# 8.3. ФОРМЫ ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Коротеев М.В., соискатель, лаборант кафедры информационных систем в экономике

*ГОУВПО «Волгоградский государственный технический университет»*

Статья посвящена методике оценки уровня риска инвестиционных проектов, основанной на известных математических методах с применением нечеткой логики для формализации экономической неопределенности. Данный метод может широко применяться для принятия управленческих решений, сравнения и оценки проектов.

## ВВЕДЕНИЕ

В практике экономического анализа эксперты повсеместно сталкиваются с таким понятием, как неопределенность. Экономическая неопределенность размывает исходные данные моделей, снижая их надежность и точность. Неопределенность внешней экономической среды является фундаментальным явлением, не поддающимся уменьшению аналитическими методами, такими как, например, повышение точности прогнозирования.

Естественным выходом представляется построение такого типа экономических моделей, которые могут непосредственно учитывать неопределенность исходных данных, не игнорируя ее и не сводя к средним значениям статистическими методами.

При экспертном оценивании исходных данных традиционных экономических моделей перед экспертом стоит задача выбрать уровень конкретного показателя, наиболее полно отражающий его предполагаемое реальное значение. При этом эксперт опирается на свои знания и опыт, анализ ситуации и фактические данные, а также на данные математического моделирования [4]. В контексте рассматриваемой проблемы важно то, что выбирается единственный уровень показателя, представимый в виде четкого действительного числа. При этом никакой формализуемой методологической проблемы не возникает. Точность оценки непосредственно зависит от выбранного уровня показателя.

Однако же, если конкретный показатель предлагается оценить в виде нечеткого числа, возникает вопрос выбора формы функции принадлежности. Эта функция формализует ожидания экспертом отклонения показателя, величину отклонения и его вероятность в виде непрерывной функции, определенной на отрезке действительной оси и принимающей значения на отрезке [0, 1]. Так как нечеткое число однозначно задается своей функцией принадлежности в отличие от, например, лингвистической переменной или нечеткого множества, результат применения к нему арифметических операций зависти от формы этой функции. В конечном итоге адекватность фаззифицированной экономико-математической модели зависит не только от погрешности в оценках факторов, но и от методики выбора форм функций принадлежности нечетких чисел.

Данная работа призвана предложить подходы к выбору форм функций принадлежности экономических показателей, облегчающая работу эксперта и отражающего его знания и опыт в оцениваемый параметр.

## 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ФОРМ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

В общем случае без применения лингвистических модификаторов нечеткое число представляет собой нечеткое множество с функцией принадлежности в виде куполообразной кривой [2]. Существуют различные классификации функций принадлежности [3, 5, 1, 8, 9]. Наиболее существенной в данном случае представляются следующие классы.

1. Непосредственно по форме функций принадлежности:

Треугольные числа:

$$\mu_T(x)=f_T(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le x_1;\\ \dfrac{x-x_1}{x_A-x_1} & \text{при } x_1<x<x_2;\\ 1, & \text{при } x=x_2;\\ \dfrac{x-x_4}{x_B-x_4} & \text{при } x_2<x<x_3;\\ 0, & \text{при } x\ge x_3.\end{cases}$$

Трапециевидные числа –

$$\mu_T(x)=f_T(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le x_1;\\ \dfrac{x-x_1}{x_A-x_1} & \text{при } x_1<x<x_2;\\ 1, & \text{при } x_2\le x\le x_3;\\ \dfrac{x-x_4}{x_B-x_4} & \text{при } x_3<x<x_4;\\ 0, & \text{при } x\ge x_4.\end{cases}$$

Гауссианы:

$$\mu_{gaus}(x)=f(m,\sigma)=e^{-\frac{(x-m)^2}{a\sigma^2}}.$$

Лапласcианы:

$$\mu_{lapl}(x)=f(m,\sigma)=e^{-\frac{|x-m|}{\sigma}}.$$

Числа других видов. В [3] описаны 13 видов форм функций принадлежности, но, теоретически, любое отображение $R\xrightarrow{\mu(x)}[0,1]$ может быть проинтерпретировано как нечеткое число.

2. По количеству мод:
- унимодальные;
- мультимодальные.

3. По величине отрезка толерантности (ядра):
- толерантные;
- нетолерантные.

4. По ограниченности:
- ограниченные;
- неограниченные.

Отдельно выделяют как частный случай нечетких чисел четкие числа и четкие интервалы.

## 2. ИНТЕРВАЛЫ ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Далее в данной работе будем рассматривать общий вид нечетких чисел, задаваемый следующим образом:

$$\mu(x)=f(x_1,x_1,x_3,x_4)=\begin{cases}1 & \text{если } x_2<x<x_3;\\ f_1(x) & \text{если } x_1<x<x_2;\\ f_2(x) & \text{если } x_3<x<x_4;\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}\quad(1)$$

где

***$f_1(x)$*** – функция левого ската;

$f_2(x)$ – функция правого ската нечеткого числа.

Такая интерпретация позволяет рассматривать все используемые виды нечетких чисел как частные случаи. Также элементы формулы (1) имеют довольно осмысленную экономическую интерпретацию.

Так, интервал толерантности представляет собой наиболее вероятное значение параметра, равновероятное в его пределах. Этот интервал должен выбираться экспертом исходя из тех соображений, что невозможно получить дополнительную информацию и оценить характер изменения вероятности совпадения оцениваемого параметра с числами внутри интервала. Другими словами, интервал толерантности – это наиболее узкая интервальная оценка данного параметра. Заметим, что в случае уверенности эксперта в каком-либо конкретном наиболее вероятном значении, интервал вероятности легко может вырождаться в точку ($x_2 = x_3$).

Левый скат функции принадлежности формализует ожидания эксперта по отношению к возможности данного параметра принимать значения, меньшие лежащих в интервале толерантности. Соответственно, правый скат характеризует возможность параметра принимать повышенные значения. При наличии у эксперта информации о невозможности превышения или понижения данного параметра соответствующий интервал также может стягиваться в точку. В граничном случае, при полной уверенности эксперта в уровне параметра, все три интервала стягиваются в точку, и получаемое нечеткое число становится четким. Таким образом описываемая методика является обобщением точечных оценок на случай неуверенности эксперта в уровне фактора.

Заметим, что в данной интерпретации функции левого и правого скатов не обязательно задаются однотипными алгебраическими выражениями, а если и задаются, то необязательно с одними и теми же параметрами (шириной, дисперсией и т.д.). По нашему мнению, это более полно позволяет отразить характер неполноты информации относительно возможности вариации фактора.

## 3. ВЫБОР ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ СКАТОВ

В качестве прообразов функций принадлежности удобно брать функции плотности вероятности непрерывных распределений, тем более что математический аппарат анализа таких функций уже достаточно разработан. Существенным различием между ними является то, что функция плотности вероятности приведена к критерию $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$, тогда как функция принадлежности нормирована по высоте ($sup(\mu(x)) = 1$).

Разнообразие возможных форм функций принадлежности заставляет искать экономический или, хотя бы методологический смысл выбора той или иной функции в качестве скатов нечеткого числа (1). Отправной точкой для обоснования выбора формы функции принадлежности может стать классификация скатов, учитывающая субъективизм процесса экспертной оценки параметра. За основу подобной классификации можно взять линейный скат как самый распространенный и имеющий наиболее простое математическое выражение и лингвистическое толкование. Далее предлагается классификация функций скатов по отношению к линейному убыванию вероятности.

1. Сублинейный скат задается выражением:

$$\mu(x) << \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

при

$$x_1 < x < x_2 .$$

Т.е. функция принадлежности значительно превосходит линейную функцию на интервале данного ската. Характеризуется быстро убывающей принадлежностью данному параметру значений, удаляющихся от ядра нечеткого множества. Такой вид ската следует использовать, когда эксперт предполагает малую вероятность снижения / увеличения параметра относительно модельных значений в определенном интервале.

2. Суперлинейный скат задается обратным условием при $x_1 < x < x_2$. Т.е. принадлежность параметра убывает на интервале данного ската медленнее линейной зависимости. Следовательно, функции такого класса предназначены для моделирования параметра, вероятность снижения / увеличения которых по мере удаления от ядра множества характеризуется как высокая.

3. Квазилинейный скат характеризуется невыполнением ни одного из вышеперечисленных условий, скат, несущественно отличающийся от линейного. Вероятность изменения параметра в таком случае убывает равномерно по мере удаления от ядра нечеткого множества.

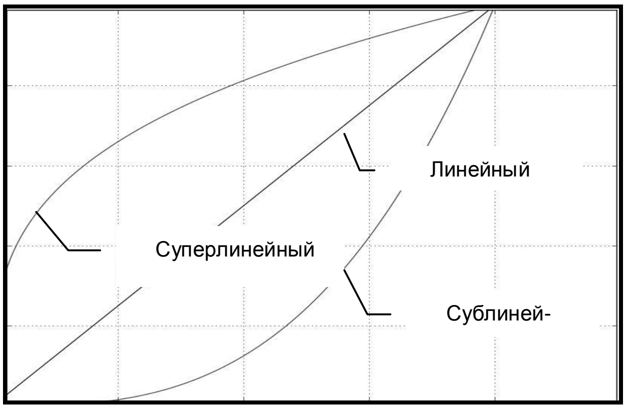


**Рис. 1. Суперлинейный, линейный и сублинейный скат трапециевидного числа**

На рис. 1 приведены примеры функций скатов всех трех типов. Необходимо отметить, что в данной классификации границы классов скатов не являются четкими, и отнесение той или иной конкретной функции к классу сублинейных, суперлинейных или квазилинейных допускает некоторую нечеткость.

## 4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ СКАТОВ

Помимо рассмотренного выше качественного характера убывания принадлежности параметра перед экспертом стоит задача количественно оценить функцию ската нечеткого числа. Сделать это можно путем задания параметров функции. Необходимо так определить функцию ската, чтобы ее параметры имели явный экономический смысл, что облегчит работу эксперта. В данном контексте важна дифференциация функций ската на ограниченные и неограниченные (рис. 2). Классификация, приведенная ранее, строго говоря, справедлива только для ограниченных функций скатов.

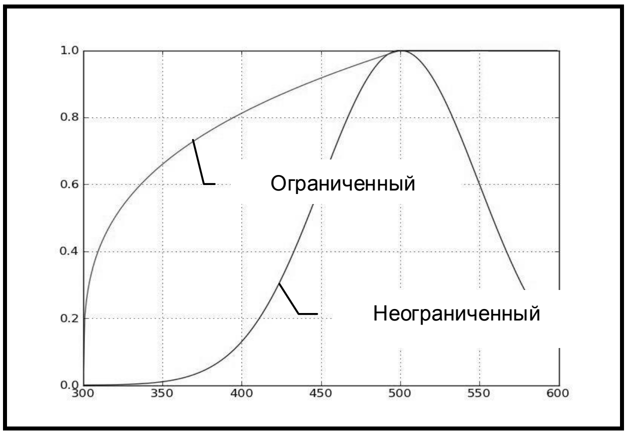


**Рис. 2. Ограниченный (верхняя линия) и неограниченный скаты трапециевидного числа**

Естественным примером ограниченной функции ската является линейный скат, такой, какие применяются для задания обычных трапециевидных чисел. Такая функция имеет один параметр – длину интервала определения, на котором она принимает ненулевые значения. Следуя формуле (1), можно задать функцию линейного ската, используя два параметра – моду, совпадающую с одной из границ интервала толерантности (в зависимости от расположения ската – слева или справа от интервала толерантности), и граничное значение, в котором значение принадлежности становится равном нулю. Так как при установлении функции ската первый параметр уже известен, эксперту остается задать лишь второй:

$$\mu_{lin}(x_1, x_2) = f(x, x_1, x_2) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \qquad (2)$$

Удобнее всего использовать запись в виде лямбда-функций. В нашем случае линейная функция ската представляет собой функцию второго порядка от двух аргументов, возвращающая функцию от одного аргумента (элемента области определения – носителя нечеткого множества):

***lins = lambda a, b: lambda x: ((x – b) / (a – b)).***

Если, допустим, мы имеем интервал толерантности [200, 350] и возможность параметра возрасти до, максимум, 500 единиц, то функция левого ската примет вид:

***lins(350, 500).***

Достоинство данного подхода в том, что такая параметризация является довольно прозрачной и симметричной относительно интервала толерантности. Первым параметром функции второго порядка является модальное значение (примыкающее к интервалу толерантности), а вторым – значение экономического показателя, максимально удаленное от этого интервала. Таким образом, если нам понадобится записать функцию левого ската при тех же исходных данных и возможности снижения уровня до 50 единиц, то получится следующая запись:

***lins(200, 50).***

Другим примером ограниченной функции ската является полукруговая функция [3]:

***circ=lambda a,***
***b: lambda x: abs(1 – ((x – a) / abs(b – a))**2)**0,5.***

Или параболическая:

***quad=lambda a, b: lambda x: 1 – ((x – a) / abs(b – – a))**2.***

В работе Заде [7] были введены операции увеличения и уменьшения нечеткости, состоящие в возведении функции принадлежности в степень, большую или меньшую единицы соответственно. Если ввести показатель степени как дополнительный параметр, отражающий представления эксперта о величине вероятности повышения или понижения экономического параметра на заданном интервале, можно получить параметрическое уравнение двух ограниченных функций скатов, линейного и квадратического:

$$\mu_{lin}(x) = f(a,b,c,x) = \left|\frac{x-b}{a-b}\right|^c; \qquad (3)$$

$$\mu_{quad}(x) = f(a,b,c,x) = \left|1 - \left(\frac{x-b}{|a-b|}\right)^2\right|^c, \qquad (4)$$

где

***a*** – уровень параметра, при котором принадлежность максимальна (равна единице) – граница интервала ската, примыкающая к интервалу толерантности;

***b*** – уровень параметра, при котором принадлежность минимальна (равна нулю) – уровень параметра, наиболее удаленный от интервала толерантности, максимальное или минимальное теоретически возможное значение исследуемого параметра;

***c*** – действительное число, отражающее величину вероятности вариации исследуемого параметра вне интервала толерантности.

***c > 1*** уменьшает вероятности изменения параметра и приближает центроид нечеткого числа к середине интервала толерантности, ***c < 1***, наоборот, увеличивает эту вероятность и «размывает» нечеткое число. В предельных случаях, при ***c = 0*** нечеткое число вырождается в четкий интервал с границами, соответствующими внешним границам нечеткого числа; при ***c =∞*** нечеткое число вырождается в четкий интервал, соответствующий интервалу толерантности. На рис. 3 изображены несколько функций ската одного типа с различными значениями ***c***.

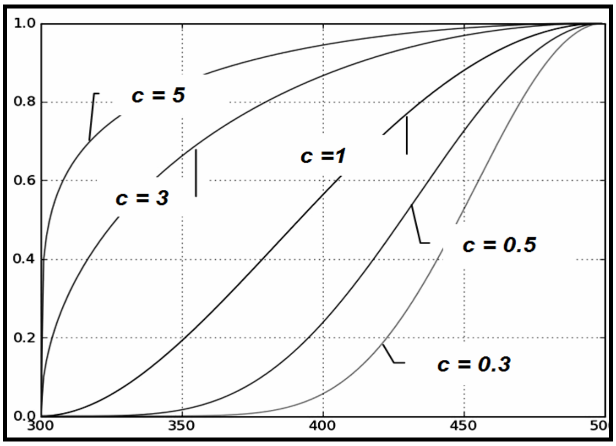


**Рис. 3. Квадратичный скат с разными показателями степени (увеличение степени сдвигает кривую вправо)**

Необходимо заметить, что достоинством такой записи является тождественность лингвистической интерпретации параметров функций ската относительно разнообразия функций скатов. Выше рассмотрены две функции – линейная степенная и квадратическая в обобщенной форме. Частными случаями при определенных значениях с этих функций является линейный скат, полукруговой или параболический. При такой параметризации трапециевидное число в обобщенной форме с ограниченными скатами принимает вид:

$$\mu(x)=f(x,x_1,x_2,x_3,x_4,c_l,c_r,f_l,f_r)=$$
$$=\begin{cases} 1 & \text{если } x_2 \le x \le x_3; \\ f_l(x_2,x_1,c_l,x) & \text{если } x_1 \le x \le x_2; \\ f_r(x_3,x_4,c_r,x) & \text{если } x_3 \le x \le x_4; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (5)$$

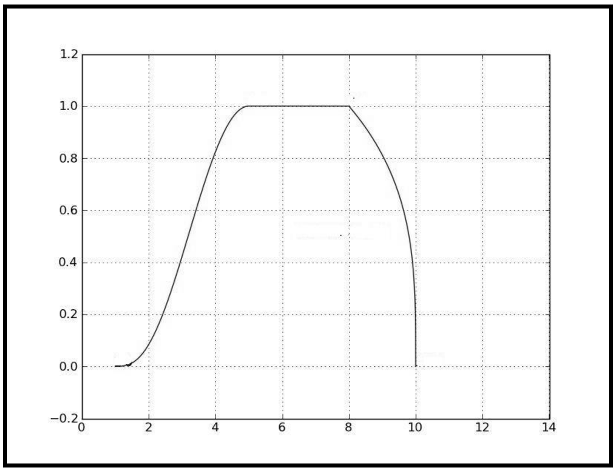


**Рис. 4. Пример трапециевидного числа в обобщенной форме с криволинейными скатами**

Ограниченные нечеткие числа могут представлять широкий спектр экономических показателей, варьирующихся в определенных пределах, либо при наличии у эксперта информации об ограниченности вариативности параметра. Представленные в данной работе трапециевидные числа в обобщенном виде являются расширением категорий треугольного и трапециевидного числа с разнообразными функциями на интервалах скатов. При этом все параметры нечеткого числа в (5) имеют внятную смысловую интерпретацию, что облегчает эксперту задачу наиболее полно отразить свои представления, знания, а также фактор неопределенности в виде нечеткого числа (рис. 4).

При нечетком оценивании какого-либо экономического параметра следует придерживаться следующего алгоритма действий.

1. Определить интервал толерантности – интервал наиболее вероятных значений параметра, либо одно такое значение. На этом шаге становятся известными величины $x_2$ и $x_3$. При отсутствии остальной информации процесс можно завершить и получить на выходе четкое число или интервал.
2. Определить максимальную и минимальную границы изменения исследуемого параметра, то есть значения, больше или меньше которых параметр не может принимать значения, или возможностью таких значений можно пренебречь. Так становятся известны $x_1$ и $x_4$. Если закончить алгоритм на этом шаге, то получим трапециевидное или треугольное число, т.е. число со скатами в виде отрезка линейной функции, которую представляется разумным использовать по умолчанию.
3. Выбрать тип функции правого и левого скатов. Приведенное в последней главе настоящей работы обобщение позволяет сузить выбор до двух альтернатив – степенной и квадратичной функции. Экономический смысл разницы между ними довольно сложно выразить вербально, но легко понять, взглянув на рис. 5.
4. Выбрать параметр ***c***. Данный шаг выполняется исключительно экспертным методом, исходя из соображений вероятности отклонения исследуемого параметра от интервала толерантности.

## 5. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПО 0,5-МУ УРОВНЮ

Недостатком вышеприведенной записи нечеткого числа является довольно неопределенный экономический смысл параметра ***c***. Это усложняет процесс экспертного оценивания, требует от эксперта знания зависимости форм используемых функций скатов от вариации этого параметра. Чтобы устранить эту проблему, необходимо придать экономический смысл численной характеристике формы функции скатов.

Отвлеченность параметра ***c*** проистекает из того факта, что численно он не имеет размерности и представляет собой только коэффициент в формуле. Необходимо, чтобы форма функции ската характеризовалась числом, являющимся элементом области определения нечеткого числа, т.е. определенным уровнем анализируемого параметра.

Наиболее естественным способом подобной параметризации представляется следующий. После выбора функции принадлежности ската необходимо выбрать такое значение параметра, в котором его принадлежность нечеткому числу принимает значение 0,5. Так, если мы выбрали линейный скат, получаем:

$$\mu_{lin}(x)=\left|\frac{x-b}{a-b}\right|^{c}=0{,}5; \quad c=\log_{\frac{x-b}{a-b}} 0.5; \qquad (6)$$

$$\mu_{lin}(x)=\left|\frac{x-b}{a-b}\right|^{\log_{\frac{c-b}{a-b}} 0.5}; \qquad (7)$$

Такая запись позволяет с легкостью варьировать форму функции ската в зависимости от того, какое значение мы принимаем за среднее отклонение значения исследуемого параметра от интервала толерантности.

По рассуждениям, аналогичным (6), получаем для квадратичного ската:

$$\mu_{quad}(x)=\left|1-\left(\frac{x-b}{|a-b|}\right)^2\right|^{\log_{1-\left(\frac{c-b}{|a-b|}\right)^2} 0.5}; \qquad (8)$$

В такой записи функция ската зависит от трех параметров: границ интервала и значения 0,5-го уровня.

На рис. 5 приведены вышеописанных функции для двух значений параметра ***c***. Заметим, что в данном случае этот параметр имеет значение в терминах исследуемого экономического параметра. Также на рис. 5 четко видны для каждой пары линий три точки пересечения: в начале интервала при значении 1,0, в конце – для значения 0,0 и в значении параметра ***c*** – в значении 0,5.

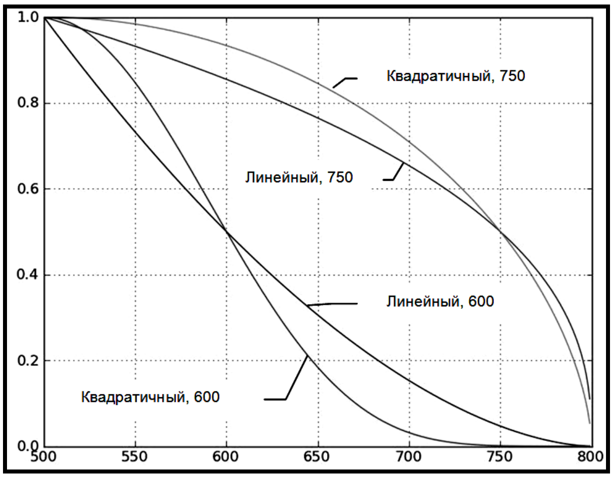


**Рис. 5. Параметризация ограниченных функций**

Точно такой же подход можно применить и для неограниченных функций. Например, для гауссового ската:

$$\mu_{gauss}(x)=e^{-\frac{(x-a)^2}{c^2}}; \qquad (9)$$

получаем:

$$c^2=-\frac{(x-a)^2}{\ln 0,5}; \qquad (10)$$

$$\mu_{gauss}(x)=e^{-\frac{(x-a)^2\ln 0,5}{(c-a)^2}}; \qquad (11)$$

Точно такую же параметризацию можно применить и к другим функциям, рассмотренным в [3]:

Лапласиана:

$$\mu_{lapl}(x)=e^{\frac{|x-a|\ln 0,5}{|c-a|}}; \qquad (12)$$

Распределение Коши:

$$\mu_{cauc}(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2}; \qquad (13)$$

Логистическая кривая:

$$\mu_{log}(x)=\frac{2}{1+e^{\ln 3\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2}}. \qquad (14)$$

На рис. 6 приведены все описанные в данной работе функции скатов с единым значением параметра ***c***.

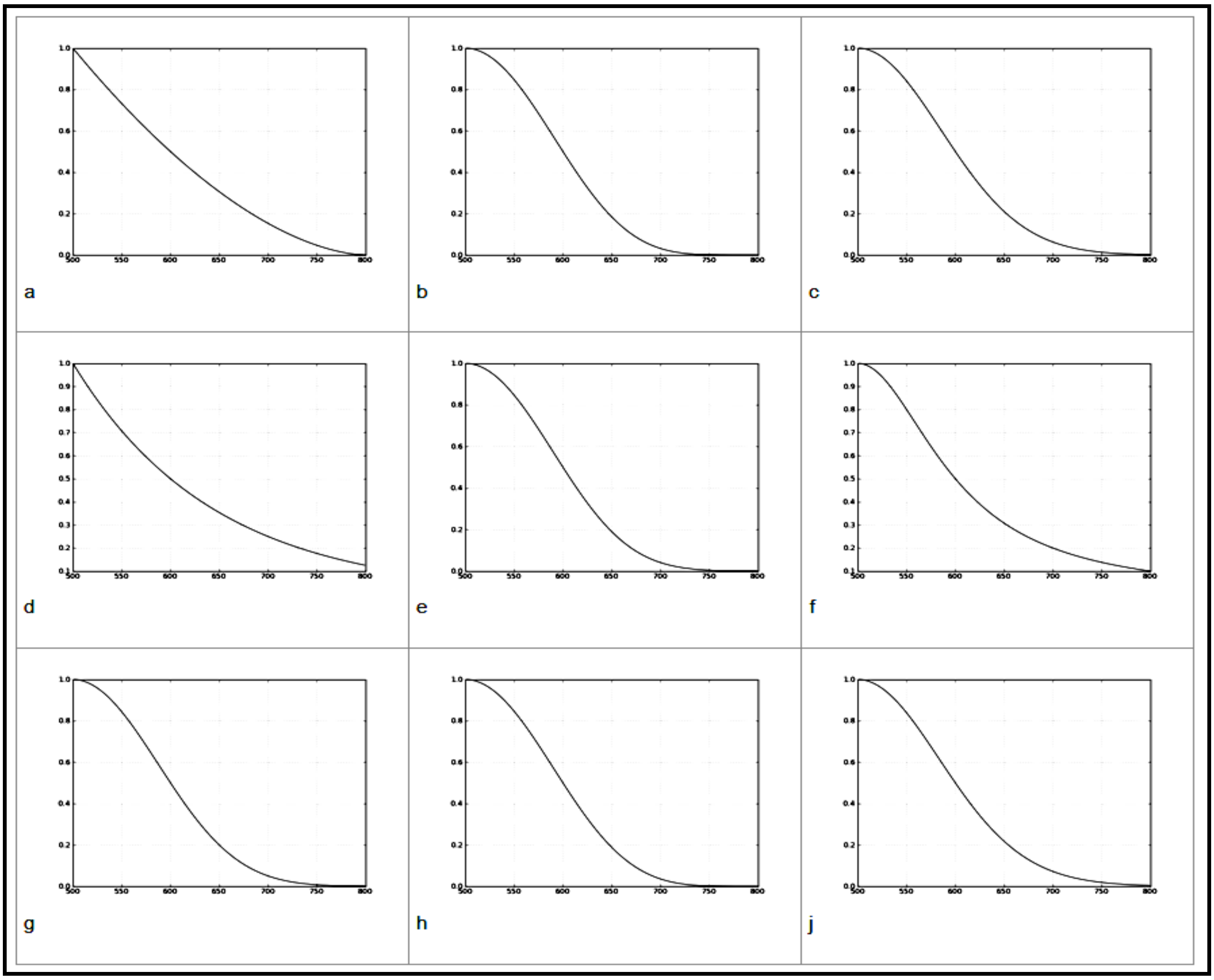


**Рис. 6. Параметризованные функции скатов. (a) – степенной, (b) – квадратичный, (c) – гауссовый, (d) – лапласовый, (e) – тангенсоида, (f) – коши, (g) – логистический, (h) – косинусоида, (j) – косекансоида**

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье были рассмотрены основные вопросы, связанные с методикой оценки экономического параметра в виде нечеткого числа, отражающего отсутствие у эксперта полной информации об уровне данного показателя. Данная методика является обобщением точечных экспертных оценок, отражающая характер неполноты информации. Для облегчения работы эксперта была приведена классификация форм функций принадлежности, введено понятие и экономическая интерпретация традиционного числа в обобщенной форме, классификация видов функций скатов. Затем была описана параметризация функции ската, включающая три экономически значимых параметра. В заключении приведем список описанных форм функций скатов нечеткого обобщенно-трапециевидного числа (В скобках указан номер формулы в тексте данной статьи):

- ограниченные:
  - квадратичный скат (7);
  - степенной скат (8);
- неограниченные:
  - гауссовый скат (11);
  - лапласcовый скат (12);
  - скат в виде распределения коши (13);
  - логистический (сигмоидный) скат (14).

## Литература


1. Collan M., Fuller R., Mezei J. A fuzzy pay-off method for real option variation // Journal of applied mathematics and decision sciences. 2009. Vol. 2009.
2. Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers: an overview // Analysis of fuzzy information. 1987. Vol. 1. Pp. 3-39.
3. Mitaim S., Kosko B. The shape of fuzzy sets in adaptive function approximation // IEEE Transactions on fuzzy systems. 2001. Vol. 9. №4.
4. Sugeno M., Yasukawa T. A fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling // IEEE Transactions on fuzzy systems. 1993. Vol. 1. №1.
5. Rutkovskaya D., Pilinsky M., Rutkovsky M. Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems: Translator: I.D. Rudinsky. – Telecom, 2004. – 452 p.
6. Weisstein E.W. Wigner's semicircle law. From MathWorld-A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ WignersSemicircleLaw.html
7. Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning // Information sciences. 1975. Vol. 8. Pp. 199-249.
8. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and control. 1965. Vol. 8. Pp. 338-353.
9. Zaychenko Y.P., Zayec I.O., Kamocky O.V., Pavluk O.V. Study of different types of membership of function parameters of fuzzy forecasting models in fuzzy arguments group method.



## Ключевые слова

Инвестиционный проект; неопределенность; риск; нечеткая логика; функция принадлежности; нечеткая арифметика; математическое моделирование; чистая приведенный доход; внутренняя норма доходности; нечеткое отношение.


*Коротеев Михаил Викторович*

## РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность темы. Нечеткая логика является одним из наиболее востребованных инструментов, находящих свое применение во многих областях знания. Автор в своей работе затрагивает использование нечеткой логики для моделирования экономических данных, что является бесспорно актуальным при анализе в условиях неопределенности и неполноты информации.

Научная новизна и практическая значимость. Автором в статье были отражены достигнутые результаты в области создания методологии нечетко-множественной оценки экономических показателей: описана классификация функций принадлежности по многим критериям, дана экономическая интерпретация интервалов трапециевидного числа и параметров его функции принадлежности. Описаны типичные формы функций принадлежности с параметрами. Практическую значимость имеет предложенное нечеткое обобщение точечных экспертных оценок.

Заключение: статья является актуальной, имеет научную новизну и может быть рекомендована к изданию.

*Терелянский П.В., д.э.н., доцент, зав. кафедрой информационных систем в экономике ГОУВПО «Волгоградский государственный технический университет»*

# 8.3. MEMBERSHIP FUNCTIONS OF THE ECONOMIC FACTORS'S LINGUISTIC VARIABLES


M.V. Koroteev, Department of Information Systems in Economics Lab. Assistant

*Volgograd state technical university (VSTU), Volgograd, Russia*



This article is viewing new method of estimating the risk level of investment projects based on a well-known mathematical approaches in addition with fuzzy logic in order to formalize economic uncertainty. This method can be widely used in making manager's decision, projects ranking and estimation.


## Literature


1. M. Sugeno, T. Yasukawa. A fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling. // IEEE Transactions on fuzzy systems. Vol. 1, №1. 1993.
2. Dubois, D. and Prade, H., «Fuzzy Numbers: An Overview», // Analysis of Fuzzy Information 1:3-39, CRCPress, BocaRaton, 1987.
3. Rutkovskaya D., Pilinsky M., Rutkovsky M. Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems: Translator: I.D. Rudinsky. – Telecom, 2004. – 452 p – ISBN 5-93517-103-1.
4. S. Mitaim, B. Kosko. The shape of fuzzy sets in adaptive function approximation. // IEEE Transactions on fuzzy systems. Vol. 9, №4. 2001.
5. Weisstein, Eric W. «Wigner's Semicircle Law». From MathWorld-A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ WignersSemicircleLaw.html
6. L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. // Information sciences 8, pp 199-249. 1975.
7. Y.P. Zaychenko, I.O. Zayec, O.V. Kamocky, O.V. Pavluk. Study of different types of membership of function parameters of fuzzy forecasting models in fuzzy arguments group method.
8. L.A. Zadeh. Fuzzy sets. // Information and control, 8(3), pp. 338-353. 1965.
9. M. Collan, R. Fuller, J. Mezei. A fuzzy pay-off method for real option variation. // Journal of applied mathematics and decision sciences, Volume 2009.



## Keywords

Investment project; uncertainty; risk; fuzzy logic; membership function; fuzzy arithmetic; mathematical modeling; net present value; internal rate of return; fuzzy relation.