8.7. УСТОЙЧИВОСТЬ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗМОЖНОГО ИЗМЕНЕНИЯ СТОИМОСТИ ДЕНЕГ И АНАЛИЗ РИСКОВ

Беляков А.В., к.т.н., ведущий системный аналитик ОАО «ПРАЙМ групп», филиал, г. Тверь;
Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор, академик РАЕН, профессор кафедры финансов и менеджмента Тверского института экологии и права, г. Тверь

Рассматривается задача исследования устойчивости инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег. Показано, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки по сравнению с действующей по договору об открытии кредитной линии. Показано, что указанная функция является дифференцируемой по направлениям, и предложен способ их расчета.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта в форме кредитной линии. Известно [3, 5], что денежный поток (ДП) Q_t на собственный капитал X_t инвестора получается из денежного потока q_t на инвестированный капитал Y_t путем учета дополнительно суммы выплат процентов по кредиту и изменения задолженности Z_t. Трудность практического применения модели ДП на собственный капитал инвестора связана с отсутствием удовлетворительных моделей прогнозирования задолженности Z_t в прогнозный период $t = 1,2, ..., n$. В [3] было рекомендовано задавать долю заемного капитала $w_t = Z_t / Y_t$ на каждый год прогнозного периода с равномерным изменением от начального уровня w_0 до целевого w_n, определенного из анализа отрасли В [7] изучались проблемы учета структуры капитала в двух основных моделях ДП для собственного и инвестированного капитала с учетом рекомендации [3]. Было показано, что указанный способ учета структуры капитала позволяет однозначно определить ДП для собственного и инвестированного капитала, а также подходящую ставку дисконта (в общем случае переменную) по модифицированной модели CAPM [3].

С другой стороны, использование модели дисконтирования ДП на инвестированный капитал не позволяет оптимизировать финансирование ДП на собственный капитал. Поэтому возможны случаи, когда подсчитанная таким образом стоимость собственного капитала оказывается отрицательной тогда, как при оптимизации задолженности Z_t в прогнозный период $t = 1, 2, ..., n$, она может стать положительной [1].

В работе [1] было показано, как смоделировать ДП на собственный капитал с учетом оптимизации остатков фактической задолженности Z_t. В связи с этим в настоящей работе показано, как исследовать устойчивость инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег и как использовать полученные результаты для анализа рисков сопутствующих проекту. Показано, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки по сравнению с действующей по договору об открытии кредитной линии. Показано что, тем не менее, указанная функция является дифференцируемой по направлениям [2], и предложен способ их расчета. Полученные производные интерпретируются как коэффициенты эластичности в предложенной методике анализа рисков. Тем самым предложена новая методика анализа рисков, которая может использоваться финансовыми аналитиками, а также служить основой для соответствующих теоретических исследований. Рассматривается числовой пример.

1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ ДП

Необходимость выбора ДП, на основе которого будет определена стоимость проекта, связана с разной степенью риска, присущего финансовым и операционным потокам. В зависимости от цели оценки в качестве предмета рассмотрения могут использоваться различные ДП. Существуют два основных вида ДП [3]:

- ДП для инвестированного капитала, или бездолговой ДП;
- ДП для собственного капитала инвестора.

Бездолговой ДП не учитывает суммы выплат процентов по кредиту и увеличение или уменьшение задолженности. Данный вид потока рассматривается с целью определения эффективности вложения капитала в целом. Полученные суммарные величины сопоставляются с полными инвестициями в бизнес, независимо от происхождения последних. Бездолговой ДП для инвестированного капитала равняется [3]: чистой прибыли до налогообложения и уплаты процентов, скорректированной, на ставку налога на прибыль, плюс не денежные начисления (амортизация), минус прирост чистого оборотного капитала, минус капитальные вложения.

Величина бездолгового ДП которого будет обозначаться через:

$$q_t, t = 1, 2, ..., n,$$

где n – предполагаемая длительность проекта, выраженная в годах.

ДП для собственного капитала учитывает дополнительно суммы выплат процентов по кредиту и увеличение или уменьшение задолженности. Обозначим через Z_t – остаток долга на конец t-го года, через $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$ – изменение задолженности, через g – среднюю стоимость заемного капитала и через c – ставку налога на прибыль. Ставка дисконта на заемный капитал g определяется обычно средней ставкой по кредитам предприятиям и организациям на дату оценки по данным Центрального банка РФ на соответствующие сроки. Если ввести величины годовых платежей в счет погашения долга:

$$p_t = Z_{t-1} * g * (1 - c) - \Delta Z_t, t = 1, 2, ..., n, \qquad (1)$$

которые включает проценты и уменьшение основного долга (со знаком плюс) или увеличение основного долга (со знаком минус), то ДП на собственный капитал инвестора можно записать единообразно в виде:

$$q_t - p_t, t = 1, 2, ..., n.$$

Заметим, что величины платежей в счет погашения долга p_t могут быть отрицательны. Это означает новый заем в момент t.

2. СТАВКИ ДИСКОНТА НА СОБСТВЕННЫЙ И ИНВЕСТИРОВАННЫЙ КАПИТАЛ

Обозначим через i подходящую ставку дисконта на собственный капитал. Ставка дисконта на собственный капитал представляет собой ставку дохода на вложенный капитал, достижение которой ожидает инвестор при принятии решения о приобретении будущих доходов (например, будущего ДП) с учетом риска их получения.

При расчете ставки дисконта обычно используется модифицированная модель оценки капитальных активов (CAPM). Применение модифицированной модели оценки капитальных активов для расчета собственного капитала можно представить в виде следующего равенства [1]:

$$i = R_f + \beta * (R_m - R_f) + S_1 + S_2 + S_3, \qquad (2)$$

где

R_f – безрисковая ставка;

β – коэффициент бета компании;

R_m – доходность рынка;

S_1 – премия за страновой риск;

S_2 – премия за малую капитализацию;

S_3 – премия за специфический риск оцениваемой компании.

Если объединить все корректировки к обычной модели CAPM в одну, введя суммарную поправку:

$$d = S_1 + S_2 + S_3,$$

то основную формулу модифицированной модели CAPM можно записать в виде:

$$i = R_f + \beta * (R_m - R_f) + d. \qquad (3)$$

Пусть w – доля заемного капитала в инвестированном капитале компании, определенном по рыночной стоимости, характеризующая структуру капитала. Если структура капитала будет меняться, то $w = w_t, t = 1, 2, ..., n,$ является функцией дискретного времени.

Кроме ставки на собственный и заемный капитал рассматривается средневзвешенная ставка j, характеризующая доходность инвестированного капитала (***WACC***). Средневзвешенная стоимость капитала учитывает в себе все риски, связанные с финансированием деятельности предприятия, как из собственных источников финансирования, так и за счет заемных средств. Стоимость финансирования деятельности предприятия за счет собственного капитала (стоимость собственного капитала) отражает все риски, присущие инвестициям в виде акционерного капитала, в то время как стоимость финансирования за счет заемных средств выражается в процентной ставке, по которой предприятию предоставляют кредитные ресурсы.

Средневзвешенная стоимость капитала рассчитывается по формуле [1]:

$$j = j_t = (1 - c) g w_t + i(1 - w_t). \qquad (4)$$

При расчете средневзвешенной стоимости капитала доли заемных и собственных средств в структуре капитала рассчитываются на основе рыночных данных по отрасли. В результате получается целевая структура капитала, которая принимается за $w = w_n$. За начальное значение $w = w_0$ принимается фактическая структура капитала, определенная по рыночной стоимости инвестированного и заемного капитала. Промежуточные значения $w = w_t$ интерполируются по крайним в простейшем случае линейным образом. В этом суть методики прогнозирования структуры капитала, предложенной в [3]. В настоящей работе используется другая методика, основанная на оптимизации финансирования проекта [1].

3. ДИСКОНТИРОВАНИЕ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ НА СОБСТВЕННЫЙ И ИНВЕСТИРУЕМЫЙ КАПИТАЛ

Обозначим через $X_t, Y_t = X_t + Z_t, t = 0, 1, 2, ..., n,$ текущую стоимость собственного и инвестируемого в проект) капитала на конец t-го года.

Продажная стоимость собственного капитала получается обычно по формуле [7]:

$$X_n = (1 - w_n) Y_n. \qquad (5)$$

Для фигурирующей здесь продажной стоимости инвестируемого капитала используется известная формула Гордона [2]:

$$Y_n = \frac{q_n (1 + v_{n+1})}{j_{n+1} - v_{n+1}}, \qquad (6)$$

где j_{n+1}, v_{n+1} – соответственно постпрогнозные средневзвешенная стоимость инвестированного капитала и темп изменения денежного потока на инвестированный капитал, которые считаются постоянными в силу предположения о стационарности постпрогнозного периода. Обычно постпрогнозный темп v_{n+1} определяется по долгосрочным прогнозам темпа роста мировой экономики на уровне долгосрочной инфляции [1].

Для определения платежей p_t преобразуем формулу (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} p_t &= Z_{t-1} g(1 - c) - Z_t + Z_{t-1} = \\ &= Z_{t-1}(1 + g') - Z_t, t = 0, 1, ..., n. \end{aligned} \qquad (7)$$

Здесь обозначено для краткости:

$$g' = g(1 - c).$$

Введенная величина представляет собой среднюю стоимость заемного капитала, скорректированную на ставку налога на прибыль.

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ТЕКУЩЕЙ СТОИМОСТИ СОБСТВЕННОГО КАПИТАЛА ИНВЕСТОРА

Выпишем сначала рекуррентное уравнение для собственного капитала инвестора, следуя [3]:

$$X_{t-1} = \frac{q_t - p_t + X_t}{1 + i}, t = n, ..., 1. \qquad (8)$$

Конечное условие здесь определяются из (5). Платежи p_t определяются по формуле (7), где Z_t находятся по схеме, предложенной в [4], если считать, что задолженность Z_t представляет собой фактическую задолженность по кредитной линии объема $S_t, t = 0, 1, ..., n - 1,$ на конец t-го года. В этом случае фактический остаток задолженности, определяется по рекуррентному уравнению:

$$Z_{t-1} = min\left(S_{t-1}; \frac{Z_t + q_t}{1 + g'}\right), t = n, ..., 1. \qquad (9)$$

Остаток долга должен находится в пределах:

$$0 \le Z_t, t = 0, 1, ..., n; \qquad (10)$$

$$Z_t \le S_t, t = 0, 1, ..., n. \qquad (11)$$

Связь между платежами и остатками долга имеет вид (7).

В отличие от [1] мы допускаем переменный объем кредитной линии $S = S_t, t = 0, 1, ..., n,$ и ненулевые начальные и конечные значения остатков, необходимых для расчета платежей по формуле (7):

$$Z_{-1} = Z^0_{-1}, Z_n = Z^0_n. \quad (12)$$

Здесь Z^0_{-1} – фактический остаток долга на начало нулевого года прежнего владельца проекта, в отличие от планируемого остатка Z_0 – нового владельца. Он нужен для расчета платежа p_0 по формуле (7), а Z^0_n – планируемый остаток по кредитной линии на конец n -го года, полученный по формуле:

$$Z^0_n = Y_n w_n. \quad (13)$$

Рассмотрим задачу оптимизации кредитной линии по критерию максимума текущей стоимости собственного капитала инвестора [4]:

$$X = \sum_{t=0}^{n} \frac{q_t - p_t}{(1+i)^t} \to max . \quad (14)$$

Можно показать, что критерий (14) эквивалентен критерию [4]:

$$x = F(z, g) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(i - g')Z_t}{(1+i)^t} \to max . \quad (15)$$

Здесь z – n -мерный вектор с координатами:

$Z_t, t = 0, 1, ..., n.$

Таким образом, при условии положительного левереджа $i - g' > 0$ инвестор имеет на остатках заемных средствах маржу $i - g'$. Под $q_0 = -C < 0$ в [1] понимается начальные вложения капитала, складывающиеся из собственных средств инвестора $q_0 - p_0 < 0$ и стартового кредита $p_0 = -Y < 0$ в счет открытой кредитной линии. Предполагается, что выполнено условие, которое называется условием «консолидированных» затрат [1]:

$$q_t - p_t \ge 0; t = 1, 2, ..., n. \quad (16)$$

При выполнении этого условия величины q_t, p_t могут иметь произвольные знаки. В этом случае дополнительные вложения в проект делаются не за счет инвестора, а за счет новых кредитов.

При $t = 0$ должно выполняться ослабленное условие [4]:

$$q_0 - p_0 \ge -H. \quad (17)$$

Величина H интерпретируется в модели, как величина собственных средств. Согласно формуле (7) для платежей по кредитной линии условие (17) будет иметь вид (25) в новых переменных, а условие консолидированных затрат (16) принимает форму:

$$(1+g')Z_{t-1} - Z_t \le q_t, t = 1, 2, ..., n. \quad (18)$$

В [4] изучалась задача максимизации (15) с ограничениями (10, 11, 12, 18, 25).

План, построенный по формуле (9), позволяет поддерживать остаток долга на максимальном уровне. Аналогично тому, как это было сделано в [1], доказывается, что если план (9,12) удовлетворяет условиям (10) и (17), то он оптимален (оптимальность), а если не удовлетворяет, то не существует допустимых планов рассматриваемой задачи. При этом все составляющие любого другого допустимого плана Z' не превосходят соответствующих составляющих плана Z (доминирование):

$$Z'_t \le Z_t, t = 0, ..., n-1. \quad (19)$$

Если снять ограничения (10), то отрицательные значения остатков можно интерпретировать как величины остатков на депозитном счете с обратным знаком. Допуская возможность размещения временно свободных средств на депозитном счете, получим, следуя [1] задачу максимизации (15) с ограничениями (11, 12, 18, 25). В такой постановке допустимыми могут быть, например, проекты у которых $q_n < 0.$

Депозитная ставка r, вообще говоря, меньше кредитной:

$$r < g. \quad (20)$$

Формула (7), устанавливающая связь между платежами и остатками долга, будет иметь теперь вид:

$$Z_t = \begin{cases} (1+g')Z_{t-1} - p_t, Z_{t-1} \ge 0; \\ (1+r')Z_{t-1} - p_t, Z_{t-1} < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Можно показать, что критерий (14) эквивалентен в этом случае критерию [4]:

$$\sum_{t=0}^{n-1} \frac{(i-g')Z^+_t - (i-r')Z^-_t}{(1+i)^t} \to max . \quad (22)$$

Здесь

$$Z^+_t = max(0; Z_t), Z^-_t = max(0; -Z_t). \quad (23)$$

Эти величины представляют собой суть обязательства и требования. При выборе оптимального плана следует считать, что в любой момент времени либо обязательства в любой момент времени равны нулю. В противном случае в силу условия (20) фирма имела бы убытки, и такой план был бы не оптимальным. При таком предположении величина Z_0 означает либо остаток долга, если она положительна, либо накопленную сумму на депозите, если она отрицательна.

Вместо (9) используется рекуррентное уравнение [1]:

$$Z_{t-1} = \begin{cases} min\left(S_{t-1}; \dfrac{Z_t + q_t}{1+g'}\right); Z_t + q_t \ge 0; \\ \dfrac{Z_t + q_t}{1+r'}; Z_t + q_t < 0. \end{cases} \quad (24)$$

Здесь $t = n, ..., 1$.

Аналогично тому, как это было сделано в [1], доказывается, что если план (24,12) удовлетворяет условию (17), то он оптимален (оптимальность), а если не удовлетворяет, то не существует допустимых планов изучаемой задачи. При этом все составляющие любого другого допустимого плана Z' не превосходят соответствующих составляющих плана Z (доминирование).

В этом случае показателем минимальных затрат называется величина $q_0 + Z_0 - (1+g')Z^0_{-1}$ с обратным знаком. Для не пустоты множества допустимых планов в задаче с обобщенными условиями (18, 17) «консолидированных» затрат, таким образом необходимо и достаточно выполнения неравенства:

$$-H \le q_0 + Z_0 - (1+g')Z^0_{-1}. \quad (25)$$

Уравнение для оптимальных остатков Z^*_t по безлимитной кредитной линии будет иметь вид.

$$Z^*_{t-1} = \begin{cases} \dfrac{Z^*_t + q_t}{1+g'}; Z^*_t + q_t \geq 0; \\ \dfrac{Z^*_t + q_t}{1+r'}; Z^*_t + q_t < 0. \end{cases} \quad (26)$$

Величину S^* показателя минимального безлимитного объема кредитной линии можно определить как максимальное значение безлимитных остатков, определенных по формуле (26).

5. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

В таблице приведены расчеты, иллюстрирующие изучаемую методику. Исходные данные были выбраны исходя из следующих условий:

$n = 4, Y_n = 680$ **млн.руб.**, $C = 100$ **млн.руб.**,

$c = 20\%, i = 30\%, g = 14\%, r = 8\%, w_0 = 0{,}05,$

$w_n = 0{,}20, Z^0_{-1} = 5$ **млн.руб.**, $Z^0_n = w_n Y_n = 116,$

$S_t = 2w_t Y_t, t = 0, 1, ..., n.$

В пятой строке получены безлимитные остатки по формуле (26). Величина $S^* = 907$ **млн.руб.** показателя минимального безлимитного объема кредитной линии можно определена в 6-й строке. В 7-й строке получена величина показателя минимальных затрат $q_0 + Z_0 - (1+g')Z^0_{-1} = 1\,002$ **млн.руб.** с обратным знаком для безлимитных остатков. Значение показателя (14) для безлимитных остатков составило 781 млн. руб. (строка 10). Фактические значения доли заемного капитала показаны в строке 11. В расчете получилось, что доля заемного капитала по прогнозу [2] меняется от 2% до 20%, а с оптимизацией – от 50% до 20%, т.е. совсем не так, но вполне разумно (табл. 1).

Таблица 1

РАСЧЕТ ОСТАТКОВ ПО ВАРИАНТАМ

№	Наименование	Значения						
1	***t***, лет	-1	0	1	2	3	4	5
2	***wt*** по методике D&T	0,02	0,05	0,08	0,11	0,14	0,17	0,2
3	***qt***		100	255	295	275	250	-
4	***Yt***	583	1 688	1 514	1 237	956	680	-
5	***Z*t***	5	907	754	543	329	116	-
6	***S****	-	907	-	-	-	-	-
7	***Z * 0 + q0-(1 + g * 0)Z* - 1***	-	1002	-	-	-	-	-
8	***p*t*** (безлимитное)	-	-902	255	295	275	250	-
9	***qt - p * t*** (безлимитное)	-	1 002	0	0	0	0	-
10	***x * t*** (безлимитное)	578	781	760	693	626	564	-
11	***wt*** фактическое,%	0,86	53,74	49,79	43,93	34,44	17,05	-

6. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЕКТА: УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ

В этом параграфе показано, как исследовать устойчивость инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег на рынке, заданных кредитной и депозитными ставками g, r. Сначала рассмотрим однопараметрическую задачу максимизации (15) с ограничениями (10, 11, 12, 18, 25):

$$x^* = f(g) = \max_{z \in Z(g)} F(z, g). \quad (27)$$

Здесь $Z(g)$ – множество допустимых решений задачи.

Заметим, что задача (27) при заданном g, представляет собой задачу линейного программирования (ЛП) специального вида, типа задачи дискретного оптимального управления с интегральным функционалом. Таким образом, задача (27) является параметрической задачей ЛП специального вида, и текущая стоимость $f(g)$ проекта определена нами в (27) как функция связанно максимума [5] с учетом действующей на рынке средней стоимости заемных средств $g\%$, выделенных для финансирования аналогичных проектов. В момент заключения реального договора о предоставлении инвестору кредитной линии рыночная стоимость заемных средств может составить величину:

$$a = g + \Delta g,$$

где Δg – малый параметр, представляющий собой консолидированный процентный риск.

Необходимо исследовать устойчивость максимальной стоимости от заданного параметра. Если бы в точке $a = g$ функция (27) была бы дифференцируема, то поставленная задача свелась бы к нахождению дифференциала $df(g) = f'(g)\Delta g$ от стоимости (27). В самом деле, тогда было верно бы представление:

$$\Delta f(g) = f'(g)\Delta g + o(\Delta g), \quad (28)$$

где величина $o(\Delta g)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{o(\Delta g)}{\Delta g} \to 0, \Delta g \to 0. \quad (29)$$

Из (29) следовало бы, что справедливо приближенное равенство:

$$\Delta f(g) \approx f'(g)\Delta g. \quad (30)$$

И производную $f'(g)$ можно было бы интерпретировать, как коэффициент эластичности. Его величина и знак и определяли бы, какое изменение скорректированной стоимости проекта соответствовало бы малому изменению базовой ставки по кредитам. Вот статическая модель такого исследования. Динамическая, состоит в том, что параметр $a = g_t$ представляет собой функцию времени $t = 1, 2, ..., n,$ т.е. n – мерный вектор. Например, в договоре о кредитной линии предусмотрено возможность ежегодного изменения базовой ставки по кредитам, в случае изменения соответствующих ставок, действующих на рынке. В этом случае, следовало бы построить дифференциал функции n переменных:

$$df(g) = \langle f'(g), \Delta g \rangle, \quad (30.1)$$

где

$f'(g)$ – это вектор частных производных $f'_{g_t} = \partial f / \partial g_t$ функции f по переменным $g_t, t = 1, 2, ..., n,$ а $\langle a, b \rangle$ – скалярное произведение двух n-мерных векторов a, b.

Тогда частную производную f'_{g_t} можно было бы интерпретировать как коэффициент эластичности по параметру $a = g_t$. И все остальное осталось бы без изменения в предлагаемой модели исследования устойчивости.

К сожалению, функция $f(g)$ связанного максимума (27), вообще говоря, не дифференцируема (см., например, [6, 7]). Но она будет при определенных условиях дифференцируемой по любому направлению l в

n-мерном евклидовом пространстве E_n. Рассмотрим сначала модельный пример, когда функция $f(g)$, есть конечный максимум от дифференцируемых функций $f_k(g), k=1, 2, ..., m,$ с распадающимися переменными:

$$f(g)=\max_{k=1,2,...,m} f_k(g), \quad (31)$$

а потом вернемся к общему случаю. Тогда ее производная:

$$\partial f(g)/\partial l=\lim_{\lambda\to+0}\frac{f(g+\lambda l)-f(g)}{\lambda}, \quad (32)$$

по любому направлению l в n-мерном евклидовом пространстве E_n определяться формулой [2]:

$$\partial f(g)/\partial l=\max_{k\in N(g)}\langle f_k'(g),l\rangle, \quad (33)$$

где $N(g)$ – подмножество множества индексов $N=\{1,2,...,n\}$, в которых достигается максимум в (31). В [2] это множество в виду важности имеет специальное обозначение:

$$N(g)=\operatorname{Arg}\max_{k\in N} f_k(g). \quad (34)$$

Для производной по направлению (32) имеет место аналог соотношения (28):

$$\Delta_l f(g)=f(g+\lambda l)-f(g)=\lambda\frac{\partial f(g)}{\partial l}+o(\lambda), \quad (35)$$

где величина $o(\lambda)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{o(\lambda)}{\lambda}\to 0, \lambda\to+0, \quad (36)$$

равномерно по $l\in E_n, |l|=1.$ Здесь $|l|$ – норма вектора l в E_n. В частности при $l=\Delta g/|g|$ получим из (35):

$$\begin{aligned}f(g+\lambda l)-f(g)&=|\Delta g|\frac{\partial f(g)}{\partial l}+o(|\Delta g|)=\\&=|\Delta g|\max_{k\in N(g)}\left\langle f_k'(g),\frac{\Delta g}{|\Delta g|}\right\rangle+o(|\Delta g|)=\\&=\max_{k\in N(g)}\langle f_k'(g),\Delta g\rangle+o(|\Delta g|).\end{aligned} \quad (37)$$

Это позволяет нам назвать обобщенным дифференциалом функции максимума (31) выражение:

$$Df(g)=\max_{k\in N(g)}\langle f_k'(g),\Delta g\rangle. \quad (38)$$

Тогда частную производную $\partial f_k(g)/\partial g_t$ можно интерпретировать, как коэффициент эластичности по параметру $a=g_t$, но таких коэффициентов будет уже n, в отличие от случая дифференцируемой функции $f(g)$. При этом обобщенный дифференциал $Df(g)$ представляет собой, по сути, максимум из некоторых обычных дифференциалов $df_k(g)=\langle f_k'(g),\Delta g\rangle$. И все остальное осталось бы без изменений в предлагаемой модели исследования устойчивости.

Поскольку для дифференцируемых функций $f_k(g), k=1, 2, ..., m,$ справедлива формула [5]:

$$\partial f_k(g)/\partial l=\langle f_k'(g),l\rangle, k=1, 2, ..., m, \quad (39)$$

То формуле (33) можно придать вид:

$$\partial f(g)/\partial l=\max_{k\in N(g)}\partial f_k(g)/\partial l. \quad (40)$$

В таком виде формула (33) допускает обобщение на дифференцируемые по направлению функции $f_k(g), k=1, 2, ..., m.$ Например, тоже некоторые функции максимума. Это и понятно, поскольку тогда можно представить итоговую функцию $f(g)$ в форме единого максимума типа (31). Далее, все сказанное остается справедливым и для функции минимума, поскольку любой минимум можно представить как минус максимум от функций, взятых со знаком минус [5]. При этом оператор взятия максимума в (40), естественно, заменяется на оператор взятия минимума.

Таким образом, исследование устойчивости критерия сводится к задаче построения обобщенного дифференциала. Если это не удается в виду сложности множества, по которому берется максимум, то всегда можно ограничиться производными по направлениям $\partial f/\partial l_t$ по направлениям $l_t=+1,-1$ в направлении оси g_t, которые представляют собой как бы двухсторонний аналог частной производной $f_{g_t}'=\partial f/\partial g_t$. Их можно обозначить, соответственно, как $f_{g_t}^+=\partial f/\partial g_t^+$ и $f_{g_t}^-=\partial f/\partial g_t^-$. И соответствующей им форме обобщенного дифференциала по одной переменной:

$$d_{g_t}f(g)=f_{g_t}^+(g)\Delta g_t^+-f_{g_t}^-\Delta g_t^-, \quad (41)$$

Здесь по аналогии с (23) обозначено:

$$\Delta g_t^+=\max(0;\Delta g_t), \Delta g_t^-=\max(0;-\Delta g_t). \quad (42)$$

Для случая скалярного параметра $a=g$ это основная, интуитивно наиболее понятная, форма обобщения понятия дифференциала, и она будет иметь вид:

$$df(g)=f_g^+(g)\Delta g^+-f_g^-\Delta g^-. \quad (43)$$

7. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЕКТА: РЕАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Предположим, что множество допустимых решений $Z(g)$ задачи (27) не пусто и оптимальное решение $Z_t=Z_t(g), t=0, 1, ..., n-1,$ находится из рекуррентного уравнения (9). В силу единственности решения рекуррентного уравнения (9), задача (27) также имеет единственное решение $Z_t, t=0, 1, ..., n-1,$ и функция максимума $f(g)$ получается из общего выражения стоимости (15) проекта, подстановкой в него, полученного оптимального решения:

$$x^*=f(g)=\sum_{t=0}^{n-1}\frac{(i-g')Z_t(g)}{(1+i)^t}. \quad (44)$$

Предположим, что функции $Z_t=Z_t(g), t=0, 1, ..., n-1,$ дифференцируемы по любому направлению $l=+1,-1$ на прямой E_1 и обозначим их через $(Z_t)_g^+=\partial Z_t/\partial g^+$ и $(Z_t)_g^-=\partial Z_t/\partial g^-$ соответственно. Тогда, используя простейшие формулы, обобщающие на случай производных по направлениям известные формулы дифференциального исчисления, получим выражение для производных по направлениям $l=+1$ от функции $f(g)$:

$$f_g^+ = \partial f / \partial g^+ = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(i-g')'_g Z_t + (i-g')(Z_t)_g^+}{(1+i)^t} = \\ = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{-(1-c)Z_t + (i-g')(Z_t)_g^+}{(1+i)^t}. \quad (45)$$

Производные по направлению $(Z_t)_g^+ = \partial Z_t / \partial g^+$ здесь можно найти из рекуррентного уравнения, которое получается дифференцированием по этому же направлению уравнения (9) с использованием обобщенной формулы (40) для производной по направлению функции конечного максимума (минимума) с распадающимися переменными (далее – уравнение в вариациях):

$$(Z_{t-1})_g^+ = \begin{cases} \min\left(\begin{matrix} 0; \; ((Z_t)_g^+(1+g') - \\ -(Z_t+q_t)(1-c))/ \\ /(1+g')^2 \end{matrix}\right), \\ S_{t-1} = \dfrac{Z_t+q_t}{1+g'}; \\ 0, S_{t-1} < \dfrac{Z_t+q_t}{1+g'}; \\ \dfrac{(Z_t)_g^+(1+g') - (Z_t+q_t)(1-c)}{(1+g')^2}, \\ S_{t-1} > \dfrac{Z_t+q_t}{1+g'}, \\ t = n, n-1, \ldots, 1. \end{cases} \quad (46)$$

С граничным условием:

$$(Z_n)_g^+ = 0, \quad (47)$$

получающимся из конечного условия (12).

Заметим, что двигаясь от конца к началу в рекуррентном уравнении (46), можно последовательно доказать существование соответствующей производной по направлению, которое вначале лишь предполагалось.

Производные f_g^- по направлению $l = -1$ от функции $f(g)$ находятся из уравнения (45), где все плюсы в верхних индексах следует заменить на минусы. Производные по направлению $(Z_t)_g^- = \partial Z_t / \partial g^-$ находятся из уравнения (46), модифицированного таким же образом. Поэтому мы их здесь и не выписываем.

Вот статическая модель устойчивости. Динамическая, состоит в том, что параметр $a = g_t$ представляет собой функцию времени $t = 1, 2, \ldots, n,$ т.е. n-мерный вектор. В этом случае, следовало бы построить обобщенный дифференциал функции n переменных типа (38). Это гораздо более трудоемкая задача, решению которой авторы предполагают посвятить следующую работу в обозначенном направлении. Таким образом, исследование устойчивости критерия сводится к задаче построения обобщенного дифференциала. Если это не удается в виду сложности множества, по которому берется максимум, то приходится ограничиться производными по $f_{gt}^+ = \partial f / \partial g_t^+$ и $f_{gt}^- = \partial f / \partial g_t^-$. Для каждой из них можно выписать уравнения, аналогичные (45),(46). И соответствующую им форму обобщенного дифференциала по одной переменной (41). Например, для $f_{gk}^+ = \partial f / \partial g_k^+$ аналогом формулы (45) будет:

$$f_{gk}^+ = \partial f / \partial g_k^+ = \\ = \sum_{t=0}^{k-1} \frac{(i-g')'_g (Z_t)_{gk}^+}{(1+i)^t} + \\ + \frac{-(1-c)Z_k + (i-g'_k)(Z_k)_{gk}^+}{(1+i)^k}. \quad (48)$$

Производные по направлению $(Z_t)_{gk}^+ = \partial Z_t / \partial g_k^+$ здесь можно найти из рекуррентного уравнения, аналогичного (46):

$$(Z_{t-1})_{gk}^+ = \begin{cases} \min\left(0; \dfrac{(Z_t)_{gk}^+}{1+g'_t}\right), S_{t-1} = \dfrac{Z_t+q_t}{1+g'_t}; \\ 0, S_{t-1} < \dfrac{Z_t+q_t}{1+g'_t}; \\ \dfrac{(Z_t)_{gk}^+}{1+g'_t}, S_{t-1} > \dfrac{Z_t+q_t}{1+g'_t}, \\ t = k-1, \ldots, 1. \end{cases} \quad (49)$$

С граничным условием:

$$(Z_{k-1})_{gk}^+ = \begin{cases} \min\left(0; -\dfrac{(Z_k+q_k)(1-c)}{(1+g'_k)^2}\right), \\ S_{k-1} = \dfrac{Z_k+q_k}{1+g'_k}; \\ 0, S_{k-1} < \dfrac{Z_k+q_k}{1+g'_k}; \\ -\dfrac{(Z_k+q_k)(1-c)}{(1+g'_k)^2}, S_{k-1} > \dfrac{Z_k+q_k}{1+g'_k}. \end{cases} \quad (50)$$

получающимся дифференцированием рекуррентного уравнения (9), аналогично (49).

Совершенно аналогично решается вопрос об устойчивости максимального значения стоимости по кредитной ставке g в задаче максимизации (22) с ограничениями (11, 12, 18, 25). Или по депозитной ставке r. Задача исследования их совместного влияния на устойчивость это уже задача с векторным параметром и поэтому сводится к построению обобщенного дифференциала типа (38) от вектора отклонения $(\Delta g, \Delta r)$ и будет рассмотрена ввиду сложности в отдельной работе. Таким образом, даже в этом сравнительно простом случае двумерного векторного параметра, исследование устойчивости критерия сводится к задаче построения обобщенного дифференциала. Если это не удается в виду сложности множества, по которому берется максимум, то всегда можно ограничиться производными по направлениям $\partial f / \partial l$ по направлениям $l = +1, -1$ в направлении осей g, r, которые представляют собой как бы двухсторонний аналог частных производных $f'_g = \partial f / \partial g$, $f'_r = \partial f / \partial r$. И соответствующей им форме обобщенного дифференциала по каждой переменной типа (43).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что экстремальное значение стоимости проекта получается в результате решения задачи ЛП со связанными ограничениями. Поэтому, ее дифференцируемость по направлению впрямую доказать было бы не просто. Однако решение, если оно существует единственно и получается из рекуррентного уравнения содержащего базовые ставки, как параметры, и отягощенного оператором взятия минимума в правой части. Поэтому оно (уравнение) может быть продифференцировано по любому направлению и полученное уравнение будет по своей сути уравнением в вариациях относительно неизвестных производных от оптимального решения по тому же направлению. Если параметр один, как в базовой задаче, то это полностью решает задачу построения обобщенного дифференциала. Если же их хотя бы два, как во 2-й задаче, то это гораздо более сложная задача, и она может служить темой нашей следующей работы.

Таким образом, и экономическая сторона полученных результатов ясно просматривается, и предложенная математическая модель исследования устойчивости получилась нетривиальной. Так вышло, потому что математики с точки зрения устойчивости производные по направлению не рассматривали, а из них, как нам удалось показать, тоже можно соорудить нечто вроде дифференциала в силу равномерной сходимости нормированного остатка. Только он будет уже не линейной функцией приращения, а кусочно-линейной и выпуклой. Такова суть нашей работы, которая может стать полезной банковским аналитикам, а также служить основой для дальнейших теоретических исследований в области анализа рисков.

Литература

1. Беляков А.В. Об оптимизации использования заемных средств в ходе осуществления инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков // Финансы и кредит. – 1999. – №7. – С. 2-7.
2. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс [Текст] / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
3. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст] // Deloitte&Touche. – декабрь 2003 – март 2005.
4. Минченко Л.И. Дифференциальные свойства функции максимума при связанных ограничениях [Текст] / Л.И. Минченко // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1984. – Т. 24, №2. – С. 210-217.
5. Оценка бизнеса [Текст] : учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М. : Финансы и статистика. 2002.
6. Перевозчиков А.Г. Метод стохастического обобщенного градиента для решения минимаксных задач со связанными переменными [Текст] / А.Г. Перевозчиков, С.К. Завриев // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т. 30, №4. – С. 491-500.
7. Перевозчиков А.Г. Учет структуры капитала в моделях денежного потока для собственного и инвестированного капитала [Текст] / А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2006. – №1. – С.163-166.

Ключевые слова

Оценка бизнеса; рыночная стоимость; доходный подход; метод дисконтирования доходов; ставка дисконта; инвестированный капитал; структура инвестируемого капитала; стоимость денег; анализ рисков; коэффициент элластичности.

Беляков Александр Викторович

Перевозчиков Александр Геннадьевич

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта в форме кредитной линии. Известно, что денежный поток (ДП) на собственный капитал инвестора получается из ДП на инвестированный капитал путем учета дополнительно суммы выплат процентов по кредиту и изменения задолженности. Трудность практического применения модели ДП на собственный капитал инвестора связана с отсутствием удовлетворительных моделей прогнозирования задолженности в прогнозный период. Специалистами компании «Делой и Туш» было рекомендовано интерполировать структуру инвестируемого капитала в прогнозном периоде линейным образом. С равномерным изменением структуры от начального, фактического, уровня до целевого, определенного из анализа отрасли. Эта модель получила широкое распространение и на данный момент является основной. С другой стороны, использование модели «Делой и Туш» не позволяет оптимизировать финансирование ДП на собственный капитал. Поэтому возможны случаи, когда подсчитанная таким образом стоимость собственного капитала оказывается отрицательной, тогда как при оптимизации задолженности в прогнозный период она может стать положительной, как было показано ранее в работе А.В. Белякова.

В связи с этим в настоящей работе показано, как исследовать устойчивость инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег и как использовать полученные результаты для анализа рисков сопутствующих проекту. Показано, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки по сравнению с действующей по договору об открытии кредитной линии. Показано что, тем не менее, указанная функция является дифференцируемой по направлениям, и предложен способ их расчета. Полученные производные интерпретируются как коэффициенты эластичности в предложенной методике анализа рисков. Тем самым предложена новая методика анализа рисков, которая может использоваться финансовыми аналитиками, а также служить основой для соответствующих теоретических исследований.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.В. Белякова, А.Г. Перевозчикова может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н, профессор, проректор по научной работе Тверского института экологии и менеджмента, декан факультета экономики и менеджмента

8.7. INVESTMENT PROJECT STABILITY WITH RESPECT TO A POSSIBLE CASH VALUE CHANGE AND RISKS ANALISES

A.V. Belaykov, Candidate of Sciences (Technical), the Chief Systems Expert of PLC «Prime group» Branch in Tver;

A.G. Perevozchikov, Doctor of Sciences (Physical and Mathematical), the Professor of the Economics Department of tver Institute of Ecology and Law

The investigation task of investment project stability in respect to a possible cash value change is regarded. It is shown that in general case the value of the actual project capital is not the differentiated function of consolidated risk, expressed in the possible change of the market credit rate in comparison with the actual one, according to the contract of the opening the credit line. It is shown that the given function is differentiated in the directions and the method of their calculation is suggested.

Literature

1. Valuation of Business: A Manual. Edited by A.G.Gryaznova, M.A. Fedotova – M.: Finance and Statistics. – 2002.
2. Methodology and Manual on Conducting Valuation of Business and Assets of Public Limited Company «United Energy Systems of Russia.»- Deloitte & Touche. – Dec.2003-March 2005.
3. A.G. Perevozchikov. Calculation of Capital Structure in Cash Flow Models for Personal and Invested Capital. Audit and Financial Analises, 2006, №1, p. 163-166.
4. A.V. Belyakov. About Optimization of Borrowed Funds Use in Investing Project Realization. 1999, №7, p. 2-7.
5. V.F. Demyanov, V.N. Malozemov. The Main Editorial Office of Physical-mathematical literature of the Publishing House «Nauka», 1972, 368 p.
6. L.I. Minchenko. Differential Characteristics of Maximum Function at Connected Limits. Journal of Calculative Mathematics and Mathematical Physics, 1984, v.24, №2, p. 210-217.
7. A.G. Perevozchikov, S.K. Zavriev. The Method of Stochastic Summarized Gradient for Solving Minimax sums with Connected Variables. Journal of Calculative Mathematics and Mathematical Physics, 1990, v.30, №4, p. 491-500.

Keywords

Business assessment; market value; income approach; income discounting method; discount rate; invested capital; structure of invested rate; cash value; risks analysis; flexibility rate.