8. ПРОБЛЕМЫ ИНВЕСТИРОВАНИЯ

8.1. ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА В ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

Беляков А.В., к.т.н., ведущий системный аналитик ОАО «Прайм Групп», филиал в г. Тверь;
Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор кафедры финансов и менеджмента Тверского института экологии и права, академик РАЕН

Рассматривается задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта в форме кредитной линии. Стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки. Ранее авторами было доказано, что, тем не менее, указанная функция является дифференцируемой по направлениям, и была выявлена общая структура ее обобщенного дифференциала. На этой основе в предыдущей работе авторов были получены рекуррентные уравнения, позволяющие в явном виде построить обобщенный дифференциал, согласно общей методике. Однако эта конструкция оказалась довольно громоздкой, и в настоящей работе она оптимизируется в смысле сокращения числа перебираемых точек.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта в форме кредитной линии. Известно [6, 7], что денежный поток (ДП) Q_t на собственный капитал X_t инвестора получается из денежного потока q_t на инвестированный капитал Y_t путем учета дополнительно суммы выплат процентов по кредиту и изменения задолженности Z_t. Трудность практического применения модели ДП на собственный капитал инвестора связана с отсутствием удовлетворительных моделей прогнозирования задолженности Z_t в прогнозный период $t = 1,2,...,n.$ В [8] изучались проблемы учета структуры капитала в двух основных моделях ДП для собственного и инвестированного капитала с учетом рекомендации [7]. С другой стороны, использование модели дисконтирования ДП на инвестированный капитал не позволяет оптимизировать финансирование ДП на собственный капитал. Поэтому возможны случаи, когда подсчитанная таким образом стоимость собственного капитала оказывается отрицательной, тогда как при оптимизации задолженности Z_t в прогнозный период $t = 1,2,...,n$, она может стать положительной [3].

В работе [3] было показано, как смоделировать ДП на собственный капитал с учетом оптимизации остатков фактической задолженности Z_t с учетом оптимизации финансирования. В работе [4] нами исследована устойчивость инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег и показано, как использовать полученные результаты для анализа рисков сопутствующих проекту. Показано, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки по сравнению с действующей по договору об открытии кредитной линии. Было доказано что, тем не менее, указанная функция является дифференцируемой по направлениям [5], и предложен способ расчета соответствующих производных. Если параметр один, то это полностью решает задачу построения обобщенного дифференциала. Если же параметр является векторной величиной, то это гораздо более сложная задача, и она изучается в работе [2], в которой была выявлена общая структура обобщенного дифференциала в однопараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта. На этой основе в работе [1] были получены рекуррентные уравнения, позволяющие в явном виде построить обобщенный дифференциал согласно общей методике [2]. Однако эта конструкция оказалась довольно громоздкой и в настоящей работе мы пытаемся ее оптимизировать в смысле сокращения числа перебираемых точек для каждого $t = 1,2,..., n.$

Такова суть нашей новой работы, которая может стать полезной банковским аналитикам, а также служить основой для дальнейших теоретических исследований в области анализа рисков.

1. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ КРЕДИТНОЙ ЛИНИИ

Предположим, что финансирование проекта осуществляется в форме предоставления заемщиком кредитной линии на весь срок действия проекта. Обозначим через $Z_t, t = 0,1,2,..., n,$ прогнозную величину заемного капитала на конец t-го года.

Платежи p_t по кредитной линии включающую проценты и часть основного долга можно представить в виде [4]:

$$p_t = Z_{t-1}g(1-c) - Z_t + Z_{t-1} = \\ = Z_{t-1}(1+g') - Z_t, t = 0,1,...,n. \quad (1)$$

Здесь обозначено для краткости:

$g' = g(1-c),$

где c – ставка налога на прибыль.

Остаток долга должен находится в пределах [4]:

$$0 \le Z_t, t = 0,1,..., n; \quad (2)$$

$$Z_t \le S_t, t = 0,1,..., n. \quad (3)$$

В отличие от [3] в [4] мы допускали переменный объем кредитной линии $S = S_t, t = 0,1,..., n,$ и ненулевые начальные и конечные значения остатков, необходимых для расчета платежей по формуле (1):

$$Z_{-1} = Z^0_{-1}, Z_n = Z^0_n. \quad (4)$$

Здесь Z^0_{-1} – фактический остаток долга на начало нулевого года прежнего владельца проекта, в отличие от планируемого остатка Z_0 – нового владельца. Он нужен для расчета платежа p_0 по формуле (1), а Z^0_n – планируемый остаток по кредитной линии на конец n -го года.

Пусть q_t – прогноз денежного потока на инвестированный капитал на конец t - го года. Обозначим через i – подходящую ставку дисконта на собственный капитал и рассмотрим задачу оптимизации кредитной линии по критерию максимума текущей стоимости собственного капитала инвестора [3]:

$$X = \sum_{t=0}^{n} \frac{q_t - p_t}{(1+i)^t} \to max . \quad (5)$$

Можно показать, что критерий (5) эквивалентен критерию [3]:

$$x = F(z,g) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(i-g')Z_t}{(1+i)^t} \to max. \qquad (6)$$

Здесь z – n - мерный вектор с координатами $Z_t, t = 0,1,..., n.$

Таким образом, при условии положительного левериджа $i - g' > 0$ инвестор имеет на остатках заемных средствах маржу $i - g'$. Под $q_0 = -C < 0$ в [3] понимается начальные вложения капитала, складывающиеся из собственных средств инвестора $q_0 - p_0 < 0$ и стартового кредита $p_0 = -Y < 0$ в счет открытой кредитной линии. Предполагается, что выполнено условие, которое называется условием «консолидированных» затрат [3]:

$$q_t - p_t \geq 0; t = 1,2,..., n. \qquad (7)$$

При выполнении этого условия величины q_t, p_t могут иметь произвольные знаки. В этом случае дополнительные вложения в проект делаются не за счет инвестора, а за счет новых кредитов.

При $t = 0$ должно выполняться ослабленное условие [3]:

$$q_0 - p_0 \geq -H. \qquad (8)$$

Величина H интерпретируется в модели, как величина собственных средств. Согласно формуле (1), для платежей по кредитной линии условие (8) будет иметь вид (11) в новых переменных, а условие консолидированных затрат (7) принимает форму:

$$(1+g')Z_{t-1} - Z_t \leq q_t, t = 1,2,..., n. \qquad (9)$$

В [3] изучалась задача максимизации (6) с ограничениями (2, 3, 4, 9, 11).

План, построенный по формуле [3]:

$$Z_{t-1} = min\left(S_{t-1}; \frac{Z_t + q_t}{1+g'}\right), t = n,...,1, \qquad (10)$$

обеспечивает выполнение условия консолидированных затрат (9), условия (3) по максимальному объему кредитной линии, и при этом позволяет поддерживать остаток долга на максимальном уровне. Аналогично тому, как это было сделано в [3] доказывается, что если план (4, 10) удовлетворяет условиям (2) и (11), то он оптимален (оптимальность), а если не удовлетворяет, то не существует допустимых планов рассматриваемой задачи. При этом все составляющие любого другого допустимого плана Z' не превосходят соответствующих составляющих плана Z (доминирование):

$$Z'_t \leq Z_t, t = 0,..., n-1.$$

Для не пустоты множества допустимых планов в задаче с обобщенными условиями (8) «консолидированных» затрат, таким образом, необходимо и достаточно выполнения неравенства:

$$-H \leq q_0 + Z_0 - (1+g')Z^0_{-1}. \qquad (11)$$

2. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЕКТА: ОБЩАЯ СХЕМА

В [4] была предложена общая схема исследования устойчивости инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег на рынке, заданных кредитной ставкой g. Рассмотрим однопараметрическую задачу максимизации (6) с ограничениями (2, 3, 4, 9, 11):

$$x^* = f(g) = \max_{z \in Z(g)} F(z,g). \qquad (12)$$

Здесь $Z(g)$ – множество допустимых решений задачи.

Заметим, что задача (12) при заданном g, представляет собой задачу линейного программирования (ЛП) специального вида, типа задачи дискретного оптимального управления с интегральным функционалом. Таким образом, задача (12) является параметрической задачей ЛП специального вида, и текущая стоимость $f(g)$ проекта определена нами в [5] как функция максимума со связанными переменными с учетом действующей на рынке средней стоимости заемных средств $g\%$, выделенных для финансирования аналогичных проектов. В момент заключения реального договора о предоставлении инвестору кредитной линии рыночная стоимость заемных средств может составить величину :

$$a = g + \Delta g,$$

где Δg – малый параметр, представляющий собой консолидированный процентный риск.

Необходимо исследовать устойчивость максимальной стоимости от заданного параметра. Если бы в точке $a = g$ функция (12) была бы дифференцируема, то поставленная задача свелась бы к нахождению дифференциал $df(g) = f'(g)\Delta g$ от стоимости (12). В самом деле, тогда было верно бы представление:

$$\Delta f(g) = f'(g)\Delta g + o(\Delta g), \qquad (13)$$

где величина $o(\Delta g)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{o(\Delta g)}{\Delta g} \to 0, \Delta g \to 0. \qquad (14)$$

Из (14) следовало бы, что справедливо приближенное равенство:

$$\Delta f(g) \approx f'(g)\Delta g.$$

И производную $f'(g)$ можно было бы интерпретировать, как коэффициент эластичности. Его величина и знак и определяли бы, какое изменение скорректированной стоимости проекта соответствовало бы малому изменению базовой ставки по кредитам. Вот статическая модель такого исследования. Динамическая, состоит в том, что параметр $a = g_t$ представляет собой функцию времени $t = 0,1,..., n,$ т.е. $(n+1)$ - мерный вектор. Например, в договоре о кредитной линии предусмотрено возможность ежегодного изменения базовой ставки по кредитам, в случае изменения соответствующих ставок, действующих на рынке. В этом случае, следовало бы построить дифференциал функции n переменных:

$$df(g) = \langle f'(g), \Delta g \rangle, \qquad (15)$$

где

$f'(g)$ – это вектор частных производных $f'_{g_t} = \partial f / \partial g_t$ функции f по переменным $g_t, t = 0,1,..., n,$ а $\langle a, b \rangle$ – скалярное произведение двух n - мерный векторов a, b. Тогда частную производную f'_{g_t} можно было бы интерпретировать, как коэффициент эластичности по параметру $a = g_t$. И все остальное осталось бы без изменения в предлагаемой модели исследования устойчивости.

К сожалению, функция $f(g)$ связанного максимума (12), вообще говоря, не дифференцируема [5]. Но она будет при определенных условиях дифференцируемой по любому направлению l в $(n+1)$ - мерном евклидовом пространстве E_{n+1}. Рассмотрим сначала модельный пример, когда функция $f(g)$, есть конечный максимум от дифференцируемых функций $f_k(g), k=1,2,...,m,$ с распадающимися переменными:

$$f(g) = \max_{k=1,2,...,m} f_k(g), \qquad (16)$$

а потом вернемся к общему случаю. Тогда ее производная:

$$\partial f(g)/\partial l = \lim_{\lambda\to+0}\frac{f(g+\lambda l)-f(g)}{\lambda}, \qquad (17)$$

по любому направлению l в $(n+1)$ - мерном евклидовом пространстве E_{n+1} определятся формулой [5]:

$$\partial f(g)/\partial l = \max_{k\in M(g)}\langle f'_k(g), l\rangle, \qquad (18)$$

где $M(g)$ – подмножество множества индексов $M=\{1,2,...,n\}$, в которых достигается максимум в (16-21). В [5] это множество в виду важности имеет специальное обозначение:

$$M(g)=\underset{k\in M}{Arg\max} f_k(g). \qquad (19)$$

Для производной по направлению (17) имеет место аналог соотношения (13) [5]:

$$\Delta_l f(g) = f(g+\lambda l)-f(g) = \lambda\frac{\partial f(g)}{\partial l}+o(\lambda), \qquad (20)$$

где величина $o(\lambda)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{o(\lambda)}{\lambda}\to 0, \lambda\to+0, \qquad (21)$$

Равномерно по $l\in E_{n+1}, |l|=1.$ Здесь $|l|$ – норма вектора l в E_{n+1}. В частности при $l=\Delta g/|g|$ получим из (20):

$$\begin{aligned} f(g+\lambda l)-f(g) &= |\Delta g|\frac{\partial f(g)}{\partial l}+o(|\Delta g|) = \\ &= |\Delta g|\max_{k\in M(g)}\left\langle f'_k(g), \frac{\Delta g}{|\Delta g|}\right\rangle + o(|\Delta g|) = \\ &= \max_{k\in M(g)}\langle f'_k(g), \Delta g\rangle + o(|\Delta g|). \end{aligned} \qquad (22)$$

Это позволяет нам назвать обобщенным дифференциалом функции максимума (16) выражение:

$$Df(g) = \max_{k\in M(g)}\langle f'_k(g), \Delta g\rangle. \qquad (23)$$

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$|\,|\langle f'_k(g), \Delta g\rangle\,| \le |f'_k(g)|\cdot|\Delta g|,$$

из (23) следует неравенство:

$$\begin{aligned} -\min_{k\in M(g)}|f'_k(g)|*|\Delta g| &\le Df(g) \le \\ &\le \max_{k\in M(g)}|f'_k(g)|*|\Delta g|. \end{aligned} \qquad (24)$$

Введем обозначения:

$$K_0 = K_0(g) = \min_{k\in M(g)}|f'_k(g)|, \qquad (25)$$

$$K_1 = K_1(g) = \max_{k\in M(g)}|f'_k(g)|.$$

Тогда неравенство (24) можно записать в следующем виде:

$$-K_0|\Delta g| \le Df(g) \le K_1|\Delta g|. \qquad (26)$$

Величины (25) можно интерпретировать, как два обобщенных коэффициента эластичности – верхний и нижний – по векторному параметру $a=g$, но уже в ослабленном смысле неравенства (26). Эти коэффициенты имеют ясный геометрический смысл и представляют собой, соответственно, минимум и максимум нормы градиентов функций, доставляющих при данном g максимум в (16). При этом обобщенный дифференциал $Df(g)$ представляет собой, по сути, максимум из некоторых обычных дифференциалов $df_k(g)=\langle f'_k(g), \Delta g\rangle$. И все остальное остается без изменений в предлагаемой модели исследования устойчивости.

Поскольку для дифференцируемых функций $f_k(g), k = 1,2,...,m,$ справедлива формула:

$$\partial f_k(g)/\partial l = \langle f'_k(g), l\rangle, k=1,2,...,m, \qquad (27)$$

То формуле (23) можно придать вид:

$$\partial f(g)/\partial l = \max_{k\in N(g)}\partial f_k(g)/\partial l. \qquad (28)$$

В таком виде формула (27) допускает обобщение на дифференцируемые по направлению функции $f_k(g), k = 1,2,...,m.$ Например, тоже некоторые функции максимума от дифференцируемых функций. Это и понятно, поскольку тогда можно представить итоговую функцию $f(g)$ в форме единого максимума типа (16).

Далее, следует отметить, что все сказанное остается справедливым и для функции минимума, поскольку любой минимум можно представить как минус максимум от функций, взятых со знаком минус [4]. При этом оператор взятия максимума в (27), естественно, заменяется на оператор взятия минимума.

Таким образом, исследование устойчивости критерия сводится к задаче построения обобщенного дифференциала.

3. ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА: ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Предположим, что множество допустимых решений $Z(g)$ задачи (6) не пусто и оптимальное решение $Z_t = Z_t(g), t=0,1,...,n-1,$ находится из рекуррентного уравнения (10). В силу единственности решения рекуррентного уравнения (10), которое для векторного параметра $g\in E_n$ принимает вид:

$$Z_{t-1} = \min\left(S_{t-1}; \frac{Z_t+q_t}{1+g'_t}\right), t=n,...,1, \qquad (29)$$

с конечным условием (4):

$$Z_n = Z_n^0,$$

задача (6) также имеет единственное решение $Z_t, t = 0,1,...,n-1,$ и функция максимума $f(g)$ получается из общего выражения (6), подстановкой в него, полученного оптимального решения:

$$x^* = f(g) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(i - g_t')Z_t(g)}{(1+i)^t}. \qquad (30)$$

Заметим, что функция под знаком минимума в (29) является дифференцируемой по $g_t, t = 0,1,..., n,$ и следовательно по $g \in E_{n+1}$. Отправляясь от граничного условия (4), нетрудно доказать методом математической индукции по $t = n,...,0,$ что функция $Z_t = Z_t(g)$ является минимумом из $n - t + 1$ функции, обладающей таким же свойством. То есть дифференцируемых по $g \in E_{n+1}$ функций.

Итак, мы убедились, что все функции $Z_t = Z_t(g), t = 0,1,..., n,$ являются слабо вогнутыми по $g \in E_n$ функциями. Коэффициент $i - g'$ в выражении (30), представляющий положительную дифференцируемую функцию, можно мысленно внести под знак минимума, если бы мы подставили в (30) выражение для $Z_t = Z_t(g)$, полученное согласно последнему утверждению. Тогда критерий (30) стал бы суммой слабо вогнутых функций $f_t(g)$ конечных минимумов и следовательно сам является слабо вогнутым. Тем самым установлена слабая вогнутость критерия (30), которому всегда можно придать форму [7]:

$$x^* = f(g) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k=1,...,n-t+1} f_k^t(g), \qquad (31)$$

где все функции:

$$f_k^t(g), k \in K^t = \{1,..., n - t + 1\}, t = 0,1,..., n,$$

являются дифференцируемыми в положительном ортанте E_{n+1}^+ пространства E_{n+1}. Можно было бы выписать их в явном виде, но для нас важнее показать в данном случае, как строится обобщенный дифференциал.

В соответствии с формулами (43, 44) в [2], которые остаются с соответствующими изменениями справедливыми и для слабо вогнутых функций, квазидифференциал функции (31) будет иметь вид:

$$Df(g) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k \in K^t(g)} \langle \nabla f_k^t(g), \Delta g \rangle, \qquad (32)$$

где

$$K^t(g) = \operatorname{Arg} \min_{k \in K^t} f_k^t(g),$$

Для построенного обобщенного дифференциала слабо вогнутой функции $f(g)$ имеет место неравенство (26-31):

$$-K_0 |\Delta g| \le Df(g) \le K_1 |\Delta g|.$$

Величины обобщенных коэффициентов эластичности – верхний и нижний – по векторному параметру $a = g$, но уже в ослабленном смысле неравенства (26), можно подсчитать по формулам [2]:

$$K_0(g) = \sum_{t=0}^{n-1} \max_{k \in K^t(g)} |\nabla f_k^t(g)|, \qquad (33)$$

$$K_1(g) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k \in K^t(g)} |\nabla f_k^t(g)|. \qquad (34)$$

Как видим, они и в этом случае не совпадают, что обобщает известный эффект для однопараметрической задачи, отмеченный в литературе, имеющий место в силу возможного несовпадения левой и правой производной по направлению для не дифференцируемых функций одной переменной.

4. ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА: УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ $f_k^t(g)$ И ИХ ГРАДИЕНТОВ

В предыдущем пункте фактически было установлено, что:

$$Z_t = \min\left(\bar{f}_k^t(g), k = 1,..., n - t + 1\right), t = n,...,0, \qquad (35)$$

где все функции $\bar{f}_k^t(g), k \in K^t = \{1,..., n - t + 1\}, t = 0,1,..., n,$ являются дифференцируемыми в положительном ортанте E_{n+1}^+ пространства E_{n+1}. Функции $f_k^t(g)$ в (31-36) связаны с функциями $\bar{f}_k^t(g)$ соотношением

$$f_k^t(g) = (i - g_t')\bar{f}_k^t(g). \qquad (36)$$

Поэтому для получения функций $f_k^t(g)$ достаточно уметь строить функции $\bar{f}_k^t(g)$, вернее их градиенты $\nabla \bar{f}_k^t(g)$, поскольку в общей формуле (32) для обобщенного дифференциала функции связанного максимума в однопараметрической задаче оптимизации инвестиционных проектов фигурируют только градиенты $\nabla f_k^t(g)$ функций $f_k^t(g)$. Поэтому выведем сначала рекуррентные уравнения для функций $\bar{f}_k^t(g)$, а затем дифференцируя их получим рекуррентные уравнения в вариациях для их градиентов $\nabla \bar{f}_k^t(g)$.

Подставляя выражение (35) для Z_t последовательно в конечное условие (4) и рекуррентное уравнение (29), получим

$$\bar{f}_1^n(g) \equiv Z_n^0, \qquad (37)$$

$$\begin{aligned} Z_{t-1} &= \min\left(S_{t-1}, \min_{k=1,...,n-t+1} \frac{\bar{f}_k^t(g) + q_t}{1 + g_t'}\right) = \\ &= \min_{k=1,...,(n-t+1)+1} \bar{f}_k^t(g). \end{aligned} \qquad (38)$$

Это уравнение будет выполняться, если положить, например:

$$\bar{f}_k^{t-1} = \begin{cases} \dfrac{\bar{f}_k^t(g) + q_t}{1 + g_t'}, k = 1,..., n - t + 1, \\ S_{t-1}, k = (n - t + 1) + 1, \end{cases} t = n,...,1. \qquad (39)$$

Полученное таким образом рекуррентное уравнение позволяет найти последовательно, по крайней мере, в числах, значения всех функций $\bar{f}_k^t(g)$ при заданном $g \in E_n^+$, отправляясь от конечного условия (37).

Беря от обеих частей (36) градиенты, которые для определенности будем считать вектор- столбцами, и воспользовавшись формулой производная произведения, получим

$$\nabla f_k^t(g) = -e_t(1 - c)\bar{f}_k^t(g) + (i - g_t')\nabla \bar{f}_k^t(g). \qquad (40)$$

Здесь e_t – вектор-столбец пространства E_{n+1} у которого все координаты равны нулю, кроме t-й, которая равна единице. Напомним, что c здесь представляет собой действующую ставку налога на прибыль.

Беря от обеих частей (39) градиенты и воспользовавшись формулой производная произведения, получим:

$$\nabla \bar{f}_k^{t-1} = \begin{cases} -e_t(1-c)\dfrac{\bar{f}_k^t(g)+q_t}{(1+g_t')^2} + \\ +\dfrac{1}{1+g_t'}\nabla \bar{f}_k^t(g), \quad t = n,...,1. \\ k = 1,...,n-t+1, \\ \vec{0}, k = (n-t+1)+1, \end{cases} \qquad (41)$$

Здесь $\vec{0}$ – вектор- столбец пространства E_{n+1} у которого все координаты равны нулю.

Конечное условие для рекуррентного уравнения (41) получается из (37)

$$\nabla \bar{f}_1^n(g) \equiv \vec{0}. \qquad (42)$$

Если g – скалярный параметр, т.е. все $g_t \equiv g$, то уравнения (40-42) останутся справедливыми, если в них градиенты заменить на производную по g.

5. ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА ТОЧЕК ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

В пункте 3 было установлено, что:

$$x^* = f(g) = \sum_{t=0}^{n-1} f_t(g), \qquad (43)$$

$$f_t(g) = \min_{k=1,...,n-t+1} f_k^t(g), \qquad (44)$$

где функции $f_k^t(g)$ в (44) связаны с функциями $\bar{f}_k^t(g)$ в (35):

$$Z_t = \min\left(\bar{f}_k^t(g), k = 1,...,n-t+1\right), t = n,...,0,$$

соотношением (36):

$$f_k^t(g) = (i - g_t')\bar{f}_k^t(g).$$

По аналогии с множеством:

$$K^t(g) = \operatorname*{Arg\,min}_{k \in K^t} f_k^t(g),$$

рассмотрим множество

$$\bar{K}^t(g) = \operatorname*{Arg\,min}_{k \in K^t} \bar{f}_k^t(g).$$

Поскольку величины $i - g_t' > 0$ по условию положительного левереджа, то из сравнения (35) и (44) видно, что эти множества совпадают:

$$K^t(g) \equiv \bar{K}^t(g), t = n,...,0. \qquad (45)$$

Далее, из уравнения (38)

$$Z_{t-1} = \min\left(S_{t-1}, \min_{k=1,...,n-t+1} \frac{\bar{f}_k^t(g)+q_t}{1+g_t'}\right) =$$

$$= \min_{k=1,...,(n-t+1)+1} \bar{f}_k^t(g),$$

В силу монотонности по $\bar{f}_k^t(g)$ функции под знаком второго минимума отсюда с учетом (39):

$$\bar{f}_k^{t-1} = \begin{cases} \dfrac{\bar{f}_k^t(g)+q_t}{1+g_t'}, k = 1,...,n-t+1, \\ S_{t-1}, k = (n-t+1)+1, \end{cases} t = n,...,1,$$

следует, что:

$$K^{t-1}(g) \subseteq K^t(g) \cup \{n-(t-1)+1\}, t = n,...,1. \qquad (46)$$

Таким образом, для построения множества $K^{t-1}(g)$ на t-м шаге, $t = n,...,1,$ достаточно проверить только точки множества в правой части включения (46). Соответственно, (39) можно заменить на рекуррентное уравнение, предполагающее сокращенный перебор точек на t-м шаге:

$$\bar{f}_k^{t-1} = \begin{cases} \dfrac{\bar{f}_k^t(g)+q_t}{1+g_t'}, k \in K^t(g), \\ S_{t-1}, k = (n-t+1)+1, \end{cases} t = n,...,1, \qquad (47)$$

В частности, если множества $K^t(g)$ состоят из одной точки, то на каждом шаге в (39) остается рассмотреть лишь по две точки.

Полученное таким образом «прореженное» рекуррентное уравнение (47) позволяет найти последовательно, по крайней мере, в числах, значения всех функций $\bar{f}_k^t(g), k \in K^t(g)$ при заданном $g \in E_n^+$, отправляясь от конечного условия (37):

$$\bar{f}_1^n(g) \equiv Z_n^0,$$

Беря от обеих частей (47) градиенты и воспользовавшись формулой производная произведения, получим аналогично «прореженное» уравнение (41):

$$\nabla \bar{f}_k^{t-1} = \begin{cases} -e_t(1-c)\dfrac{\bar{f}_k^t(g)+q_t}{(1+g_t')^2} + \\ +\dfrac{1}{1+g_t'}\nabla \bar{f}_k^t(g), k \in K^t(g), t = n,...,1. \\ \vec{0}, k = (n-t+1)+1, \end{cases} \qquad (48)$$

Конечным условием для рекуррентного уравнения (48) остается равенство (42):

$$\nabla \bar{f}_1^n(g) \equiv \vec{0}.$$

Для связи градиентов функций $f_k^t(g)$ с функциями $\bar{f}_k^t(g)$ в формуле для обобщенного градиента (32):

$$Df(g) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k \in K^t(g)} \langle \nabla f_k^t(g), \Delta g \rangle.$$

Остается условие (40):

$$\nabla f_k^t(g) = -e_t(1-c)\bar{f}_k^t(g) + (i - g_t')\nabla \bar{f}_k^t(g),$$

которое используется только при $k \in K^t(g)$ на каждом шаге и в этом смысле тоже является «прореженным».

6. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Рассмотрим пример расчета коэффициентов эластичности из [1] для случая скалярного параметра g по сокращенной, «прореженной» схеме, предложенной в предыдущем пункте. Исходные данные представлены в следующей табл. 1.

Таблица 1

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Параметр	c	i	n
Значение	0,2	0,4	3
Параметр	Δg	S_0	q_1
Значение	0,01	62,13	50
Параметр	g	S_1	q_2
Значение	0,375	40	20
Параметр	Z_3^0	S_2	q_3
Значение	0	20	30

Расчет функции $f_k^t(g)$ по формулам (45, 42, 44) представлен в табл. 2. Здесь для простоты обозначено $\bar{f}_k^t(g) = F_{k,t}(g)$, $f_k^t(g) = f_{k,t}(g)$.

Таблица 2

РАСЧЕТ ФУНКЦИИ $f_k^t(g)$ ПО ФОРМУЛАМ (41, 42, 44)

t	3	2	1	0	f(g)
$F_{1,3}(g)$	0	-	-	-	-
$F_{1,2}(g)$	-	23,08	-	-	-
$F_{2,2}(g)$	-	20,00	-	-	-
$K^2(g)$	-	2	-	-	-
$F_{1,1}(g)$	-	-	33,14	-	-
$F_{2,1}(g)$	-	-	30,77	-	-
$F_{3,1}(g)$	-	-	40,00	-	-
$K^1(g)$	-	-	2	-	-
$F_{1,0}(g)$	-	-	-	63,95	-
$F_{2,0}(g)$	-	-	-	62,13	-
$F_{3,0}(g)$	-	-	-	69,23	-
$F_{4,0}(g)$	-	-	-	62,13	-
$K^0(g)$	-	-	-	2,4	-
$f_{1,3}(g)$	-	-	-	-	-
$f_{1,2}(g)$	-	2,31	-	-	-
$f_{2,2}(g)$	-	2,00	-	-	-
$K^2(g)$	-	2	-	-	-
$f_{1,1}(g)$	-	-	3,31	-	-
$f_{2,1}(g)$	-	-	3,08	-	-
$f_{3,1}(g)$	-	-	4,00	-	-
$K^1(g)$	-	-	2	-	-
$f_{1,0}(g)$	-	-	-	6,40	-
$f_{2,0}(g)$	-	-	-	6,21	-
$f_{3,0}(g)$	-	-	-	6,92	-
$f_{4,0}(g)$	-	-	-	6,21	-
$K^0(g)$	-	-	-	2,4	-
$f_t(g)$	-	2,00	3,08	6,21	11,29

Расчет функции $\partial f_k^t(g)/\partial g$ по формулам (45)-(47) представлен в табл. 3. Здесь для простоты обозначено $\partial \bar{f}_k^t(g)/\partial g = F*_{k,t}(g)$, $\partial f_k^t(g)/\partial g = f*_{k,t}(g)$.

Таблица 3

РАСЧЕТ ФУНКЦИИ $\partial f_k^t(g)/\partial g$ ПО ФОРМУЛАМ (45-47)

t	3	2	1	0
$F*_{1,3}(g)$	0	-	-	-
$F*_{1,2}(g)$	-	-14,20	-	-
$F*_{2,2}(g)$	-	0	-	-
$K^2(g)$	-	2	-	-
$F*_{2,1}(g)$	-	-	-18,93	-
$F*_{3,1}(g)$	-	-	0	-
$K^1(g)$	-	-	2	-
$F*_{2,0}(g)$	-	-	-	-18,39
$F*_{4,0}(g)$	-	-	-	0
$K^0(g)$	-	-	-	2,4
$f*_{1,3}(g)$	0	-	-	-
$f*_{2,2}(g)$	-	-16,00	-	-
$K^2(g)$	-	2	-	-
$f*_{2,1}(g)$	-	-	-26,45	-
$K^1(g)$	-	-	2	-
$f*_{2,0}(g)$	-	-	-	-51,54
$f*_{4,0}(g)$	-	-	-	-49,70
$K^0(g)$	-	-	-	2,4
$f*_{k,t}(g)$, $k \in K^t(g)$	-	-16,00	-26,45	(-51,54; -49,70)

Расчет коэффициентов эластичности $K_0(g), K_1(g)$ по формулам (38, 39) представлен в табл. 4. Здесь для простоты обозначено:

$$\partial f_k^t(g)/\partial g = f*_{k,t}(g),\ mod\, f*_{k,t}(g) = |\, f*_{k,t}(g)\,|.$$

Таблица 4

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛАСТИЧНОСТИ $K_0(g), K_1(g)$ ПО ФОРМУЛАМ (38, 39)

t	2	1	0	$K_m(g)$, m = 0,1	$K_m(g)\,\Delta g$	f(g)+- $K_m(g)\,\Delta g$
$f*_{k,t}(g)$, $k \in K^t(g)$	-16,00	-26,45	(-51,54; -49,70)	-	-	-
mod $f*_{k,t}(g)$	16,00	26,45	(51,54; 49,70)	-	-	-
Max mod $f*_{k,t}(g)$	16,00	26,45	51,54	94,00	0,94	10,35
Min mod $f*_{k,t}(g)$	16,00	26,45	49,70	92,16	0,92	12,21

В последних трех столбцах табл. 4 вычислены соответственно коэффициенты эластичности $K_0(g) = 94{,}00;$ $K_1(g) = 92{,}16$, приращения $K_0(g)\Delta g = 0{,}94;$ $K_1(g)\Delta g = 0{,}92$ при $\Delta g = 0{,}01 = 1\%$ в левой и правой части неравенства (31), и вытекающий из него диапазон возможных значений $[f(g) - K_0(g)\Delta g, f(g) + K_1(g)\Delta g]$ функции $f(g + \Delta g)$ с точностью до малых порядка $o(\Delta g)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что в настоящей работе конструкция обобщенного дифференциала функции связанного максимума в однопараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта доведена до алгоритмов, в которых предварительно отсеяны заведомо лишние точки. Это делает предложенную методику анализа рисков практически значимой и оптимальной в смысле сложности вычислений и может быть полезно практикующим оценщикам и банковским аналитикам, специализирующихся на оценке предлагаемых банку инвестиционных проектов.

Беляков Александр Викторович
E-mail: belyakov av@tvcom.ru

Перевозчиков Александр Геннадьевич
E-mail: ailesik@mail.ru

Литература

1. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в однопараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2011. – №2. – С. 242-247.
2. Беляков А.В. К устойчивости инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2010. – №3. – С. 291-299.
3. Беляков А.В. Об оптимизации использования заемных средств в ходе осуществления инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков // Финансы и кредит. – 1999. – №7.
4. Беляков А.В. Устойчивость инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег и анализ рисков [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2010. – №2. – С. 299-305.
5. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс [Текст] / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
6. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и/или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст] // Deloitte&Touche. – Декабрь 2003 – март 2005.
7. Оценка бизнеса [Текст] : учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М. : Финансы и статистика, 2002.
8. Перевозчиков А.Г. Учет структуры капитала в моделях денежного потока для собственного и инвестированного капитала [Текст] / А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2006. – №1. – С. 163-166.

Ключевые слова

Оценка инвестиционных проектов; стоимость собственного капитала; оптимизация финансирования проекта; стоимость денег; анализ рисков; обобщенный дифференциал стоимости собственного капитала как функции рисков; сложность вычислений обобщенного дифференциала; оптимизация сложности.

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта в форме кредитной линии. Известно, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки по сравнению с действующей по договору об открытии кредитной линии. Было показано, что, тем не менее, указанная функция является дифференцируемой по направлениям, и предложен способ их расчета. Полученные производные интерпретировались авторами как коэффициенты эластичности в предложенной методике анализа рисков. Из них, как было показано ими ранее, также можно сконструировать обобщенный дифференциал в силу равномерной сходимости нормированного остатка. Только он будет уже не линейной функцией приращения, а кусочно-линейной и выпуклой. Если параметр один, то это полностью решает задачу построения обобщенного дифференциала. Если же параметр является векторной величиной, то это гораздо более сложная задача, и она изучалась авторами в предыдущей работе, в которой была выявлена общая структура обобщенного дифференциала в однопараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта. На этой основе в предыдущей работе авторов на эту тему были получены рекуррентные уравнения, позволяющие в явном виде построить обобщенный дифференциал согласно общей методике.

Однако эта конструкция оказалась довольно громоздкой и в настоящей работе авторы оптимизируют ее в смысле сокращения числа перебираемых точек. Такова суть нашей новой работы, которая может стать полезной банковским аналитикам, а также служить основой для дальнейших теоретических исследований в области анализа рисков.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.В.Белякова, А.Г.Перевозчикова может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Е.А. Фирсова, д.э.н, профессор, декан факультета экономики и менеджмента, проректор по научной работе Тверского института экологии и менеджмента

8.1. ABOUT THE OPTIMIZATION OF CALCULATION OF INTEGRATED DIFFERENTIAL IN ONE-PARAMETER TASK OF INVESTMENT PROJECT OPTIMIZATION

A.V. Belaykov, Candidate of Science, the Chief Systems Expert of Plc «Prime Group» Branch in Tver;
A.G. Perevozchikov, Doctor of Economics, of the Economics Department of Tver Institute of Ecology and Law

The task of optimization of investment project financing in the form of credit line is regarded. In common case the cost of equity capital project is not a differentiated function of consolidated risk expressed in a possible change of the market credit rate. Earlier the authors proved that nevertheless, the given function is not differentiated by directions, and the common structure of its integrated differential was found. In the authors' previous work on this base the recurrent equations were calculated which apparently enabled to build up the integrated differential according to the general methods. However, this construction appeared to be rather complicated and in this work it is optimized to decrease the number of sorted points.

Literature

1. Valuation of Business: A Manual. Edited by A.G.Gryaznova, M.A. Fedotova – M.: Finance and Statistics. – 2002.
2. Methodology and Manual on Conducting Valuation of Business and Assets of Public Limited Company «United Energy Systems of Russia». – Deloitte & Touche. – Dec. 2003-March 2005.
3. A.G. Perevozchikov. Calculation of Capital Structure in Cash Flow Models for Personal and Invested Capital. Audit and Financial Analyses, 2006, №1, p.163-166.
4. A.V. Belyakov. About Optimization of Borrowed Funds Use in Investing Project Realization. Finance and Credit. – 1999, №7, p. 2-7.
5. A.V. Belyakov, A.G. Perevozchikov. The Investment Project Stability with Respect to a Possible Cash Value Change and Risks Analyses. Audit and Financial Analises.-2010, №2, p. 299-305.
6. V.F. Demyanov, V.N. Malozemov. The Main Editorial Office of Physical-mathematical literature of the Publishing House «Nauka», 1972, 368 p.
7. A.V. Belyakov, A.G. Perevozchikov. About the Investment Project Stability with Respect to a Possible Cash Value Change. Audit and Financial Analyses. – 2010, №3, p. 291-299.
8. A.V. Belyakov, A.G. Perevozchikov. About the Calculation of Integrated Differential in One-parameter Task of Investment Project Optimization. Audit and Financial Analyses. – 2011, №2, p. 242-247.

Keywords

Investment projects appraise; cost of equity capital; project financing optimization; value of money; risks analysis; integrated differential of equity capital cost as risks function; complication of calculations of integrated differential; optimization of complication.