приближенности представления на конечном отрезке эта функция не нормирована. Для нормировки достаточно выполнение условия:

$$\frac{K_y y_+}{4\bar{\sigma} y}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$K_y=\frac{2\bar{\sigma} y}{y_+} \text{ и } F(y)=\frac{1}{2}+\frac{K_y y}{4\bar{\sigma} y}.$$

Теперь по формулам (4) и (5) получаем выражения для M_u, M_y и D_u, D_y:

$$M_u=\frac{K_uQ}{2}\int_0^{u_+}u^2\left(\frac{1}{2}-\frac{K_y u}{4\bar{\sigma} y}\right)du;$$

$$D_u=\frac{K_uQ}{2}\int_0^{u_+}u^3\left(\frac{1}{2}-\frac{K_y u}{4\bar{\sigma} y}\right)du;$$

$$M_y=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}*$$

$$*\int_0^{\hat{y}_+}y\left(1-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\left[1-K_{uy}\left(\Delta F_{uy}+P+Qy^2\right)\right]dy;$$

$$D_y=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}*$$

$$*\int_0^{\hat{y}_+}y^2\left(1-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\left[1-K_{uy}\left(\Delta F_{uy}+P+Qy^2\right)\right]dy.$$

Ввиду приближенности представления функции $f(y)$ интегрирование проводим на отрезках положительной определенности подинтегральных выражений $(0,\hat{y}_+)$ и определяемых пересечением пар отрезков $(0,\sigma_y\sqrt{2})$ и $(0,y_+)$.

После взятия интегралов формулы принимают вид:

$$M_u=\frac{K_uQ}{2}\left(\frac{u_+^3}{6}-\frac{K_y u_+^4}{16\bar{\sigma} y}\right);$$

$$D_u=\frac{K_uQ}{2}\left(\frac{u_+^4}{12}-\frac{K_y u_+^5}{20\bar{\sigma} y}\right);$$

$$M_y=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}*$$

$$*\left[\begin{array}{l}\frac{y_+^2}{2}-\frac{y_+^4}{8\sigma_y^2}-K_{uy}\left(\frac{\Delta F_{uy}y_+^2}{2}+\frac{Py_+^2}{2}+\frac{Qy_+^4}{4}\right)+\\+\frac{K_{uy}}{2\sigma_y^2}\left(\frac{\Delta F_{uy}y_+^4}{4}+\frac{Py_+^4}{4}+\frac{Qy_+^6}{6}\right)\end{array}\right];$$

$$D_y=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}*$$

$$*\left[\begin{array}{l}\frac{y_+^3}{3}-\frac{y_+^5}{10\sigma_y^2}-K_{uy}\left(\frac{\Delta F_{uy}y_+^3}{3}+\frac{Py_+^3}{3}+\frac{Qy_+^5}{5}\right)+\\+\frac{K_{uy}}{2\sigma_y^2}\left(\frac{\Delta F_{uy}y_+^5}{5}+\frac{Py_+^5}{5}+\frac{Qy_+^7}{7}\right)\end{array}\right].$$

Теперь можно вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины φ по формулам:

$$M[\varphi]=\frac{M_u}{q}+M_y,\ D[\varphi]=\frac{D_u}{q^2}+D_y.$$

Рассмотрим, наконец, наиболее общий вариант, когда неопределенными наряду с величинами $PL(l,t)$, $MXL(l,t)$ и $ear(l)$ считается также величина $ptearsum(l)$. В этом случае выражение (2) будет сложной случайной величиной – функцией случайных величин $ear(l,t)$, $PL(l,t)$, $ptearsum(l)$ и $MXL(l,t)$. Зависимости этих величин, как и в предыдущих вариантах, запишем в виде неслучайного слагаемого и случайного приращения:

$$ear(l,t) = \overline{ear}(l,t) + \widehat{ear}(l,t)\ ;$$

$$PL(l,t) = \overline{PL}(l,t) + \widehat{PL}(l,t)\ ;$$

$$ptearsum(l) = \overline{ptearsum}(l) + \widehat{ptearsum}(l)\ ;$$

$$MXL(l,t) = \overline{MXL}(l,t) + \widehat{MXL}(l,t)\ ,$$

где

$\overline{ptearsum}(l)$ – среднее значение доли цеховых расходов на заработную плату при производстве продукции l-го го типа;

$\widehat{ptearsum}(l)$ – случайное изменение доли цеховых расходов на заработную плату при производстве продукции l-го типа.

Подставляя эти выражения в формулу для вычисления выпуска продукции, после преобразований получаем:

$$\begin{aligned} DXL(l,t+1) = {} & min\left\{ \begin{array}{l} \overline{ear}(l,t)\overline{PL}(l,t)\ / \\ /[\overline{ptearsum}(l) + \\ + \widehat{ptearsum}(l)],\ \overline{MXL}(l,t) \end{array} \right\} + \\ & + min\left\{ \begin{array}{l} [\widehat{ear}(l,t)\overline{PL}(l,t) + \widehat{PL}(l,t)\overline{ear}(l,t) + \\ + \widehat{ear}(l,t)\widehat{PL}(l,t)]\ / \\ /[\overline{ptearsum}(l) + \widehat{ptearsum}(l)],\ \widehat{MXL}(l,t) \end{array} \right\}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Первое слагаемое в этом выражении, как и второе, представляет собой случайную величину. Однако в первом слагаемом случайной является только элементарная случайная величина $\widehat{ptearsum}(l)$. Примем в этом выражением следующие упрощающие предположения. Положим, что случайные величины $\widehat{ptearsum}(l)$ малы по сравнению с их средними значениями и пренебрежем этой величиной в первом слагаемом, поскольку она не сильно влияет на его значение. Тогда только второе слагаемое будет случайной величиной.

Второе слагаемое выражения (10) при определенном значении l является сложной функцией случайных величин $\widehat{ear}(l)$, $\widehat{PL}(l,t)$, $\widehat{MXL}(l,t)$ и $\widehat{ptearsum}(l)$ $l = \overline{1,PR}$, которую обозначим через φ :

$$\varphi = min\left\{ \begin{array}{l} [\widehat{ear}(l,t)\overline{PL}(k,t) + \widehat{PL}(l,t)\overline{ear}(k,t) + \\ + \widehat{ear}(l)\widehat{PL}(l,t)]\ / \\ /\ [\overline{ptearsum}(l) - ptearsum(l)],\ \widehat{MXL}(l,t) \end{array} \right\}.$$

Для упрощения записи, как и выше, примем во внимание, что для каждого шага по времени t это выражение неизменно, поэтому индекс t опустим, а также для простоты записи опустим фиксированный индекс l и обозначим: $r = \widehat{ear}(l,t)$; $p = \widehat{PL}(l,t)$; $\overline{ear} = \overline{ear}(l,t)$; $\overline{PL} = \overline{PL}(l,t)$ $y = \widehat{MXL}(l,t)$, $q = \widehat{ptearsum}(l)$, $l = \overline{1,PR}$, , $\overline{q} = \overline{ptearsum}(l)$.

Тогда предыдущее выражение будет выглядеть так:

$$\varphi = min\left\{ \frac{r\overline{PL} + p\overline{ear} + rp}{\overline{q} - q}, y \right\},$$

где φ – сложная случайная величина, являющаяся функцией элементарных случайных величин r, p, y и q.

Для вычисления математического ожидания и дисперсии этой случайной величины надо определить плотность ее распределения как функцию входящих в ее состав элементарных случайных величин. Чтобы найти плотность распределения, целесообразно найти сначала функцию ее распределения, которую обозначим через F_φ. Эта функция имеет вид [1]:

$$F_\varphi = \iiint\limits_{G_\varphi}\int f(r,p,y,q)drdpdydq\ ,$$

где $f(r,p,y,q)$ – функция плотности совместного распределения случайных величин r, p, y, q.

G_φ – область интегрирования как функция случайной величины φ.

Зависимость функции F_φ от аргумента φ появляется в результате интегрирования по области G_φ. Эта область представляет собой множество, которое образуется как проекция сечения множества, заданного функцией φ, гиперплоскостью (r,p,y,q) перпендикулярной оси φ и на расстоянии φ от начала координат.

Чтобы определить конкретно область интегрирования, представим функцию φ в виде суперпозиции составляющих ее функций, в результате чего интегрирование четырехмерного интеграла можно свести к взятию двукратных интегралов. Обозначим $u = r\overline{PL} + \overline{ear}\,p + rp$, $v = \overline{q} + q$ и $z = \dfrac{u}{v}$. Тогда функцию φ и ее функцию распределения перепишем в виде:

$$\varphi = min(z,y)\ ;$$

$$F_\varphi = \iint\limits_{G_{zy}} f_{zy}(z,y)dzdy\ , \qquad (11)$$

$f_{zy}(z,y)$ – функция плотности совместного распределения случайных величин z и y;

G_{zy} – область интегрирования, представляющая собой область на плоскости определяемой координатами z, y справа и выше прямых $z = \varphi$ и $y = \varphi$, являющуюся функцией случайной величины φ [2].

Случайные величины z и y в нашем случае не зависимы, поэтому для определения плотности распределения случайной величины φ как функции случайных величин z и y можно использовать формулу (3), использованную в частном случае 1, когда случайные величины z и y были элементарными. В данном случае случайная величина z является функцией случайных величин r, p и q, но функция плотности распределения случайной величины φ имеет вид аналогичный предыдущему случаю (3).

Для того чтобы найти M_φ и D_φ, надо сначала определить функцию распределения случайной величины z как функцию входящих в ее состав элементарных случайных величин r, p и q. Но для этого в соответствии с принципом суперпозиции надо сначала найти распределение случайной величины z как частного от деления случайных величин u и v, а затем распределение случайных величин u и v как функций элементарных случайных величин r, p и q.

Полагая что случайные величины u и v независимы (никаких оснований считать их зависимыми нет), функцию $F(z)$ можно в общем случае записать в виде [1]:

$$F(z) = \iint_{G_{uv}} f(u)f(v)dudv, \qquad (12)$$

где

$f(u)$ – плотность распределения случайной величины u;

$f(v)$ – плотность распределения случайной величины v равна плотности распределения случайной величины q, сдвинутой вправо на величину $\bar{q}$;

G_{uv} – область совместного распределения случайных величин u и v.

Плотность функции распределения $f(u)$ находим также, как и в предыдущем случае. Отличие состоит лишь на этапе определения функции $F(z)$. Рассмотрим сначала вариант, когда элементарные случайные величины распределены равномерно на заданных участках.

Поскольку функция $f(u)$ задана на двух участках изменения переменной u, то целесообразно (как и выше) сначала получить функцию распределения $F(z)$ случайной величины z, а затем, продифференцировав ее, – плотность функции распределения $f(z)$.

Область интегрирования G_z представляет собой часть прямоугольника, отсекаемого прямой $z = \frac{u}{v}$. Будем считать, что переменная v является осью ординат, а u – осью абсцисс. Прямоугольник лежит выше оси абсцисс со сторонами по оси v, равными отрезку (v_-, v_+), а по оси u двум смежным отрезкам $(u_-, \bar{u})$ и $(\bar{u}, u_+)$, определенным в предыдущем варианте.

При увеличении z прямая $z = \frac{u}{v}$ вращается по часовой стрелке. Отсекаемая этой прямой часть прямоугольника находится в 1-м квадранте слева и выше этой прямой.

Поскольку область интегрирования по переменной u разделяется на две части, где плотность функции распределения $f(u)$ имеет различные значения, приведенные выше, то функция распределения $F(z)$ также имеет различный вид на соответствующих участках изменения переменной z. Кроме того, что функция $f(u)$ на участках интегрирования по u различна, меняется также и форма областей интегрирования на этих участках при пересечении прямой $z = \frac{u}{v}$ углов прямоугольника.

При вращении прямой $z = \frac{u}{v}$ по часовой стрелке, начиная с пересечения левого нижнего угла прямоугольника до пересечения его правого нижнего угла область интегрирования разделяется на участки с точками по переменной z, которые зависят от соотношения величин отрезков $\Delta v = v_+ - v_-$ и (u_-, u_+). Ниже представлены точки участков разбиения по переменной z в случае если Δv много меньше $\Delta u = u_+ - u_-$:

$$z_1 = \frac{u_-}{v_-};\ z_2 = \frac{u_-}{v_+};\ z_3 = \frac{\bar{u}}{v_+};$$

$$z_4 = \frac{\bar{u}}{v_-};\ z_5 = \frac{u_+}{v_+};\ z_6 = \frac{u_+}{v_-}.$$

Функция $F(z)$ на этих участках имеет вид:

1) при $z < z_1$

$F(z) = 0$;

2) при $z_1 \le z < z_2$

$$F_1(z) = \int_{\frac{u_-}{z}}^{v_+} f(v)dv \int_{u_-}^{zv} f_1(u)du \cdot$$

3) при $z_2 \le z < z_3$

$$F_2(z) = \int_{v_-}^{v_+} f(v)dv \int_{u_-}^{zv} f_1(u)du \cdot$$

4) при $z_3 \le z < z_4$

$$F_3(z) = F_{31} - F_{32}(z) + F_{33}(z),$$

где

$$F_{31} = \int_{v_-}^{v_+} f(v)dv \int_{u_-}^{\bar{u}} f_1(u)du;$$

$$F_{32}(z) = \int_{v_-}^{\frac{\bar{u}}{z}} f(v)dv \int_{zv_-}^{zv} f_1(u)du;$$

$$F_{33}(z) = \int_{\frac{\bar{u}}{z}}^{v_+} f(v)dv \int_{\bar{u}}^{zv} f_2(u)du \cdot$$

5) при $z_4 \le z < z_5$

$$F_4(z) = F_{31} + F_{41}(z),$$

где

$$F_{41}(z) = \int_{v_-}^{v_+} f(v)dv \int_{\bar{u}}^{zv} f_2(u)du.$$

6) при $z_5 \le z < z_6$

$$F_5(z) = F_{31} + F_{51} - F_{52}(z),$$

где

$$F_{51}(z) = \int\limits_{\nu_-}^{\nu_+} f(\nu)d\nu \int\limits_{\bar{u}}^{u_+} f_2(u)du \;;$$

$$F_{52}(z) = \int\limits_{\nu_-}^{\frac{u_+}{z}} f(\nu)d\nu \int\limits_{z\nu_-}^{z\nu} f_2(u)du \;.$$

7) при $z_6 < z$

$F(z) = 1\,.$

Поскольку функцию $F(z)$ необходимо нормировать исходя из условия $F(z_6) = 1$, то функции $f_1(u)$ и $f_2(u)$ берутся без нормировочного множителя K_u, определенного выше.

Взяв эти интегралы получаем:

$$F_1(z) = \frac{1}{4\Delta\nu}\left(\frac{\nu_+^3 z^2}{3} + \frac{2u_-^3}{3z} - u_-^2\nu_+\right);$$

$$F_2(z) = \frac{1}{4\Delta\nu}\left(\frac{\Delta\nu_3}{3}z^2 - u_-^2\Delta\nu\right);$$

$$F_{31} = \frac{1}{4}(\bar{u}^2 - \nu_-^2);$$

$$F_{32}(z) = \frac{1}{4\Delta\nu}\left(\frac{2\nu_-^3}{3}z^2 - \nu_-^2\bar{u}z + \frac{\bar{u}^3}{3z}\right);$$

$$F_{33}(z) = \frac{1}{\Delta\nu}*$$

$$*\left[\frac{\nu_+^3}{12}z^2 - \frac{\Delta s\nu_+^2}{2}z + \left(\frac{\bar{u}}{6} - \frac{\Delta s}{2}\right)\frac{\bar{u}^2}{z} - \left(\frac{\bar{u}}{4} - \Delta s\right)\bar{u}\nu_+\right];$$

$$F_{41}(z) = \frac{1}{\Delta\nu}\left[\frac{z^2\Delta\nu_3}{6} - \frac{\Delta\nu_2\Delta s}{2}z + \left(\Delta s\bar{u} - \frac{\bar{u}^2}{2}\right)\Delta\nu\right];$$

$$F_{51} = \left[\frac{u_+^2}{2} - \frac{\bar{u}^2}{2} + (\bar{u} - u_+)\Delta s\right];$$

$$F_{52}(z) = \frac{1}{\Delta\nu}*$$

$$*\left[\frac{5\nu_-^3}{6}z^2 + \frac{\Delta s\nu_-^2}{2}z - \nu_-^2 u_+ z + \left(\frac{u_+}{3} - \Delta s\right)\frac{u_+^2}{z} + \Delta s\nu_- u_+\right].$$

Поскольку значения функции распределения $F(z)$ на правом конце участков во внутренних точках области интегрирования (z_1, z_6) должны быть равны значениям на левом конце, то функции на участках, следующих за первым (обозначаемые теми же буквами, но со значком «крышечка» сверху), вычисляются по формулам:

$$\hat{F}_2(z_3) = F_1(z_2) + F_2(z_3) - F_2(z_2);$$

$$\hat{F}_3(z_4) = \hat{F}_2(z_3) + F_3(z_4) - F_3(z_3);$$

$$\hat{F}_4(z_5) = \hat{F}_3(z_4) + F_4(z_5) - F_4(z_4);$$

$$\hat{F}_5(z_6) = \hat{F}_4(z_5) + F_5(z_6) - F_5(z_5).$$

Учитывая также, что должно выполняться условие $K\hat{F}_5(z_6) = 1$, то функции на всех участках надо еще умножить на нормировочный коэффициент: $K = \dfrac{1}{\hat{F}_5(z_6)}$.

Выполнив дифференцирование по z можно получить плотность функции распределения $f(z)$ и затем используя формулы (4) и (5) получить формулы математического ожидания M_φ и дисперсии D_φ случайной величины φ. Однако они оказываются весьма громоздкими. Для упрощения этих формул представим функцию $F(z)$ в линейном приближении. Основанием для этого служит то, что область определения функции $F(z)$ составляет пять участков, а также то, что коэффициенты при нелинейных слагаемых весьма малы, так что этими слагаемыми можно пренебречь. Линейную аппроксимацию целесообразно выполнить на основе значений функции $F(z)$ на концах участков. В этом случае получаем следующие выражения для функции распределения, обозначаемой через $\tilde{F}(z)$:

$$\tilde{F}_1(z) = \frac{\hat{F}_1(z_2)}{z_2 - z_1}(z - z_1);$$

$$\tilde{F}_2(z) = \frac{\hat{F}_2(z_3) - \hat{F}_2(z_2)}{z_3 - z_2}(z - z_2);$$

$$\tilde{F}_3(z) = \frac{\hat{F}_3(z_4) - \hat{F}_2(z_3)}{z_4 - z_3}(z - z_3);$$

$$\tilde{F}_4(z) = \frac{\hat{F}_4(z_5) - \hat{F}_3(z_4)}{z_5 - z_4}(z - z_4);$$

$$\tilde{F}_5(z) = \frac{\hat{F}_5(z_6) - \hat{F}_4(z_5)}{z_6 - z_5}(z - z_5).$$

Дифференцируя функцию распределения, получаем выражения для плотности функции распределения:

$$\tilde{f}_1 = \frac{\hat{F}_1(z_2)}{z_2 - z_1};\; \tilde{f}_2 = \frac{\hat{F}_2(z_3) - \hat{F}_2(z_2)}{z_3 - z_2};$$

$$\tilde{f}_3 = \frac{\hat{F}_3(z_4) - \hat{F}_2(z_3)}{z_4 - z_3};\ \tilde{f}_4 = \frac{\hat{F}_4(z_5) - \hat{F}_3(z_4)}{z_5 - z_4};$$

$$\tilde{f}_5 = \frac{\hat{F}_5(z_6) - \hat{F}_4(z_5)}{z_6 - z_5}.$$

Функция распределения $1 - F_y(z) = \frac{y_+ - z}{\Delta y}$ не нормирована. Для нормировки введем в эту функцию величину Δz такую, что $y_+ - z_6 + \Delta z = 0$ и коэффициент K_z такой, что $\frac{y_+ - z_1 + \Delta z}{K_z} = 1$. Также не нормирована функция $1 - F_z(y)$. Для её нормировки вводим величину $\Delta\hat{y}$ и коэффициент K_y, вычисляемые по формулам: $\Delta\hat{y} = z_1 - y_-$ $K_y = \tilde{f}_i(y_+ - z_6)$

Подставляя в формулы (4) и (5) получаем выражения для математического ожидания и дисперсии случайной величины φ:

$$M_z = \sum_{i=1}^{5} \int_{z_i}^{z_{i+1}} z f_z(z)[1 - F_y(z)]dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \frac{\tilde{f}_i}{\Delta y} \int_{z_i}^{z_{i+1}} z(y_+ + \Delta z - z)dz =$$

$$= \frac{1}{K_z \Delta y} \sum_{i=1}^{5} \tilde{f}_i \left[\frac{z_{i+1}^2 - z_i^2}{2}(y_+ + \Delta z) - \frac{z_{i+1}^3 - z_i^3}{3} \right];$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{5} \int_{y_-}^{y_+} y f_y(y)[1 - F_z(y)]dy =$$

$$= \frac{1}{K_y \Delta y} \sum_{i=1}^{5} \int_{y_-}^{y_+} y[1 - \tilde{f}_i(y - z_i + \Delta\hat{y})]dy =$$

$$= \frac{1}{K_y \Delta y} \sum_{i=1}^{5} \left[\frac{y_+^2 - y_-^2}{2}(1 + \tilde{f}_i z_i - \Delta\hat{y}) - \tilde{f}_i \frac{y_+^3 - y_-^3}{3} \right];$$

$$D_z = \sum_{i=1}^{5} \int_{z_i}^{z_{i+1}} z^2 f_z(z)[1 - F_y(z)]dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \frac{\tilde{f}_i}{\Delta y} \int_{z_i}^{z_{i+1}} z^2(y_+ + \Delta z - z)dz =$$

$$= \frac{1}{K_z \Delta y} \sum_{i=1}^{5} \tilde{f}_i \left[\frac{z_{i+1}^3 - z_i^3}{3}(y_+ + \Delta z) - \frac{z_{i+1}^4 - z_i^4}{4} \right];$$

$$D_y = \sum_{i=1}^{5} \int_{y_-}^{y_+} y^2 f_y(y)[1 - F_z(y)]dy =$$

$$= \frac{1}{K_y \Delta y} \sum_{i=1}^{5} \int_{y_-}^{y_+} y^2 [1 - \tilde{f}_i(y - z_i + \Delta\hat{y})]dy =$$

$$= \frac{1}{K_y \Delta y} \sum_{i=1}^{5} \left[\frac{y_+^3 - y_-^3}{3}(1 + \tilde{f}_i z_i - \Delta\hat{y}) - \tilde{f} \frac{y_+^4 - y_-^4}{4} \right].$$

Рассмотрим теперь вариант, когда элементарные случайные величины распределены по нормальному закону. До этапа определения функции и плотности распределения $f(u)$ процедуры полностью совпадают с предыдущим случаем. На этом этапе нужно найти распределение величины $z = \frac{u}{v}$. Поскольку законы распределения величин u и v различны (линейный и нормальный), сначала определим функцию распределения величины z, а затем дифференцированием найдем плотность распределения. Функция распределения величины $z = \frac{u}{v}$ определяется по формуле [5]:

$$F(z) = \int_{v_-}^{0} f(v)dv \int_{zv}^{u_+} f(u)du + \int_{0}^{v_+} f(v)dv \int_{u_-}^{zv} f(u)du \cdot$$

Нормальное распределение функции $f(v)$ имеет вид:

$$f(v) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v - \bar{q})^2}{2\sigma_v^2}},$$

где $\bar{q}$ – математическое ожидание случайной величины $v = q + \bar{q}$. Подставляя функции $f(v)$ и $f(u)$ в $F(z)$ получаем:

$$F(z) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \left[\int_{v_-}^{0} e^{-\frac{(v - \bar{q})^2}{2\sigma_v^2}} dv \int_{zv}^{u_+} \left(\frac{K_u Q}{2} u + \Delta f_u \right) du + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{v_+} e^{-\frac{(v - \bar{q})^2}{2\sigma_v^2}} dv \int_{u_-}^{zv} \left(\frac{K_u Q}{2} u + \Delta f_u \right) du \right]$$

После взятия внутреннего интеграла имеем:

$$F(z)=\frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}*\left[\int_{v_-}^{0} e^{-\frac{(v-\bar{q})^2}{2\sigma_v^2}} *\right.$$

$$*\left(\frac{K_uQ}{4}u_+^2+\Delta f_u u_+ -\frac{K_uQ}{4}z^2\nu^2-\Delta f_u z\nu\right)dv+$$

$$+\int_0^{v_+} e^{-\frac{(v-\bar{q})^2}{2\sigma_v^2}} *$$

$$\left.*\left(\frac{K_uQ}{4}z^2\nu^2+\Delta f_u z\nu-\frac{K_uQ}{4}u_-^2-\Delta f_u u_-\right)dv\right].$$

Для упрощения интегрирования разложим функцию $f(v)$ в степенной ряд в точке $v=\bar{q}$, ограничиваясь двумя членами:

$$f(v)\cong\frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}\left[1-\frac{(v-\bar{q})^2}{2\sigma_v^2}\right].$$

Интегрирование этого слагаемого будем проводить на отрезке положительной определенности подинтегральной функции, обозначаемый как $(\hat{v}_-,\hat{v}_+)$. Этот отрезок определяется пересечением двух отрезков: отрезка $\Delta\nu=v_+-v_-$ и отрезка между корнями уравнения: $1-\frac{(v-\bar{q})^2}{2\sigma_v^2}=0$. После интегрирования получаем:

$$F(z)=Cz^2-Dz+G9,$$

где

$$C=\frac{K_uQ\bar{q}\hat{v}_+^4}{8\sigma_v^3\sqrt{2\pi}};\ D=\frac{\Delta f_u}{2\sigma_v^3\sqrt{2\pi}}\left(2\sigma_\nu^2\hat{v}_+^2-\frac{\hat{v}_+^4}{2}-\bar{q}^2\hat{v}_+^2\right);$$

$$G=\frac{1}{2\sigma_v^3\sqrt{2\pi}}*$$

$$*\left(\frac{K_uQu_+^2\hat{v}_+^2\bar{q}}{2}+2\Delta f_u\hat{v}_+\sigma_\nu^2\Delta u-\frac{\Delta f_u\hat{v}_+^3\Delta\nu}{3}-\Delta f_u\hat{v}_+\bar{q}^2\Delta u\right).$$

При проведении преобразований учтено, что $\hat{v}_-=-\hat{v}_+$ и $u_-=-u_+$.

Эта функция не нормирована. Для нормировки вводим слагаемое ΔF_z и коэффициент K_z, которые находятся из условий $F(z_-)+\Delta F_z=0$ и $K_z[F(z_+)+\Delta F_z]=1$. Функция $F(z)$ используется для определения плотности распределения $f(z)$, а также непосредственно в формулах для M_y и D_y как функция переменной y. В этом качестве она также должна быть нормирована. Для нормировки вводим слагаемое ΔF_{zy} и коэффициент K_{zy}, которые находятся из условий $F(y_-)+\Delta F_{zy}=0$ и $K_{zy}[F(y_+)+\Delta F_{zy}]=1$.

Плотность функции распределения $f(z)$ находим дифференцированием функции распределения $F(z)$ (с учетом введенного коэффициента нормировки):

$$f(z)=K_z(2Cz-D).$$

Зная распределения случайных величин z и y можно, как и раньше, определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\varphi=min(z,y)$ по формулам (4) и (5). Чтобы выполнить интегрирование в элементарных функциях, как и раньше нормальную плотность распределения случайной величины y разложим в ряд Тейлора в точке 0, оставив два члена (8), а функцию распределения представим в виде (9).

Ввиду приближенности представления функции $f(y)$ интегрирование проводим на отрезке положительной определенности этой функции $(\hat{y}_-,\hat{y}_+)$, определяемой пересечением отрезков $(-\sigma_y\sqrt{2},\sigma_y\sqrt{2})$ и (y_-,y_+).

В итоге получаем следующие формулы для M_z, M_y и D_z, D_y:

$$M_z=K_z\int_{z_-}^{z_+}z(2Cz-D)\left(\frac{1}{2}-\frac{K_yz}{4\bar{\sigma}_y}\right)dz;$$

$$D_z=K_z\int_{z_-}^{z_+}z^2(2Cz-D)\left(\frac{1}{2}-\frac{K_yz}{4\bar{\sigma}_y}\right)dz;$$

$$M_y=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}*$$

$$*\int_{\hat{y}_-}^{\hat{y}_+}y\left(1-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\left[1-K_{zy}\left(Cz^2-Dz+G+\Delta F_{zy}\right)\right]dy;$$

$$D_y=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}*$$

$$*\int_{\hat{y}_-}^{\hat{y}_+}y\left(1-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\left[1-K_{zy}\left(Cz^2-Dz+G+\Delta F_{zy}\right)\right]dy.$$

После интегрирования формулы принимают вид:

$$M_z=K_z\Delta z_3\left(\frac{C}{3}+\frac{DK_y}{12\bar{\sigma}_y}\right);$$

$$D_z=-K_z\left(\frac{D\Delta z_3}{6}-\frac{CK_y\Delta z_5}{10\bar{\sigma}_y}\right);$$

$$M_y=\frac{K_{zy}D}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\Delta\hat{y}_3}{3}+\frac{\Delta\hat{y}_5}{10\sigma_y^2}\right);$$

$$D_y = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} *$$

$$* \left[\frac{\Delta y_3}{3} - \frac{\Delta y_5}{10\sigma_y^2} - K_{zy} \left(\frac{C\Delta y_5}{5} + \frac{G\Delta y_3}{3} + \frac{\Delta F_{zy} \Delta y_3}{3} \right) + \right.$$

$$\left. + K_{zy} \left(\frac{C\Delta y_7}{14\sigma_y^2} + \frac{G\Delta y_5}{10\sigma_y^2} + \frac{\Delta F_{zy} \Delta y_5}{10\sigma_y^2} \right) \right].$$

ЧИСЛОВЫЕ ПРИМЕРЫ ВЛИЯНИЯ НЕТОЧНОСТИ В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Рассмотрим теперь конкретные числовые примеры влияния неточности в исходных данных на результаты расчетов бизнес-плана по реализации производственного инвестиционного проекта ОАО «Московский завод домашних холодильников» [5]. В табл. 1-2 представлены исходные данные для расчетов.

В качестве результатов расчетов бизнес-плана в [5] рассматривались такие показатели, как производство продукции, выручка от реализации, расходы, налоги и др. Расчеты выполнены для трехлетнего периода. Относительное влияние неточности исходных данных на эти показатели одинаковое и не зависит от времени. Поэтому в качестве примера результатов расчетов будет рассмотрен только выпуск продукции в 36-й месяц производства. Параметры неточности исходных данных определялись отрезками неточности и функциями их распределения. В качестве функций распределения рассматривались равномерное и нормальное распределения.

Рассмотрены три варианта неточности исходных данных – два частных и общий. В частном варианте 1 неточными принималось количество занятых и производственные мощности. В частном варианте 2 неточными принималось количество занятых, производственные мощности и средняя зарплата на одного цехового работника. В общем варианте неточными рассматривались все исходные данные: количество занятых, производственные мощности, средняя заработная плата на одного цехового работника и доля цеховых затрат на заработную плату (включая ЕСН), приходящихся на единицу изделия от общих цеховых затрат на заработную плату. Эти варианты позволяют выделить влияние неточности тех исходных данных, которые не были включены в общий вариант.

Производственные мощности обычно задаются как экзогенный параметр. В данном примере для упрощения расчетов производственные мощности принимаются равными выпуску продукции. Рассчитаны математические ожидания и средние квадратические отклонения выпуска продукции с распределениями по равномерному и нормальному закону для различных интервалов неточности, задаваемых в долях от средних значений. Результаты расчетов представлены в табл. 3-20.

Таблица 1

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ПО ЗАТРАТАМ НА ПРОИЗВОДСТВО ПРОДУКЦИИ

№	Наименование продукции	Себестоимость руб./ед.	Затр. матер. руб./ед.	Зарпл. + соцстр. руб./ед.	Цех. + Заводские расх. руб./ед.	Доля матер. в себест. прод.	Доля матер. в общ. затр.	Доля зар. платы в себест. прод.	Сред. зарпл. цех. раб. руб.	Наценка %
1	Компрессор	906	727,6	34,1	144,48	0,8031	0,4353	0,0376	8 000	10
2	Шкаф морозил.	123,33	57,96	15	50,364	0,4699	0,0347	0,1216	8 000	10
3	Детали автопр.	17,764	5,55	2,688	9,026	0,3124	0,0033	0,1513	8 000	10
4	Испар. СОИ	300	85	49,35	165,67	0,2833	0,0508	0,1645	8 000	10
5	Испар. НТИ	459	250	48,01	161,18	0,5447	0,1496	0,1046	8 000	10
6	Др.зап.части	929	545,26	88,03	295,53	0,5869	0,3262	0,0947	8 000	10

Таблица 2

КОЛИЧЕСТВО ЗАНЯТЫХ

№	Наименование	Месяцы 3-го года											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Компрессор	130	130	130	140	140	140	150	150	150	160	160	160
2	Шкаф мороз.	100	100	100	110	110	110	120	120	120	130	130	130
3	Детали автопр.	80	80	80	90	90	90	100	100	100	110	110	110
4	Испар. СОИ	45	45	45	50	50	50	55	55	55	60	60	60
5	Испар. НТИ	50	50	50	55	55	55	60	60	60	65	65	65
6	Др. зап. части	45	45	45	50	50	50	55	55	55	60	60	60

Таблица 3

Частный вариант 1. Равномерное распределение, неточность исходных данных 10% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	3 404	855	581	291	497	506
$M_ф$	-567	-142	-96	-48	-82	-85
$\sigma_ф$	982	246	167	84	143	146

Таблица 4

Частный вариант 1. Равномерное распределение, неточность исходных данных 20% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	6 808	1 710	1 163	583	994	1 013
$M_ф$	-1 134	-285	-193	-97	-165	-168
$\sigma_ф$	1 965	493	335	168	287	292

Таблица 5

Частный вариант 1. Равномерное распределение, неточность исходных данных 30% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	10 213	2 566	1 745	675	1 491	1 521
$M_ф$	-1 702	-427	-290	-145	-248	-253
$\sigma_ф$	2 948	740	503	252	430	438

Таблица 6

Частный вариант 1. Нормальное распределение, неточность исходных данных 10% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	3 404	855	581	291	497	506
$M_ф$	-145	-36	-25	-12	-21	-22
$\sigma_ф$	730	183	125	63	107	109

Таблица 7

Частный вариант 1. Нормальное распределение, неточность исходных данных 20% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	6 808	1 710	1 163	583	994	1 013
$M_ф$	-290	-73	-50	-25	-42	-43
$\sigma_ф$	1460	367	249	125	213	217

Таблица 8

Частный вариант 1. Нормальное распределение, неточность исходных данных 30% от ср. знач.

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	10 213	2 566	1 745	675	1 491	1 521
$M_ф$	-435	-109	-74	-37	-64	-65
$\sigma_ф$	2190	550	374	188	320	326

Таблица 9

Частный вариант 2. Равномерное распределение, неточность исходных данных 10% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	3 404	855	581	291	497	506
$M_ф$	-120	-24	-15	-6	-12	-12
$\sigma_ф$	1 660	617	428	170	252	240

Таблица 10

Частный вариант 2. Равномерное распределение, неточность исходных данных 20% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	6 808	1 710	1 163	583	994	1 013
$M_ф$	-262	-60	-39	-18	-33	-34
$\sigma_ф$	2396	825	571	236	359	348

Таблица 11

Частный вариант 2. Равномерное распределение, неточность исходных данных 30% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	10 213	2 566	1 745	675	1 491	1 521
$M_ф$	-403	-96	-63	-30	-54	-55
$\sigma_ф$	2 994	950	653	282	445	436

Таблица 12

Частный вариант 2. Нормальное распределение, неточность исходных данных 10% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	3 404	855	581	291	497	506
$M_ф$	175	17	5	1	13	15
$\sigma_ф$	631	78	28	14	57	65

Таблица 13

Частный вариант 2. Нормальное распределение, неточность исходных данных 20% от ср. знач.

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	6 808	1 710	1 163	583	994	1 013
$M_ф$	361	33	97	2	26	30
$\sigma_ф$	1287	149	56	28	114	130

Таблица 14

Частный вариант 2. Нормальное распределение, неточность исходных данных 30% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	10 213	2 566	1 745	675	1 491	1 521
$M_ф$	556	49	12	2	39	46
$\sigma_ф$	1 965	212	85	42	169	195

Таблица15

Общий вариант. Равномерное распределение, неточность исходных данных 10% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	3 404	855	581	291	497	506
$M_ф$	19	15	13	7	8	7
$\sigma_ф$	1 466	597	416	161	227	212

Таблица 16

Общий вариант. Равномерное распределение, неточность исходных данных 20% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	6 808	1 710	1 163	583	994	1 013
$M_ф$	19	15	13	7	8	7
$\sigma_ф$	2 096	853	595	230	325	303

Таблица 17

Общий вариант. Равномерное распределение, неточность исходных данных 30% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	10 213	2 566	1 745	675	1 491	1 521
$M_ф$	20	16	14	7	8	7
$\sigma_ф$	2 589	1 054	735	284	402	374

Таблица 18

Общий вариант. Нормальное распределение, неточность исходных данных 10% от ср. знач.

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	3 404	855	581	291	497	506
$M_ф$	-483	-121	-82	-41	-70	-71
$\sigma_ф$	500	126	84	43	73	74

Таблица 19

Общий вариант. Нормальное распределение, неточность исходных данных 20% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	6 808	1 710	1 163	583	994	1 013
$M_ф$	-965	-242	-164	-82	-140	-143
$\sigma_ф$	996	250	170	85	145	148

Таблица 20

Общий вариант. Нормальное распределение, неточность исходных данных 30% от средних значений

Тыс. руб

Значения	Номера видов выпускаемой номенклатуры продукции					
	1	2	3	4	5	6
$\overline{DXL}$	34 042	8 552	5 816	2 917	4 971	5 068
$\Delta\overline{DXL}$	10 213	2 566	1 745	675	1 491	1 521
$M_ф$	-1445	-363	-247	-123	-211	-215
$\sigma_ф$	1489	374	254	127	217	221

Рассмотрим влияние неточности исходных данных для частного варианта 1, когда неточными являются количество занятых и производственные мощности. Для равномерного распределения исходных случайных величин математическое ожидание разброса выпуска продукции представляет собой отрицательную величину. Учитывая, что разброс выпуска продукции является центрированной случайной величиной, то распределение его является смещенным на эту величину. При неточности исходных данных 10% среднее квадратическое отклонение равно такому же отклонению для равномерного распределения. При неточности исходных данных 20% и 30% отрицательное смещение распределения увеличивается. Среднее квадратическое отклонение также увеличивается.

Для нормального распределения исходных случайных величин математическое ожидание разброса выпуска продукции представляет собой также отрицательную величину. При этом среднее квадратическое отклонение равно такому же отклонению для нормального распределения. При неточности исходных данных 20% и 30% отрицательное смещение распределения увеличивается, как увеличивается и среднее квадратическое отклонение.

В частном варианте 2 характерны следующие особенности. Для равномерного распределения исходных случайных величин при всех рассмотренных интервалах их неточности сохраняется отрицательное смещение распределения выпуска продукции, но оно уменьшается по абсолютной величине. В то же время среднее квадратическое отклонение увеличивается для всех интервалов неточности исходных случайных величин. Для нормального распределения смещение распределения выпуска продукции переходит из отрицательного в положительное с близкими абсолютными значениями при всех интервалах неточности исходных данных. При этом среднее квадратическое отклонение остается примерно одинаковыми с вариантом 1 также для всех интервалах неточности исходных данных.

В общем варианте имеем следующую картину. Для равномерного распределения при всех рассмотренных интервалах неточности исходных случайных величин смещение распределения становится практически равным нулю, а среднее квадратическое отклонение немного снижается по сравнению с вариантом 2. Для нормального распределения смещение распределения также при всех рассмотренных интервалах неточности исходных случайных величин становится отрицательным и увеличивается по абсолютной величине. Среднее квадратическое отклонение для всех интервалов немного уменьшается по сравнению с вариантом 2.

Общий итог анализа выполненных расчетов состоит в следующем. Для равномерного распределения при переходе от частного случая 1 к общему случаю наблюдается уменьшение смещения распределения до нуля и возрастание среднего квадратического отклонения. Последнее также свойственно при увеличении интервалов неточности исходных случайных величин. Для нормального распределения наблюдается изменение смещения распределения как по знаку, так и по абсолютному значении. Неизменным остается также как и для равномерного распределения увеличение среднего квадратического отклонения при переходе от частного случая 1 к общему случаю и при увеличении интервалов неточности исходных случайных величин.

Анализ соотношения математического ожидания разброса выпуска продукции и среднего квадратического отклонения показывает, что для интервала неточности 10% можно считать влияние не точности исходных случайных величин не существенным как для равномерного, так и тем более для нормального распределения. Что касается интервалов не точности 20% и 30%, то для последнего интервала влияние существенное. Относительно интервала неточности 20% из представленных расчетов нельзя утверждать о существенности или не существенности влияния. Для этого необходимо вывести функции распределения выпуска продукции и на основе их получить дополнительные количественные данные, позволяющие более однозначно судить о существенности влияния на выпуск продукции.

Кроме того, следует учесть, что при выводе формул математического ожидания и дисперсии для нормального распределения использовались упрощения в виде приближений к функциям. Для оценки этих приближений целесообразно получить эти формулы с приближениями более высоких порядков, что автор предполагает сделать в следующей публикации.

Романов Борис Александрович

Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель. – М. : Наука, 1969.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Наука, 1970.
3. Невельсон М.Е., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание [Текст] / М.Е. Невельсон, Р.З. Хасьминский. – М. : Наука, 1972.
4. Романов Б.А. Математическая модель реализации производственного проекта группой предприятий [Текст] / Б.А. Романов // Аудит и финансовый анализ. – 2007. – №2.
5. Романов Б.А. Расчет некоторых вариантов бизнес-плана производства продукции ОАО «Московский завод домашних холодильников» на 2003-2005 гг. [Текст] / Б.А. Романов // Аудит и финансовый анализ. – 2007. – №3.
6. Романов Б.А. Учет неточности параметров в задаче анализа инвестиционного проекта по производству автомобилей [Текст] / Б.А. Романов // Аудит и финансовый анализ. – 2008. – №2.
7. Тюрин Ю.Н. Непараметрические методы статистики [Текст] / Ю.Н. Тюрин. – М. : Знание, 1978.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] : Т. 1-3 / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Физматгиз, 1958.

Ключевые слова

Теория вероятностей; марковский процесс; стохастическая аппроксимация; бизнес-план; производственный инвестиционный проект; неточность параметров.

РЕЦЕНЗИЯ

В статье рассматриваются актуальные вопросы влияния неточности исходных параметров в задаче анализа производственного инвестиционного проекта на выходной показатель, такой как максимальный выпуск продукции при различных вариантах задания функций распределения неточности исходных параметров. Приводятся расчеты математических ожиданий и дисперсии разброса выпуска продукции для нескольких вариантов комбинации исходных случайных величин и различных интервалов их неточности. Выполнен анализ полученных результатов. Работа имеет важное научное и практическое значение и может использоваться для решения подобных задач при анализе производственных инвестиционных проектов.

Полковский Л.М., д.э.н., ректор Московского бухгалтерского института

3.8. ACCOUNT OF DISCREPANCY OF PARAMETRES AT CALCULATION OF SOME VARIANTS OF THE BUSINESS PLAN OF PRODUCTION OF OPEN SOCIETY «MOSCOW FACTORY OF HOUSE REFRIGERATORS»

B.A. Romanov, the Candidate of Sciences (Technical), Managing Chair of Mathematical Disciplines of the Moscow Accounting Institute

In article the account of discrepancy of parametres in a problem of the analysis of the investment industrial project is executed. Discrepancies of parametres it is considered as the random variables distributed on set pieces. As distribution laws uniform and normal distributions are used. For the purpose of revealing of influence of separate parametres on results of calculations are considered along with special cases of discrepancy of separate parametres as well the general case of discrepancy of all parametres. Population means and dispersions of output depending on the set intervals not accuracy of initial random variables pay off and the analysis of results of calculations is made.

Literature

1. B.A. Romanov. Calculation of some variants of the business plan of production of Open Society «Moscow factory of house refrigerators» for 2003-2005 M: Audit and the financial analysis №3, 2007.
2. B.A. Romanov. Mathematical model of realisation of the industrial project group of the enterprises. M: Audit and the financial analysis №2, 2007

3. B.A. Romanov. The account of discrepancy of parametres in a problem of the analysis of the investment project on manufacture of cars. M: Audit and the financial analysis №2, 2008.
4. M.E. Nevelson, R.Z. Hasminsky. Stochastic approximation and recurrent оценивание. M: the Science, 1972.
5. E.S. Venttsel, L.A. Ovcharov. Probability theory. – M: the Science, 1970.
6. J.N. Tyurin. Nonparametric methods of statistics. M, Knowledge, 1978.
7. G.M. Fihtengolts. A course differential and integral calculus. T. 1-3. – M: Fizmatgiz, 1958.
8. E.S. Venttsel. Probability theory. – M: the Science, 1969.

Keywords

Probability theory; markov process; stochastic approximation; business plan; industrial investment project; discrepancy of parametres.