3.2. К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА В ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

Беляков А.В., к.т.н., ведущий системный аналитик
ОАО «Прайм Групп», филиал в г.Твери;
Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор кафедры
финансов и менеджмента, академик РАЕН,
Тверской институт экологии и права

Рассматривается двухпараметрическая задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта. В качестве параметров выбрана стоимость кредитов и депозитов на рынке. Ранее нами было установлено, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночных ставок по кредитам и депозитам. Было доказано, что, тем не менее, указанная функция является дифференцируемой по направлениям, и была выявлена общая структура ее обобщенного дифференциала. На этой основе в настоящей работе получены рекуррентные уравнения, позволяющие в явном виде построить обобщенный дифференциал в двухпараметрической задаче согласно общей методике.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта в форме кредитной линии. Известно [5, 6], что денежный поток (***ДП***) Q_t на собственный капитал X_t инвестора получается из денежного потока q_t на инвестированный капитал Y_t путем учета дополнительно суммы выплат процентов по кредиту и изменения задолженности Z_t. Трудность практического применения модели ***ДП*** на собственный капитал инвестора связана с отсутствием удовлетворительных моделей прогнозирования задолженности Z_t в прогнозный период $t = 1,2,\dots,n.$ В [7] изучались проблемы учета структуры капитала в двух основных моделях ***ДП*** для собственного и инвестированного капитала с учетом рекомендации [6]. С другой стороны, использование модели дисконтирования ***ДП*** на инвестированный капитал не позволяет оптимизировать финансирование ***ДП*** на собственный капитал. Поэтому возможны случаи, когда подсчитанная таким образом стоимость собственного капитала оказывается отрицательной тогда, как при оптимизации задолженности Z_t в прогнозный период $t = 1,2,\dots,n$, она может стать положительной [2].

В работе [2] было показано, как смоделировать ДП на собственный капитал с учетом оптимизации остатков фактической задолженности Z_t с учетом оптимизации финансирования. В работе [3] нами исследована устойчивость инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег и показано, как использовать полученные результаты для анализа рисков сопутствующих проекту. Показано, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки по сравнению с действующей по договору об открытии кредитной линии. Было доказано что, тем не менее, указанная функция является дифференцируемой по направлениям [4], и предложен способ расчета соответствующих производных. Полученные производные были интерпретированы нами как коэффициенты эластичности в предложенной методике анализа рисков. Из них, как нам удалось показать, тоже можно соорудить нечто вроде дифференциала в силу равномерной сходимости нормированного остатка. Только он будет уже не линейной функцией приращения, а кусочно-линейной и выпуклой.

Если параметр один, то это полностью решает задачу построения обобщенного дифференциала. Если же их хотя бы два, то это гораздо более сложная задача. В работе [7] мы полностью решили двухпараметрическую задачу, построив обобщенный дифференциал для случая двух параметров, представляющих собой соответственно кредитную и депозитную ставку, каждый из которых к тому же может зависеть от времени, т.е. быть векторным. На этой основе в настоящей работе получены рекуррентные уравнения, позволяющие в явном виде построить обобщенный дифференциал согласно общей методике [1]. Такова суть нашей новой работы, которая может стать полезной банковским аналитикам, а также служить основой для дальнейших теоретических исследований в области анализа рисков.

1. Дисконтирование денежных потоков на собственный и инвестируемый капитал

Обозначим через $X_t, Y_t = X_t + Z_t, t = 0,1,2,\dots,n,$ текущую стоимость собственного и инвестируемого в проект) капитала на конец ***t***-го года.

Продажная стоимость собственного капитала получается обычно по формуле [7]:

$$X_n = (1 - w_n)Y_n. \qquad (1)$$

Здесь $w = w_n$ – доля заемного капитала в инвестированном капитале компании на конец ***n***-го года, соответствующий концу выбранного нестационарного прогнозного периода, которая рассчитываются на основе рыночных данных по отрасли. В результате получается как бы целевая структура капитала по методике [6].

Для фигурирующей здесь продажной стоимости инвестируемого капитала используется известная формула Гордона [6]:

$$Y_n = \frac{q_n(1 + v_{n+1})}{j_{n+1} - v_{n+1}}, \qquad (2)$$

где q_n – прогнозируемая величина ДП на инвестированный капитал на конец прогнозного периода, а j_{n+1}, v_{n+1}, – соответственно постпрогнозные средневзвешенная стоимость инвестированного капитала и темп изменения денежного потока на инвестированный капитал, которые считаются постоянными в силу предположения о стационарности постпрогнозного периода. Обычно постпрогнозный темп v_{n+1} определяется по долгосрочным прогнозам темпа роста мировой экономики на уровне долгосрочной инфляции базовой валюты, в которой прогнозируется денежный поток [6].

Платежей p_t по кредитной линии, включающую проценты и часть основного долга, можно представить в виде [3]:

$$\begin{aligned} p_t &= Z_{t-1}g(1 - c) - Z_t + Z_{t-1} = \\ &= Z_{t-1}(1 + g') - Z_t, t = 0,1,\dots,n. \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь обозначено для краткости:

$g' = g(1 - c),$

где ***c*** – ставка налога на прибыль.

2. Уравнение для текущей стоимости собственного капитала инвестора

Выпишем сначала рекуррентное уравнение для собственного капитала инвестора, следуя [7]:

$$X_{t-1} = \frac{q_t - p_t + X_t}{1+i}, t = n,\ldots,1. \quad (4)$$

Здесь $q_t, t = 1,2,\ldots,n,$ – величина денежного потока, ожидаемая на инвестированный капитал проекта, n- предполагаемая длительность проекта, выраженная в годах, I – подходящая ставка дисконта на собственный капитал. Ставка дисконта на собственный капитал представляет собой ставку дохода на вложенный капитал, достижение которой ожидает инвестор при принятии решения о приобретении будущих доходов (например, будущего денежного потока) с учетом риска их получения. При расчете ставки дисконта обычно используется модифицированная модель оценки капитальных активов (CAPM) [5].

Конечное условие для уравнения (4) определяются из (1). Платежи p_t определяются по формуле (3), где Z_t находятся по схеме, предложенной в [2], если считать, что задолженность Z_t представляет собой фактическую задолженность по кредитной линии объема $S_t, t = 0,1,\ldots,n-1,$ на конец t-го года. В этом случае фактический остаток задолженности, определяется по рекуррентному уравнению:

$$Z_{t-1} = min\left(S_{t-1}; \frac{Z_t + q_t}{1+g'}\right), t = n,\ldots,1. \quad (5)$$

Остаток долга должен находится в пределах:

$$0 \le Z_t, t = 0,1,\ldots,n; \quad (6)$$

$$Z_t \le S_t, t = 0,1,\ldots,n. \quad (7)$$

Связь между платежами и остатками долга имеет вид (3).

В отличие от [2], в [3] мы допускали переменный объем кредитной линии $S = S_t, t = 0,1,\ldots,n,$ и ненулевые начальные и конечные значения остатков, необходимых для расчета платежей по формуле (3):

$$Z_{-1} = Z^0_{-1}, Z_n = Z^0_n. \quad (8)$$

Здесь Z^0_{-1} – фактический остаток долга на начало нулевого года прежнего владельца проекта, в отличие от планируемого остатка Z_0 – нового владельца. Он нужен для расчета платежа p_0 по формуле (7), а Z^0_n – планируемый остаток по кредитной линии на конец n-го года, полученный по формуле:

$$Z^0_n = Y_n w_n. \quad (9)$$

Рассмотрим задачу оптимизации кредитной линии по критерию максимума текущей стоимости собственного капитала инвестора [4]:

$$X = \sum_{t=0}^{n} \frac{q_t - p_t}{(1+i)^t} \to max. \quad (10)$$

Можно показать, что критерий (10) эквивалентен критерию [2]:

$$x = F(z,g) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(i-g')Z_t}{(1+i)^t} \to max. \quad (11)$$

Здесь z – n-мерный вектор с координатами $Z_t, t = 0,1,\ldots,n.$

Таким образом, при условии положительного левереджа $i - g' > 0$ инвестор имеет на остатках заемных средствах маржу $i - g'$. Под $q_0 = -C < 0$ в [2] понимается начальные вложения капитала, складывающиеся из собственных средств инвестора $q_0 - p_0 < 0$ и стартового кредита $p_0 = -Y < 0$ в счет открытой кредитной линии. Предполагается, что выполнено условие, которое называется условием «консолидированных» затрат [2]:

$$q_t - p_t \ge 0; t = 1,2,\ldots,n. \quad (12)$$

При выполнении этого условия величины q_t, p_t могут иметь произвольные знаки. В этом случае дополнительные вложения в проект делаются не за счет инвестора, а за счет новых кредитов.

При $t = 0$ должно выполняться ослабленное условие [2]:

$$q_0 - p_0 \ge -H. \quad (13)$$

Величина H интерпретируется в модели, как величина собственных средств. Согласно формуле (3) для платежей по кредитной линии условие (13) будет иметь вид [1]:

$$-H \le q_0 + Z_0 - (1+g')Z^0_{-1}. \quad (14)$$

в новых переменных, а условие консолидированных затрат (12) принимает, соответственно, форму:

$$(1+g')Z_{t-1} - Z_t \le q_t, t = 1,2,\ldots,n. \quad (15)$$

В [2] изучалась задача максимизации (11) с ограничениями (6, 7, 8, 14, 15).

План, построенный по формуле (5), позволяет поддерживать остаток долга на максимальном уровне. Аналогично тому, как это было сделано в [2] доказывается, что если план (5, 8) удовлетворяет условиям (6) и (14, 15), то он оптимален (оптимальность), а если не удовлетворяет, то не существует допустимых планов рассматриваемой задачи. При этом все составляющие любого другого допустимого плана Z' не превосходят соответствующих составляющих плана Z (доминирование):

$$Z'_t \le Z_t, t = 0,\ldots,n-1.$$

Для не пустоты множества допустимых планов в задаче с обобщенными условиями (13) «консолидированных» затрат, таким образом, необходимо и достаточно выполнения неравенства:

$$-H \le q_0 + Z_0 - (1+g')Z^0_{-1}. \quad (16)$$

Если снять ограничения (6), то отрицательные значения остатков можно интерпретировать как величины остатков на депозитном счете с обратным знаком. Допуская возможность размещения временно свободных средств на депозитном счете, получим следуя [2] задаче максимизации (10) с ограничениями (7, 8, 14, 15). В такой постановке допустимыми могут быть, например, проекты у которых $q_n < 0.$

Депозитная ставка r, вообще говоря, меньше кредитной:

$$r < g. \quad (17)$$

Формула (3), устанавливающая связь между платежами и остатками долга будет иметь теперь вид:

$$Z_t = \begin{cases} (1+g')Z_{t-1} - p_t, Z_{t-1} \ge 0; \\ (1+r')Z_{t-1} - p_t, Z_{t-1} < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Можно показать, что критерий (10) эквивалентен в этом случае критерию [2]:

$$\sum_{t=0}^{n-1} \frac{(i-g')Z_t^+ - (i-r')Z_t^-}{(1+i)^t} \to max. \qquad (19)$$

Здесь

$$Z_t^+ = max(0; Z_t), Z_t^- = max(0; -Z_t). \qquad (20)$$

Эти величины представляют собой, суть обязательства и требования. При выборе оптимального плана следует считать, что в любой момент времени либо обязательства в любой момент времени равны нулю. В противном случае в силу условия (17) фирма имела бы убытки, и такой план был бы не оптимальным. При таком предположении величина Z_0 означает либо остаток долга, если она положительна, либо накопленную сумму на депозите, если она отрицательна.

Вместо (5) используется рекуррентное уравнение [2]:

$$Z_{t-1} = \begin{cases} min\left(S_{t-1}; \dfrac{Z_t + q_t}{1+g'}\right); Z_t + q_t \geq 0; \\ \dfrac{Z_t + q_t}{1+r'}; Z_t + q_t < 0. \end{cases} \qquad (21)$$

Здесь $t = n,...,1$.

Аналогично тому, как это было сделано в [2], доказывается, что если план (21, 8) удовлетворяет условию (14), то он оптимален (оптимальность), а если не удовлетворяет, то не существует допустимых планов изучаемой задачи. При этом все составляющие любого другого допустимого плана Z' не превосходят соответствующих составляющих плана Z (доминирование).

Уравнение для оптимальных остатков Z_t^* по безлимитной кредитной линии будет иметь вид.

$$Z_{t-1}^* = \begin{cases} \dfrac{Z_t^* + q_t}{1+g'}; Z_t^* + q_t \geq 0; \\ \dfrac{Z_t^* + q_t}{1+r'}; Z_t^* + q_t < 0. \end{cases} \qquad (22)$$

Величину $S*$ показателя минимального безлимитного объема кредитной линии можно определить как максимальное значение безлимитных остатков, определенных по формуле (22).

3. Анализ устойчивости проекта: общая схема

В [3] была предложена общая схема исследования устойчивости инвстиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег на рынке, заданных кредитной ставкой g. Сначала рассмотрим однопараметрическую задачу максимизации (11) с ограничениями (6, 7, 8, 14, 15):

$$x* = f(g) = \max_{z \in Z(g)} F(z,g). \qquad (23)$$

Здесь $Z(g)$ – множество допустимых решений задачи.

Заметим, что задача (23) при заданном g, представляет собой задачу линейного программирования (***ЛП***) специального вида, типа задачи дискретного оптимального управления с интегральным функционалом. Таким образом, задача (23) является параметрической задачей ***ЛП*** специального вида, и текущая стоимость $f(g)$ проекта определена нами в [3] как функция максимума со связанными переменными с учетом действующей на рынке средней стоимости заемных средств $g\%$, выделенных для финансирования аналогичных проектов. В момент заключения реального договора о предоставлении инвестору кредитной линии рыночная стоимость заемных средств может составить величину $a = g + \Delta g$, где Δg – малый параметр, представляющий собой консолидированный процентный риск.

Необходимо исследовать устойчивость максимальной стоимости от заданного параметра. Если бы в точке $a = g$ функция (23) была бы дифференцируема, то поставленная задача свелась бы к нахождению дифференциал $df(g) = f'(g)\Delta g$ от стоимости (23). В самом деле, тогда было верно бы представление:

$$\Delta f(g) = f'(g)\Delta g + o(\Delta g), \qquad (24)$$

где величина $o(\Delta g)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{o(\Delta g)}{\Delta g} \to 0, \Delta g \to 0. \qquad (25)$$

Из (25) следовало бы, что справедливо приближенное равенство:

$$\Delta f(g) \approx f'(g)\Delta g.$$

И производную $f'(g)$ можно было бы интерпретировать, как коэффициент эластичности. Его величина и знак и определяли бы, какое изменение скорректированной стоимости проекта соответствовало бы малому изменению базовой ставки по кредитам. Вот статическая модель такого исследования. Динамическая, состоит в том, что параметр $a = g_t$ представляет собой функцию времени $t = 0,1,...,n,$ т.е. n-мерный вектор. Например, кредитору известен соответствующий прогноз изменения базовых ставок на рынке и он поручает своему аналитику проверить, в какой степени изменение рыночных ставок в будущем скажется на изменении стоимости проекта. И если в результате переоценки ожидается снижение стоимости проекта, то кредитор может пропорционально снизить объем кредитной линии, хеджируя риск снижения стоимости проекта. В этом случае, следовало бы построить дифференциал функции $n+1$ переменной:

$$df(g) = \langle f'(g), \Delta g \rangle, \qquad (26)$$

где $f'(g)$ – это вектор частных производных $f'_{g_t} = \partial f / \partial g_t$ функции f по переменным $g_t, t = 0,1,...,n,$ а $\langle a,b \rangle$ – скалярное произведение двух $(n+1)$-мерный векторов a,b. Тогда частную производную f'_{g_t} можно было бы интерпретировать, как коэффициент эластичности по параметру $a = g_t$. И все остальное осталось бы без изменения в предлагаемой модели исследования устойчивости.

К сожалению, функция $f(g)$ связанного максимума (23), вообще говоря, не дифференцируема (см. [4]). Но она будет при определенных условиях дифференцируемой по любому направлению l в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E_{n+1}. Рассмотрим сначала модельный пример, когда функция $f(g)$, есть конечный максимум от дифференцируемых функций $f_k(g), k = 1,2,...,m,$ с распадающимися переменными:

$$f(g) = \max_{k=1,2,...,m} f_k(g), \qquad (27)$$

а потом вернемся к общему случаю. Тогда ее производная

$$\partial f(g)/\partial l = \lim_{\lambda\to +0}\frac{f(g+\lambda l)-f(g)}{\lambda}, \qquad (28)$$

по любому направлению l в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E_{n+1} определяться формулой [6]:

$$\partial f(g)/\partial l = \max_{k\in N(g)}\langle f_k'(g), l\rangle, \qquad (29)$$

где $M(g)$ – подмножество множества индексов $M=\{1,2,\dots,m\}$, в которых достигается максимум в (27). В [4] это множество в виду важности имеет специальное обозначение:

$$M(g)=\underset{k\in M}{Arg\max} f_k(g). \qquad (30)$$

Для производной по направлению (28) имеет место аналог соотношения (24) [6]:

$$\Delta_l f(g) = f(g+\lambda l)-f(g) = \lambda\frac{\partial f(g)}{\partial l}+o(\lambda), \qquad (31)$$

где величина $o(\lambda)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{o(\lambda)}{\lambda}\to 0, \lambda\to +0, \qquad (32)$$

Равномерно по $l\in E_{n+1}, |l|=1.$ Здесь $|l|$ – норма вектора l в E_{n+1}. В частности при $l=\Delta g/|g|$ получим из (31):

$$f(g+\lambda l)-f(g) = |\Delta g|\frac{\partial f(g)}{\partial l}+o(|\Delta g|) =$$

$$= |\Delta g|\max_{k\in N(g)}\left\langle f_k'(g), \frac{\Delta g}{|\Delta g|}\right\rangle + o(|\Delta g|) = \qquad (33)$$

$$= \max_{k\in N(g)}\langle f_k'(g), \Delta g\rangle + o(|\Delta g|).$$

Это позволило нам назвать в [5] обобщенным дифференциалом функции максимума (21) выражение:

$$Df(g) = \max_{k\in N(g)}\langle f_k'(g), \Delta g\rangle. \qquad (34)$$

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$|\ \langle f_k'(g), \Delta g\rangle\ | \le |f_k'(g)| * |\Delta g|,$$

из (34) следует неравенство:

$$-\min_{k\in N(g)}|f_k'(g)| * |\Delta g| \le Df(g) \le \max_{k\in N(g)}|f_k'(g)| * |\Delta g|. \qquad (35)$$

Введем обозначения:

$$K_0 = K_0(g) = \min_{k\in N(g)}|f_k'(g)|; \qquad (36)$$

$$K_1 = K_1(g) = \max_{k\in N(g)}|f_k'(g)|.$$

Тогда неравенство (35) можно записать в следующем виде:

$$-\underset{k\in N(g)}{K_0} * |\Delta g| \le Df(g) \le \underset{k\in N(g)}{K_1} * |\Delta g|. \qquad (37)$$

Величины (36) можно интерпретировать, как два обобщенных коэффициента эластичности – верхний и нижний – по векторному параметру $a=g$, но уже в ослабленном смысле неравенства (37). Эти коэффициенты имеют ясный геометрический смысл и представляют собой, соответственно, минимум и максимум нормы градиентов функций, доставляющих при данном g максимум в (27). При этом обобщенный дифференциал $Df(g)$ представляет собой, по сути, максимум из некоторых обычных дифференциалов $df_k(g)=\langle f_k'(g), \Delta g\rangle$. И все остальное остается без изменений в предлагаемой модели исследования устойчивости.

Поскольку для дифференцируемых функций $f_k(g), k = 1,2,\dots,m,$ справедлива формула [3]:

$$\partial f_k(g)/\partial l = \langle f_k'(g), l\rangle, k=1,2,\dots,m, \qquad (38)$$

То формуле (23) можно придать вид:

$$\partial f(g)/\partial l = \max_{k\in N(g)}\partial f_k(g)/\partial l. \qquad (39)$$

В таком виде формула (32) допускает обобщение на дифференцируемые по направлению функции $f_k(g), k = 1,2,\dots,m.$ Например, тоже некоторые функции максимума от дифференцируемых функций. Это и понятно, поскольку тогда можно представить итоговую функцию $f(g)$ в форме единого максимума типа (27-21).

Далее, следует отметить, что все сказанное остается справедливым и для функции минимума, поскольку любой минимум можно представить как минус максимум от функций, взятых со знаком минус [3]. При этом оператор взятия максимума в (32), естественно, заменяется на оператор взятия минимума.

Таким образом, исследование устойчивости критерия в однопараметрической задаче (возможно с векторным параметром g) (11, 6, 7, 8, 14, 15) сводится к задаче построения обобщенного дифференциала, которая была решена в [1] .

4. Построение обобщенного дифференциала: общая схема решения двухпараметрической задачи

Предположим, что множество допустимых решений $Z(g)$ задачи (19, 7, 8, 14, 15) не пусто и оптимальное решение $Z_t = Z_t(g), t=0,1,\dots,n-1,$ находится из рекуррентного уравнения (21). В силу единственности решения рекуррентного уравнения (21), которое для двухпараметрической задачи с параметрами g,r, каждый из которых может быть векторным, т.е. $g,r\in E_{n+1}$ принимает вид:

$$Z_{t-1} = \begin{cases} \min\left(S_{t-1}; \dfrac{Z_t+q_t}{1+g_t'}\right); Z_t+q_t\ge 0; \\ \dfrac{Z_t+q_t}{1+r_t'}; Z_t+q_t<0. \end{cases} \qquad (40)$$

с конечным условием (8):

$$Z_n = Z_n^0,$$

задача (19, 7, 8, 14, 15) также имеет единственное решение $Z_t, t=0,1,\dots,n-1,$ и функция максимума $f=f(g,r)$ получается из общего выражения (19), подстановкой в него, полученного оптимального решения:

$$x^* = f(g,r) = \sum_{t=0}^{n-1}\frac{(i-g_t')Z_t^+ - (i-r_t')Z_t^-}{(1+i)^t}. \qquad (41)$$

Заметим, что выражению (40) можно придать вид:

$$Z_{t-1} = \min\left(S_{t-1}, \frac{Z_t+q_t}{1+g_t'}, \frac{Z_t+q_t}{1+r_t'}\right). \qquad (42)$$

Для доказательства формулы (42) достаточно рассмотреть два случая: $Z_t + q_t \geq 0$ и $Z_t + q_t < 0$. В первом случае $(Z_t + q_t)/(1+g'_t) < (Z_t + q_t)/(1+r'_t)$ в силу условия (17) и (42) равносильно верхней формуле в (40). Во втором случае $(Z_t + q_t)/(1+g'_t) > (Z_t + q_t)/(1+r'_t)$ в силу условия (17) и (42) равносильно нижней формуле в (40). Таким образом, установлено, что правые части формул (40) и (42) тождественны друг другу.

Заметим, что функции под знаком минимума в (42) являются дифференцируемыми по $g_t, r_t, t = 0,1,\ldots,n,$ и следовательно по $g, r \in E_{n+1}$. Отправляясь от граничного условия (8), нетрудно доказать методом математической индукции по $t = 0,1,\ldots,n-1,$ что функция $Z_t = Z_t(g,r), t = 0,1,\ldots,n-1,$ является минимумом из $2^{n-t+1} - 1$ дифференцируемых по $g, r \in E_{n+1}$ функций, т.е. слабо вогнутой функцией [7].

Итак, мы убедились, что все функции $Z_t = Z_t(g), t = 0,1,\ldots,n-1,$ являются слабо вогнутыми по (g,r) функциями. Заметим, что слагаемые под знаком суммы в (41) в силу рекуррентного уравнения (42) можно представить в виде:

$$f_t(g,r) = \min\left((i-g'_t)S_{t-1}, (i-g'_t) * \frac{Z_t + q_t}{1+g'_t}, (i-r'_t)\frac{Z_t + q_t}{1+r'_t}\right), t = 0,1,\ldots,n-1. \quad (43)$$

Доказательство проводится совершенно аналогично формуле (42). Поскольку коэффициенты $i - g'_t, i - r'_t$ в выражении (43), представляют положительные дифференцируемые по $g, r \in E_n$ функции, то их можно мысленно внести под знак минимума, если бы мы подставили в (43) выражение для $Z_t = Z_t(g)$, представив ее как конечный минимум от дифференцируемых функций, полученное согласно предыдущему утверждению. Тогда функции (43) стали бы представлены в виде конечных минимумов дифференцируемых функций, а критерий (41) стал бы суммой конечных минимумов дифференцируемых функций и, следовательно, сам является слабо вогнутым. Тем самым установлена слабая вогнутость критерия (41), которому всегда можно придать форму:

$$x^* = f(g,r) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k=1,\ldots,2^{n-t+1}-1} f_k^t(g,r), \quad (44)$$

где все функции $f_k^t(g,r), k \in K^t = \{1,\ldots,2^{n-t+1}-1\}, t = 0,1,\ldots,n-1$ являются дифференцируемыми по $g, r \in E_n^+$ в положительном ортанте E_n^+ пространства E_n. Вернее, в прямом произведении $E_n^+ * E_n^+$ ортанта E_n^+ самого на себя. Можно было бы выписать их в явном виде, но для нас важнее показать в данном случае, как строится обобщенный дифференциал.

В соответствии с формулами (43), (44) из [1], которые остаются с соответствующими изменениями справедливыми и для слабо вогнутых функций квазидифференциал функции (44) будет иметь вид:

$$\partial f(g) = \sum_{t=0}^{n-1} conv(\nabla f_k^t(g,r), k \in K^t(g,r)), \quad (45)$$

где обозначено:

$$K^t(g,r) = \underset{k \in K^t}{Argmin} f_k^t(g,r). \quad (46)$$

Обобщенный дифференциал функции $f(g,r)$ будет иметь вид:

$$Df(g,r) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k \in K^t(g,r)} \left(\langle \nabla_g f_k^t(g,r), \Delta g\rangle + \langle \nabla_r f_k^t(g,r), \Delta r\rangle\right). \quad (47)$$

Таким образом, и в этом случае задача построения обобщенного дифференциала (34) для двухпараметрической задачи (19, 7, 8, 14, 15) с параметрами g, r, каждый из которых может быть векторным, решена во всей полноте.

Для построенного обобщенного дифференциала слабо вогнутой функции $f(g,r)$ имеет место неравенство (37), которое в данном случае будет иметь вид:

$$-\underset{k \in N(g)}{K_0} * (|\Delta g|^2 + |\Delta r|^2)^{1/2} \leq Df(g,r) \leq \underset{k \in N(g)}{K_1} * (|\Delta g|^2 + |\Delta r|^2)^{1/2},$$

Величины обобщенных коэффициентов эластичности – верхнего и нижнего – по векторному параметру $a = (g,r)$, но уже в ослабленном смысле неравенства (47), можно подсчитать по формулам:

$$K_0(g,r) = \sum_{t=0}^{n-1} \max_{k \in K^t(g,r)} (|\nabla_g f_k^t(g,r)|^2 + |\nabla_r f_k^t(g,r)|^2)^{1/2}; \quad (48)$$

$$K_1(g,r) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k \in K^t(g,r)} (|\nabla_g f_k^t(g,r)|^2 + |\nabla_r f_k^t(g,r)|^2)^{1/2}. \quad (49)$$

Здесь ∇_g, ∇_r – обозначает градиенты по переменным g и r, соответственно. Как видим, коэффициенты элластичности и в этом случае не совпадают, что обобщает известный эффект для однопараметрической задачи, отмеченный в литературе, имеющий место в силу возможного несовпадения левой и правой производной по направлению для недифференцируемых функций одной переменной.

5. Построение обобщенного дифференциала: уравнения для функций $f_k^t(g,r)$ и их градиентов

В предыдущем пункте в силу (42) было фактически установлено, что

$$Z_t = \min\left(\bar{f}_k^t(g,r), k = 1,\ldots 2^{n-t+1}-1\right), t = n,\ldots,0, \quad (50)$$

где все функции $\bar{f}_k^t(g,r), k \in K^t = \{1,\ldots,2^{n-t+1}-1\}, t = 0,1,\ldots,n,$ являются дифференцируемыми в прямом произведении $E_{n+1}^+ * E_{n+1}^+$ положительного ортанта E_{n+1}^+ пространства E_{n+1} самого на себя.

Подставляя выражение (50) для Z_t последовательно в конечное условие (8) и рекуррентное уравнение (42), получим

$$\bar{f}_1^n(g,r) \equiv Z_n^0, \quad (51)$$

$$Z_{t-1} = \min\left(S_{t-1}, \min_{k=1,\ldots,2^{n-t+1}-1} \frac{\bar{f}_k^t(g,r) + q_t}{1+g'_t}\right) = \min_{k=1,\ldots,2\cdot(2^{n-t+1}-1)+1} \bar{f}_k^{t-1}(g,r), \quad (52)$$

Это уравнение будет выполняться, если положить, например:

$$\bar{f}_k^{t-1}(g,r)=\begin{cases}\dfrac{\bar{f}_k^t(g,r)+q_t}{1+g_t'}, \\ k=1,\ldots,2^{n-t+1}-1, \\ \dfrac{\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r)+q_t}{1+r_t'}, \\ k=2^{n-t+1},\ldots,2^{n-(t-1)+1}-2, \\ S_{t-1}, k=2^{n-(t-1)+1}-1,\end{cases} \quad t=n,\ldots,1. \quad (53)$$

Полученное таким образом рекуррентное уравнение позволяет найти последовательно, по крайней мере, в числах, значения всех функций $\bar{f}_k^t(g,r)$ при заданных $g,r\in E_{n+1}^+$, отправляясь от конечного условия (51).

Функции $f_k^t(g,r)$ в (44) в силу (43) связаны с функциями $\bar{f}_k^t(g,r)$ соотношением

$$f_k^t(g,r)=\begin{cases}(i-g_t')\bar{f}_k^t(g,r), \\ k=1,\ldots,2^{n-t+1}-1; \\ (i-r_t')\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r), \\ k=2^{n-t+1},\ldots,2^{n-(t-1)+1}-2; \\ (i-g_t')\bar{f}_k^t(g,r), \\ k=2^{n-(t-1)+1}-1;\end{cases} \quad t=n,\ldots,1. \quad (54)$$

Поэтому для получения функций $f_k^t(g,r)$ достаточно уметь строить функции $\bar{f}_k^t(g,r)$, вернее их градиенты $\nabla_g\bar{f}_k^t(g,r),\nabla_r\bar{f}_k^t(g,r)$ по g и r, поскольку в общей формуле (47) для обобщенного дифференциала функции связанного максимума в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционных проектов фигурируют только градиенты $\nabla_g f_k^t(g,r),\nabla_r f_k^t(g,r)$ по g и r функций $f_k^t(g,r)$.

Беря от обеих частей (54) последовательно градиенты по g и r, которые для определенности будем считать вектор-столбцами, и воспользовавшись формулой производная произведения, получим

$$\nabla_g f_k^t(g,r)=\begin{cases}-e_t(1-c)\bar{f}_k^t(g,r)+ \\ +(i-g_t')\nabla_g\bar{f}_k^t(g,r), \\ k=1,\ldots,2^{n-t+1}-1; \\ (i-r_t')\nabla_g\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r), \\ k=2^{n-t+1},\ldots,2^{n-(t-1)+1}-2; \\ -e_t(1-c)S_{t-1}, \\ k=2^{n-(t-1)+1}-1;\end{cases} \quad t=n,\ldots,1. \quad (55)$$

$$\nabla_r f_k^t(g,r)=\begin{cases}(i-g_t')\nabla_r\bar{f}_k^t(g,r), \\ k=1,\ldots,2^{n-t+1}-1; \\ -e_t(1-c)\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r)+ \\ +(i-r_t')\nabla_r\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r), \\ k=2^{n-t+1},\ldots,2^{n-(t-1)+1}-2; \\ \vec{0}, k=2^{n-(t-1)+1}-1;\end{cases} \quad t=n,\ldots,1. \quad (56)$$

Здесь e_t – вектор-столбец пространства E_{n+1} у которого все координаты равны нулю, кроме t-й, которая равна единице, $\vec{0}$ – вектор-столбец пространства E_{n+1} у которого все координаты равны нулю. Напомним, что c здесь представляет собой действующую ставку налога на прибыль.

Беря от обеих частей (53) последовательно градиенты по g и r, и воспользовавшись формулой производная произведения, получим рекуррентные уравнения в вариациях для $\nabla_g\bar{f}_k^t(g,r),\nabla_r\bar{f}_k^t(g,r)$

$$\nabla_g\bar{f}_k^{t-1}(g,r)=\begin{cases}-e_t(1-c)\dfrac{\bar{f}_k^t(g,r)+q_t}{(1+g_t')^2}+ \\ +\dfrac{1}{1+g_t'}\nabla_g\bar{f}_k^t(g,r), \\ k=1,\ldots,2^{n-t+1}-1; \\ \dfrac{\nabla_g\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r)}{1+r_t'}, \\ k=2^{n-t+1},\ldots,2^{n-(t-1)+1}-2; \\ \vec{0}, k=2^{n-(t-1)+1}-1;\end{cases} \quad t=n,\ldots,1. \quad (57)$$

$$\nabla_r\bar{f}_k^{t-1}(g,r)=\begin{cases}\dfrac{\nabla_r\bar{f}_k^t(g,r)}{1+g_t'}, \\ k=1,\ldots,2^{n-t+1}-1; \\ -e_t(1-c)\dfrac{\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r)+q_t}{(1+r_t')^2}+ \\ +\dfrac{1}{1+r_t'}\nabla_r\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r), \\ k=2^{n-t+1},\ldots,2^{n-(t-1)+1}-2; \\ \vec{0}, k=2^{n-(t-1)+1}-1,\end{cases} \quad t=n,\ldots,1. \quad (58)$$

Конечное условие для рекуррентных уравнений (57), (58) получается из (51):

$$\nabla_g\bar{f}_1^n(g,r)\equiv; \quad (59)$$

$$\nabla_r\bar{f}_1^n(g,r)\equiv\vec{0}. \quad (60)$$

Заметим, что уравнения (57), (59) и (58), (60) можно решать независимо друг от друга. Если g,r – скалярные параметры, т.е. все $g_t\equiv g,r_t\equiv r$, то уравнения (57-60) останутся справедливыми, если в них градиенты по g и r заменить на частные производные по g и r.

6. Числовой пример

Рассмотрим пример расчета коэффициентов эластичности для случая $n = 3$ и скалярных параметров g, r. Исходные данные представлены в табл. 1.

Таблица 1

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Параметр	*c*	*i*	Z_3^0
Значение	0,2	0,4	10
Параметр	Δg	S_0	q_1
Значение	0,01	62,13	50
Параметр	*g*	S_1	q_2
Значение	0,375	40	20
Параметр	*r*	S_2	q_3
Значение	0,25	20	30

Расчет функций $\bar{f}_k^{\,t}(g,r), Z_t(g,r)$ по формулам (50), (51), (53) представлен в табл. 2. Здесь для простоты обозначено $\bar{f}_k^{\,t}(g,r) = F_{k,t}(g,r)$.

Таблица 2

РАСЧЕТ ФУНКЦИИ $\bar{f}_k^{\,t}(g,r), Z_t(g,r)$ ПО ФОРМУЛАМ (50), (51), (53)

k	*t*	3	2	1	0
1	***F1,t(g,r)***	10	-15,38	3,55	41,19
2	***F2,t(g,r)***	-	-16,67	2,56	40,43
3	***F3,t(g,r)***	-	20,00	30,77	62,13
4	***F4,t(g,r)***	-	-	3,85	41,42
5	***F5,t(g,r)***	-	-	2,78	40,60
6	***F6,t(g,r)***	-	-	33,33	64,10
7	***F7,t(g,r)***	-	-	40,00	69,23
8	***F8,t(g,r)***	-	-	-	44,63
9	***F9,t(g,r)***	-	-	-	43,80
10	***F10,t(g,r)***	-	-	-	67,31
11	***F11,t(g,r)***	-	-	-	44,87
12	***F12,t(g,r)***	-	-	-	43,98
13	***F13,t(g,r)***	-	-	-	69,44
14	***F14,t(g,r)***	-	-	-	75,00
15	***F15,t(g,r)***	-	-	-	62,13
	Kt(g,r)	1	2	2	2
	Zt(g,r)	10,00	-16,67	2,56	40,43

Расчет функций $f_k^t(g,r), f_t(g,r), f(g,r)$ по формулам (41), (43), (54) представлен в табл. 3. Здесь для простоты обозначено $f_k^t(g,r) = f_{k,t}(g,r)$.

Таблица 3

РАСЧЕТ ФУНКЦИИ $f_k^t(g,r), f_t(g,r), f(g,r)$ ПО ФОРМУЛАМ (41), (43), (54)

K	*T*	3	2	1	0	*f(g)*
1	***f1,t(g,r)***	1,00	-1,54	0,36	4,12	-
2	***f2,t(g,r)***	-	-3,33	0,26	4,04	-
3	***f3,t(g,r)***	-	2,00	3,08	6,21	-
4	***f4,t(g,r)***	-	-	0,77	4,14	-
5	***f5,t(g,r)***	-	-	0,56	4,06	-
6	***f6,t(g,r)***	-	-	6,67	6,41	-
7	***f7,t(g,r)***	-	-	4,00	6,92	-
8	***f8,t(g,r)***	-	-	-	8,93	-
9	***f9,t(g,r)***	-	-	-	8,76	-
10	***f10,t(g,r)***	-	-	-	13,46	-
11	***f11,t(g,r)***	-	-	-	8,97	-
12	***f12,t(g,r)***	-	-	-	8,80	-
13	***f13,t(g,r)***	-	-	-	13,89	-
14	***f14,t(g,r)***	-	-	-	15,00	-
15	***f15,t(g,r)***	-	-	-	6,21	-
	Kt(g,r)	1	2	2	2	-
	ft(g,r)	1,00	-3,33	0,26	4,04	1,97

Расчет производных $\partial \bar{f}_k^{\,t}(g,r)/\partial g$ по формулам (57), (59) представлен в табл. 4. Здесь для простоты обозначено $\partial \bar{f}_k^{\,t}(g,r)/\partial g = F_{gk,t}(g)$.

Таблица 4

РАСЧЕТ ПРОИЗВОДНЫХ $\partial \bar{f}_k^{\,t}(g,r)/\partial g$ ПО ФОРМУЛАМ (57),(59)

k	*t*	3	2	1	0
1	***Fg1,t(g,r)***	0	10,24	-3,37	-25,08
2	***Fg2,t(g,r)***	-	0,83	-4,14	-24,69
3	***Fg3,t(g,r)***	-	0,00	-17,40	-35,87
4	***Fg4,t(g,r)***	-	-	-1,28	-24,90
5	***Fg5,t(g,r)***	-	-	-2,78	-24,56
6	***Fg6,t(g,r)***	-	-	1,67	-34,32
7	***Fg7,t(g,r)***	-	-	0,00	-39,53
8	***Fg8,t(g,r)***	-	-	-	0,30
9	***Fg9,t(g,r)***	-	-	-	0,21
10	***Fg10,t(g,r)***	-	-	-	2,56
11	***Fg11,t(g,r)***	-	-	-	0,64
12	***Fg12,t(g,r)***	-	-	-	0,46
13	***Fg13,t(g,r)***	-	-	-	5,56
14	***Fg14,t(g,r)***	-	-	-	3,33
15	***Fg15,t(g,r)***	-	-	-	0,00
	Kt(g,r)	1	2	2	2

Расчет производных $\partial f_k^t(g,r)/\partial g$ по формулам (55) представлен в таблице 5. Здесь для простоты обозначено $\partial f_k^t(g,r)/\partial g = f_{gk,t}(g)$.

Таблица 5

РАСЧЕТ ПРОИЗВОДНЫХ $\partial f_k^t(g,r)/\partial g$ ПО ФОРМУЛАМ (55)

k	*t*	3	2	1	0
1	***fg1,t(g,r)***	-8,00	13,33	-3,18	-35,46
2	***fg2,t(g,r)***	-	0,17	-2,47	-34,82
3	***fg3,t(g,r)***	-	-16,00	-26,36	-53,29
4	***fg4,t(g,r)***	-	-	-0,67	-35,63
5	***fg5,t(g,r)***	-	-	-0,83	-34,93
6	***fg6,t(g,r)***	-	-	-3,48	-54,71
7	***fg7,t(g,r)***	-	-	-32,00	-59,34
8	***fg8,t(g,r)***	-	-	-	-40,72
9	***fg9,t(g,r)***	-	-	-	-39,98
10	***fg10,t(g,r)***	-	-	-	-61,02
11	***fg11,t(g,r)***	-	-	-	-40,88
12	***fg12,t(g,r)***	-	-	-	-40,10
13	***fg13,t(g,r)***	-	-	-	-62,42
14	***fg14,t(g,r)***	-	-	-	-67,91
15	***fg15,t(g,r)***	-	-	-	-49,70
	Kt(g,r)	1	2	2	2
	fgkt(g,r),k ∈ Kt(g,r)	-8,00	0,17	-2,47	-34,82

Расчет производных $\partial \bar{f}_k^{\,t}(g,r)/\partial r$ по формулам (58), (60) представлен в табл. 6. Здесь для простоты обозначено $\partial \bar{f}_k^{\,t}(g,r)/\partial g = F_{rk,t}(g,r)$.

Таблица 6

РАСЧЕТ ПРОИЗВОДНЫХ $\partial \bar{f}^{t}_{k}(g,r)/\partial r$ ПО ФОРМУЛАМ (58),(60)

k	t	3	2	1	0
1	***Fr1,t(g,r)***	0	0,00	0,00	0,00
2	***Fr2,t(g,r)***	-	16,67	12,82	9,86
3	***Fr3,t(g,r)***	-	0,00	0,00	0,00
4	***Fr4,t(g,r)***	-	-	-3,85	-2,96
5	***Fr5,t(g,r)***	-	-	11,11	8,55
6	***Fr6,t(g,r)***	-	-	-33,33	-25,64
7	***Fr7,t(g,r)***	-	-	0,00	0,00
8	***Fr8,t(g,r)***	-	-	-	-44,63
9	***Fr9,t(g,r)***	-	-	-	-33,12
10	***Fr10,t(g,r)***	-	-	-	-67,31
11	***Fr11,t(g,r)***	-	-	-	-48,08
12	***Fr12,t(g,r)***	-	-	-	-34,72
13	***Fr13,t(g,r)***	-	-	-	-97,22
14	***Fr14,t(g,r)***	-	-	-	-75,00
15	***Fr15,t(g,r)***	-	-	-	0,00
	Kt(g,r)	1	2	2	2

Расчет производных $\partial f^{t}_{k}(g,r)/\partial r$ по формулам (56) представлен в табл. 7. Здесь для простоты обозначено $\partial f^{t}_{k}(g,r)/\partial r = f_{rk,t}(g)$.

Таблица 7

РАСЧЕТ ПРОИЗВОДНЫХ $\partial f^{t}_{k}(g,r)/\partial r$ ПО ФОРМУЛАМ (56)

k	t	3	2	1	0
1	***fr1,t(g,r)***	0,00	0,00	0,00	0,00
2	***fr2,t(g,r)***	-	12,31	1,28	0,99
3	***fr3,t(g,r)***	-	0,00	0,00	0,00
4	***fr4,t(g,r)***	-	-	-2,84	-0,30
5	***fr5,t(g,r)***	-	-	0,51	0,85
6	***fr6,t(g,r)***	-	-	-24,62	-2,56
7	***fr7,t(g,r)***	-	-	0,00	0,00
8	***fr8,t(g,r)***	-	-	-	-32,95
9	***fr9,t(g,r)***	-	-	-	-30,37
10	***fr10,t(g,r)***	-	-	-	-49,70
11	***fr11,t(g,r)***	-	-	-	-33,73
12	***fr12,t(g,r)***	-	-	-	-30,77
13	***fr13,t(g,r)***	-	-	-	-56,41
14	***fr14,t(g,r)***	-	-	-	-55,38
15	***fr15,t(g,r)***	-	-	-	0,00
	Kt(g,r)	1	2	-	2
	frt(g,r), k∈ Kt(g,r)	0,00	12,31	1,28	0,99

Расчет коэффициентов эластичности $K_0(g,r)$, $K_1(g,r)$ по формулам (48), (49) представлен в табл. 8. Здесь для простоты обозначено:

$$\partial f^{t}_{k}(g,r)/\partial g = f_{gk,t}(g);$$

$$\partial f^{t}_{k}(g,r)/\partial r = f_{rk,t}(g);$$

$$mod\, f_{gk,t}(g) = |\, f_{gk,t}(g)\, |;$$

$$mod\, f_{rk,t}(g) = |\, f_{rk,t}(g)\, |.$$

В последних трех столбцах табл. 8 вычислены соответственно коэффициенты эластичности $K_0(g) = 49,92;$ $K_1(g) = 49,92$, приращения $K_m\sqrt{\Delta g^2 + \Delta r^2}$, $m = 0,1$ при $\Delta g = \Delta r = 0,01 = 1\%$ в левой и правой части неравенства (37), и вытекающий из него диапазон возможных значений функции $f(g+\Delta g, r+\Delta r)$ с точностью до малых порядка $o(\sqrt{\Delta g^2 + \Delta r^2})$.

Таблица 8

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛАСТИЧНОСТИ $K_0(g,r), K_1(g,r)$ ПО ФОРМУЛАМ (48), (49)

t	2	1	0	$K_m(g,r)$, $m=0,1$	$K_m\sqrt{\Delta g^2+\Delta r^2}$, $m=0,1$	$f(g)+-K_m\sqrt{\Delta g^2+\Delta r^2}$, $m=0,1$
$f_{gk,t}(g,r), k\in K^t(g,r)$	0,17	-2,47	-34,82	-	-	-
$f_{rk,t}(g,r), k\in K^t(g,r)$	12,31	1,28	0,99	-	-	-
$\lvert f_{gk,t}(g,r)\rvert$	0,17	2,47	34,82	-	-	-
$\lvert f_{rk,t}(g,r)\rvert$	12,31	1,28	0,99	-	-	-
$(\lvert f_{gk,t}\rvert^2 + \lvert f_{rk,t}\rvert^2)^{1/2}$, $k\in K^t(g,r)$	12,31	2,78	34,83	-	-	-
$max(\lvert f_{gk,t}\rvert^2 + \lvert f_{rk,t}\rvert^2)^{1/2}$, $k\in K^t(g,r)$	12,31	2,78	34,83	49,92	0,53	2,50
$min(\lvert f_{gk,t}\rvert^2 + \lvert f_{rk,t}\rvert^2)^{1/2}$, $k\in K^t(g,r)$	12,31	2,78	34,83	49,92	0,53	1,44

Заключение

В заключение отметим, что в настоящей работе конструкция обобщенного дифференциала функции связанного максимума в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта доведена до алгоритмов, которые могут быть запрограммированы в MS Excel. Это делает предложенную методику практически значимой для анализа рисков изменения кредитной ставки в будущем и может быть полезно практикующим оценщикам и банковским аналитикам, специализирующихся на оценке предлагаемых банку инвестиционных проектов.

Литература

1. Беляков А.В. Об устойчивости инвестиционного проекта относительно возможного изменения кредитных и депозитных ставок [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Финансовая аналитика. – 2010. – №3. – С. 291-299.
2. Беляков А.В. Об оптимизации использования заемных средств в ходе осуществления инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков // Финансы и кредит. – 1999. – №7. – С. 2-7.
3. Беляков А.В. Устойчивость инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег и анализ рисков [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2010. – №2. – С. 299-305.
4. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс [Текст] / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
5. Оценка бизнеса [Текст] : учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М. : Финансы и статистика, 2002.
6. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст] // Deloitte&Touche. Декабрь 2003-март 2005.
7. Перевозчиков А.Г. Учет структуры капитала в моделях денежного потока для собственного и инвестированного капитала [Текст] / А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2006. – №1. – С. 163-166.

Ключевые слова

Оценка инвестиционных проектов; денежный поток на собственный и инвестированный капитал; стоимость собственного капитала; оптимизация финансирования проекта; стоимость денег; анализ рисков; обобщенный дифференциал стоимости собственного капитала как функции рисков; обобщенный коэффициент эластичности.

Беляков Александр Викторович

Перевозчиков Александр Геннадьевич

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается двухпараметрическая задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта. В качестве параметров выбрана стоимость кредитов и депозитов на рынке. Ранее авторами было установлено, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки по сравнению с действующей по договору об открытии кредитной линии. Было показано что, тем не менее, указанная функция является дифференцируемой по направлениям, и предложен способ их расчета. Полученные производные интерпретировались авторами как коэффициенты эластичности в предложенной методике анализа рисков. Из них, как было показано ими ранее, также можно сконструировать обобщенный дифференциал в силу равномерной сходимости нормированного остатка. Только он будет уже не линейной функцией приращения, а кусочно-линейной и выпуклой. Если параметр один, то это полностью решает задачу построения обобщенного дифференциала. Если же параметров хотя бы два, то это гораздо более сложная задача, и она изучалась авторами в предыдущей работе, в которой была выявлена общая структура обобщенного дифференциала в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта. На этой основе в настоящей работе получены рекуррентные уравнения, позволяющие в явном виде построить обобщенный дифференциал согласно общей методике.

Тем самым предложенная ими ранее методика анализа рисков получила дальнейшее развитие в виде перехода от однопараметрической к двухпараметрической задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта. Это позволяет оценить изменение стоимости проекта с оптимизацией финансирования в произвольном направлении одновременного изменения двух параметров риска, и тем самым служить математической моделью оценки влияния рисков на стоимость проекта. Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.В. Белякова, А.Г. Перевозчикова может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н, профессор, проректор по научной работе Тверского института экологии и менеджмента, декан факультета экономики и менеджмента