3. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3.1. ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА В ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

Беляков А.В., к.т.н., ведущий системный аналитик, ОАО «Прайм Групп», филиал в г. Твери;
Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор, академик РАЕН, профессор кафедры финансов и менеджмента, Тверской институт экологии и права

Рассматривается двухпараметрическая задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта в форме кредитной линии. Стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки. Ранее авторами было доказано что, тем не менее, указанная функция является дифференцируемой по направлениям, и была выявлена общая структура ее обобщенного дифференциала. На этой основе авторами были получены рекуррентные уравнения, позволяющие в явном виде построить обобщенный дифференциал в двухпараметрическом случае. Однако эта конструкция оказалась довольно громоздкой и в настоящей работе она оптимизируется в смысле сокращения числа перебираемых точек, также как это было сделано для однопараметрической задачи в предыдущей работе авторов.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта в форме кредитной линии. Известно [6, 7], что денежный поток (ДП) Q_t на собственный капитал X_t инвестора получается из денежного потока q_t на инвестированный капитал Y_t путем учета дополнительно суммы выплат процентов по кредиту и изменения задолженности Z_t. Трудность практического применения модели ДП на собственный капитал инвестора связана с отсутствием удовлетворительных моделей прогнозирования задолженности Z_t в прогнозный период $t = 1,2,\dots,n.$ В [8] изучались проблемы учета структуры капитала в двух основных моделях ДП для собственного и инвестированного капитала с учетом рекомендации [6]. С другой стороны, использование модели дисконтирования ДП на инвестированный капитал не позволяет оптимизировать финансирование ДП на собственный капитал. Поэтому возможны случаи, когда подсчитанная таким образом стоимость собственного капитала оказывается отрицательной тогда, как при оптимизации задолженности Z_t в прогнозный период $t = 1,2,\dots,n$, она может стать положительной [2].

В работе [2] было показано, как смоделировать ДП на собственный капитал с учетом оптимизации остатков фактической задолженности Z_t с учетом оптимизации финансирования. В работе [4] нами исследована устойчивость инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег и показано, как использовать полученные результаты для анализа рисков сопутствующих проекту. Показано, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки по сравнению с действующей по договору об открытии кредитной линии. Было доказано что, тем не менее, указанная функция является дифференцируемой по направлениям [5], и предложен способ расчета соответствующих производных. Полученные производные были интерпретированы нами как коэффициенты эластичности в предложенной методике анализа рисков. Из них, как нам удалось показать, тоже можно соорудить нечто вроде дифференциала в силу равномерной сходимости нормированного остатка. Только он будет уже не линейной функцией приращения, а кусочно-линейной и выпуклой.

Если параметр один, то это полностью решает задачу построения обобщенного дифференциала. Если же их хотя бы два, то это гораздо более сложная задача. В работе [3] мы полностью решили двухпараметрическую задачу, построив обобщенный дифференциал для случая двух параметров, представляющих собой соответственно кредитную и депозитную ставку, каждый из которых к тому же может зависеть от времени, т.е. быть векторным. На этой основе в работе [1] были получены рекуррентные уравнения, позволяющие в явном виде построить обобщенный дифференциал согласно общей методике [3]. Однако эта конструкция оказалась довольно громоздкой и в настоящей работе мы пытаемся ее оптимизировать в смысле сокращения числа перебираемых точек для каждого $t = 1,2,\dots,n.$

Такова суть нашей новой работы, которая может стать полезной банковским аналитикам, а также служить основой для дальнейших теоретических исследований в области анализа рисков.

1. Формализация задачи оптимизации кредитной линии

Предположим, что финансирование проекта осуществляется в форме предоставления заемщиком кредитной линии на весь срок действия проекта. Обозначим через $Z_t, t = 0,1,2,\dots,n,$ прогнозную величину заемного капитала на конец t-го года.

Платежи p_t по кредитной линии, включающие проценты и часть основного долга, можно представить в виде [4]:

$$p_t = Z_{t-1}g(1-c) - Z_t + Z_{t-1} = \\ = Z_{t-1}(1+g') - Z_t, t = 0,1,\dots,n. \quad (1)$$

Здесь обозначено для краткости:

$$g' = g(1-c),$$

где

c – ставка налога на прибыль.

Остаток долга должен находиться в пределах [4]:

$$0 \le Z_t, t = 0,1,\dots,n; \quad (2)$$

$$Z_t \le S_t, t = 0,1,\dots,n. \quad (3)$$

В отличие от [2] в [4] мы допускали переменный объем кредитной линии $S = S_t, t = 0,1,\dots,n,$ и ненулевые начальные и конечные значения остатков, необходимых для расчета платежей по формуле (1):

$$Z_{-1} = Z^0_{-1}, Z_n = Z^0_n. \quad (4)$$

Здесь Z^0_{-1} – фактический остаток долга на начало нулевого года прежнего владельца проекта, в отличие от планируемого остатка Z_0 – нового владельца. Он нужен для расчета платежа p_0 по формуле (1), а Z^0_n – планируемый остаток по кредитной линии на конец n -го года.

Пусть q_t – прогноз денежного потока на инвестированный капитал на конец t – го года. Обозначим через i – подходящую ставку дисконта на собственный капитал и рассмотрим задачу оптимизации кредитной линии по критерию максимума текущей стоимости собственного капитала инвестора [2]:

$$X=\sum_{t=0}^{n}\frac{q_t-p_t}{(1+i)^t}\to max\,. \tag{5}$$

Можно показать, что критерий (5) эквивалентен критерию [2]:

$$x=F(z,g)=\sum_{t=0}^{n-1}\frac{(i-g')Z_t}{(1+i)^t}\to max\,. \tag{6}$$

Здесь z – n – мерный вектор с координатами $Z_t, t=0,1,\dots,n.$

Таким образом, при условии положительного левереджа $i-g'>0$ инвестор имеет на остатках заемных средствах маржу $i-g'$. Под $q_0=-C<0$ в [2] понимается начальные вложения капитала, складывающиеся из собственных средств инвестора $q_0-p_0<0$ и стартового кредита $p_0=-Y<0$ в счет открытой кредитной линии. Предполагается, что выполнено условие, которое называется условием «консолидированных» затрат [2]:

$$q_t-p_t\ge 0;\ t=1,2,\dots,n. \tag{7}$$

При выполнении этого условия величины q_t, p_t могут иметь произвольные знаки. В этом случае дополнительные вложения в проект делаются не за счет инвестора, а за счет новых кредитов.

При $t=0$ должно выполняться ослабленное условие [2]:

$$q_0-p_0\ge -H. \tag{8}$$

Величина H интерпретируется в модели, как величина собственных средств. Согласно формуле (1) для платежей по кредитной линии условие (8) будет иметь вид (11) в новых переменных, а условие консолидированных затрат (7) принимает форму:

$$(1+g')Z_{t-1}-Z_t\le q_t,\ t=1,2,\dots,n. \tag{9}$$

В [2] изучалась задача максимизации (6) с ограничениями (2, 3, 4, 9, 11).

План, построенный по формуле [2]:

$$Z_{t-1}=min\left(S_{t-1};\ \frac{Z_t+q_t}{1+g'}\right),\ t=n,\dots,1, \tag{10}$$

обеспечивает выполнение условия консолидированных затрат (9), условия (3) по максимальному объему кредитной линии, и при этом позволяет поддерживать остаток долга на максимальном уровне. Аналогично тому, как это было сделано в [2] доказывается, что если план (4, 10) удовлетворяет условиям (2) и (11), то он оптимален (оптимальность), а если не удовлетворяет, то не существует допустимых планов рассматриваемой задачи. При этом все составляющие любого другого допустимого плана Z' не превосходят соответствующих составляющих плана Z (доминирование):

$$Z'_t\le Z_t,\ t=0,\dots,n-1.$$

Для не пустоты множества допустимых планов в задаче с обобщенными условиями (8) «консолидированных» затрат, таким образом, необходимо и достаточно выполнения неравенства:

$$-H\le q_0+Z_0-(1+g')Z^0_{-1}. \tag{11}$$

Если снять ограничения (2), то отрицательные значения остатков можно интерпретировать как величины остатков на депозитном счете с обратным знаком. Допуская возможность размещения временно свободных средств на депозитном счете, получим следуя [2] задаче максимизации (5) с ограничениями (3, 4, 9, 11). В такой постановке допустимыми могут быть, например, проекты у которых $q_n<0.$

Депозитная ставка r, вообще говоря, меньше кредитной:

$$r<g. \tag{12}$$

Формула (1), устанавливающая связь между платежами и остатками долга будет иметь теперь вид:

$$Z_t=\begin{cases}(1+g')Z_{t-1}-p_t,\ Z_{t-1}\ge 0;\\ (1+r')Z_{t-1}-p_t,\ Z_{t-1}<0.\end{cases} \tag{13}$$

Можно показать, что критерий (10) эквивалентен в этом случае критерию [2]:

$$\sum_{t=0}^{n-1}\frac{(i-g')Z_t^+-(i-r')Z_t^-}{(1+i)^t}\to max\,. \tag{14}$$

Здесь

$$Z_t^+=max(0;Z_t),\ Z_t^-=max(0;-Z_t). \tag{15}$$

Эти величины представляют собой суть обязательства и требования. При выборе оптимального плана следует считать, что в любой момент времени либо обязательства в любой момент времени равны нулю. В противном случае в силу условия (12) фирма имела бы убытки, и такой план был бы не оптимальным. При таком предположении величина Z_0 означает либо остаток долга, если она положительна, либо накопленную сумму на депозите, если она отрицательна.

Вместо (10) используется рекуррентное уравнение [2]:

$$Z_{t-1}=\begin{cases}min\left(S_{t-1};\ \dfrac{Z_t+q_t}{1+g'}\right);\ Z_t+q_t\ge 0;\\[2ex] \dfrac{Z_t+q_t}{1+r'};\ Z_t+q_t<0.\end{cases} \tag{16}$$

Здесь $t=n,\dots,1$.

Аналогично тому, как это было сделано в [2], доказывается, что если план (16, 4) удовлетворяет условию (11), то он оптимален (оптимальность), а если не удовлетворяет, то не существует допустимых планов изучаемой задачи. При этом все составляющие любого другого допустимого плана Z' не превосходят соответствующих составляющих плана Z (доминирование).

2. Анализ устойчивости проекта: общая схема

В [4] была предложена общая схема исследования устойчивости инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег на рынке, заданных кредитной ставкой g. Сначала рассмотрим однопараметрическую задачу максимизации (6) с ограничениями (2, 3, 4, 9, 11):

$$x^*=f(g)=\max_{z\in Z(g)}F(z,g). \tag{17}$$

Здесь $Z(g)$ – множество допустимых решений задачи.

Заметим, что задача (17) при заданном g, представляет собой задачу линейного программирования (ЛП) специального вида, типа задачи дискретного оптимального управления с интегральным функционалом. Таким образом, задача (17) является параметрической задачей ЛП специального вида, и текущая стоимость $f(g)$ проекта определена нами в [4] как функция максимума со связанными переменными с учетом действующей на рынке средней стоимости заемных средств $g\%$, выделенных для финансирования аналогичных проектов. В момент заключения реального договора о предоставлении инвестору кредитной линии рыночная стоимость заемных средств может составить величину:

$$a = g + \Delta g ,$$

где Δg – малый параметр, представляющий собой консолидированный процентный риск.

Необходимо исследовать устойчивость максимальной стоимости от заданного параметра. Если бы в точке $a = g$ функция (17) была бы дифференцируема, то поставленная задача свелась бы к нахождению дифференциал $df(g) = f'(g)\Delta g$ от стоимости (17). В самом деле, тогда было верно бы представление:

$$\Delta f(g) = f'(g)\Delta g + o(\Delta g), \tag{18}$$

где величина $o(\Delta g)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{o(\Delta g)}{\Delta g} \to 0, \Delta g \to 0. \tag{19}$$

Из (19) следовало бы, что справедливо приближенное равенство:

$$\Delta f(g) \approx f'(g)\Delta g.$$

И производную $f'(g)$ можно было бы интерпретировать, как коэффициент эластичности. Его величина и знак и определяли бы, какое изменение скорректированной стоимости проекта соответствовало бы малому изменению базовой ставки по кредитам. Вот статическая модель такого исследования. Динамическая, состоит в том, что параметр $a = g_t$ представляет собой функцию времени $t = 0,1,\ldots,n,$ т.е. n – мерный вектор. Например, кредитору известен соответствующий прогноз изменения базовых ставок на рынке и он поручает своему аналитику проверить, в какой степени изменение рыночных ставок в будущем скажется на изменении стоимости проекта. И если в результате переоценки ожидается снижение стоимости проекта, то кредитор может пропорционально снизить объем кредитной линии, хеджируя риск снижения стоимости проекта. В этом случае, следовало бы построить дифференциал функции $n+1$ переменной:

$$df(g) = \langle f'(g), \Delta g \rangle, \tag{20}$$

где

$f'(g)$ – это вектор частных производных $f'_{g_t} = \partial f / \partial g_t$ функции f по переменным $g_t, t = 0,1,\ldots,n,$ а $\langle a, b \rangle$ – скалярное произведение двух $(n+1)$ – мерный векторов a, b. Тогда частную производную f'_{g_t} можно было бы интерпретировать, как коэффициент эластичности по параметру $a = g_t$. И все остальное осталось бы без изменения в предлагаемой модели исследования устойчивости.

К сожалению, функция $f(g)$ связанного максимума (17), вообще говоря, не дифференцируема (см. [5]). Но она будет при определенных условиях дифференцируемой по любому направлению l в $(n+1)$ – мерном евклидовом пространстве E_{n+1}. Рассмотрим сначала модельный пример, когда функция $f(g)$, есть конечный максимум от дифференцируемых функций $f_k(g), k = 1,2,\ldots,m,$ с распадающимися переменными:

$$f(g) = \max_{k=1,2,\ldots,m} f_k(g), \tag{21}$$

а потом вернемся к общему случаю. Тогда ее производная:

$$\partial f(g) / \partial l = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(g + \lambda l) - f(g)}{\lambda}, \tag{22}$$

по любому направлению l в $(n+1)$ – мерном евклидовом пространстве E_{n+1} определяться формулой [5]:

$$\partial f(g) / \partial l = \max_{k \in N(g)} \langle f'_k(g), l \rangle, \tag{23}$$

где $M(g)$ – подмножество множества индексов $M = \{1,2,\ldots,m\}$, в которых достигается максимум в (21). В [5] это множество в виду важности имеет специальное обозначение:

$$M(g) = \underset{k \in M}{Argmax} f_k(g). \tag{24}$$

Для производной по направлению (22) имеет место аналог соотношения (18) [5]:

$$\Delta_l f(g) = f(g + \lambda l) - f(g) = \lambda \frac{\partial f(g)}{\partial l} + o(\lambda), \tag{25}$$

где величина $o(\lambda)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{o(\lambda)}{\lambda} \to 0, \lambda \to +0, \tag{26}$$

Равномерно по $l \in E_{n+1}, |l| = 1.$ Здесь $|l|$ – норма вектора l в E_{n+1}. В частности при $l = \Delta g / |g|$ получим из (25):

$$\begin{aligned} f(g + \lambda l) - f(g) &= |\Delta g| \frac{\partial f(g)}{\partial l} + o(|\Delta g|) = \\ &= |\Delta g| \max_{k \in N(g)} \left\langle f'_k(g), \frac{\Delta g}{|\Delta g|} \right\rangle + o(|\Delta g|) = \\ &= \max_{k \in N(g)} \langle f'_k(g), \Delta g \rangle + o(|\Delta g|). \end{aligned} \tag{27}$$

Это позволило нам назвать в [4] обобщенным дифференциалом функции максимума (21) выражение:

$$Df(g) = \max_{k \in N(g)} \langle f'_k(g), \Delta g \rangle. \tag{28}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$| \, |\langle f'_k(g), \Delta g \rangle| \, | \le |f'_k(g)| * |\Delta g|,$$

из (28-34) следует неравенство:

$$-\min_{k \in N(g)} |f'_k(g)| * |\Delta g| \le Df(g) \le \max_{k \in N(g)} |f'_k(g)| * |\Delta g|. \tag{29}$$

Введем обозначения:

$$K_0 = K_0(g) = \min_{k \in N(g)} |f'_k(g)|;$$

$$K_1 = K_1(g) = \max_{k \in N(g)} |f'_k(g)|. \tag{30}$$

Тогда неравенство (29-35) можно записать в следующем виде:

$$-\underset{k \in N(g)}{K_0} * |\Delta g| \le Df(g) \le \underset{k \in N(g)}{K_1} * |\Delta g|. \tag{31}$$

Величины (30) можно интерпретировать, как два обобщенных коэффициента эластичности – верхний и нижний – по векторному параметру $a = g$, но уже в ослабленном смысле неравенства (31). Эти коэффициенты имеют ясный геометрический смысл и представляют собой, соответственно, минимум и максимум нормы градиентов функций, доставляющих при данном g максимум в (21). При этом обобщенный дифференциал $Df(g)$ представляет собой по сути максимум из некоторых обычных дифференциалов $df_k(g) = \langle f_k'(g), \Delta g \rangle$. И все остальное остается без изменений в предлагаемой модели исследования устойчивости.

Поскольку для дифференцируемых функций:

$$f_k(g), k = 1,2,\ldots,m,$$

справедлива формула [4]: (32-38)

$$\partial f_k(g) / \partial l = \langle f_k'(g), l \rangle, k = 1,2,\ldots,m, \quad (32)$$

То формуле (23) можно придать вид (33-39):

$$\partial f(g) / \partial l = \max_{k \in N(g)} \partial f_k(g) / \partial l. \quad (33)$$

В таком виде формула (32) допускает обобщение на дифференцируемые по направлению функции:

$$f_k(g), k = 1,2,\ldots,m.$$

Например, тоже некоторые функции максимума от дифференцируемых функций. Это и понятно, поскольку тогда можно представить итоговую функцию $f(g)$ в форме единого максимума типа (21).

Далее, следует отметить, что все сказанное остается справедливым и для функции минимума, поскольку любой минимум можно представить как минус максимум от функций, взятых со знаком минус [4]. При этом оператор взятия максимума в (26), естественно, заменяется на оператор взятия минимума.

Таким образом, исследование устойчивости критерия в однопараметрической задаче (возможно с векторным параметром g (6, 2, 3, 4, 9, 11) сводится к задаче построения обобщенного дифференциала, которая была решена в [3].

3. Построение обобщенного дифференциала: общая схема решения двухпараметрической задачи

Предположим, что множество допустимых решений $Z(g)$ двухпараметрической задачи (14, 3, 4, 9, 11) не пусто и оптимальное решение:

$$Z_t = Z_t(g), t = 0,1,\ldots,n-1,$$

находится из рекуррентного уравнения (16). В силу единственности решения рекуррентного уравнения (16), которое для двухпараметрической задачи с параметрами g, r, каждый из которых может быть векторным, т.е. $g, r \in E_{n+1}$ принимает вид:

$$Z_{t-1} = \begin{cases} \min\left(S_{t-1}; \dfrac{Z_t + q_t}{1 + g_t'}\right); Z_t + q_t \geq 0; \\ \dfrac{Z_t + q_t}{1 + r_t'}; Z_t + q_t < 0. \end{cases} \quad (34)$$

с конечным условием (4):

$$Z_n = Z_n^0,$$

задача (14, 3, 4, 9, 11) также имеет единственное решение $Z_t, t = 0,1,\ldots,n-1,$ и функция максимума $f = f(g,r)$ получается из общего выражения (14), подстановкой в него, полученного оптимального решения:

$$x^* = f(g,r) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(i - g_t')Z_t^+ - (i - r_t')Z_t^-}{(1+i)^t}. \quad (35)$$

Заметим, что выражению (34) можно придать вид:

$$Z_{t-1} = \min\left(S_{t-1}, \frac{Z_t + q_t}{1 + g_t'}, \frac{Z_t + q_t}{1 + r_t'}\right), t = n,\ldots,1. \quad (36)$$

Для доказательства формулы (36) достаточно рассмотреть два случая:

$$Z_t + q_t \geq 0 \text{ и } Z_t + q_t < 0.$$

В первом случае:

$$(Z_t + q_t)/(1 + g_t') < (Z_t + q_t)/(1 + r_t'),$$

в силу условия (12), и уравнение (36) равносильно верхней формуле в (34). Во втором случае:

$$(Z_t + q_t)/(1 + g_t') > (Z_t + q_t)/(1 + r_t'),$$

в силу условия (12), и уравнение (36) равносильно нижней формуле в (34). Таким образом, установлено, что правые части формул (34) и (36) тождественны друг другу.

Заметим, что функции под знаком минимума в (36) являются дифференцируемыми по $g_t, r_t, t = 0,1,\ldots,n,$ и следовательно по $g, r \in E_{n+1}$. Отправляясь от граничного условия (4), нетрудно доказать методом математической индукции по $t = n,\ldots,0,$ что функция:

$$Z_t = Z_t(g,r), t = 0,\ldots,n,$$

является минимумом из $2^{n-t+1} - 1$ дифференцируемых по $g, r \in E_{n+1}$ функций, т.е. слабо вогнутой функцией [7].

Итак, мы убедились, что все функции:

$$Z_t = Z_t(g), t = 0,1,\ldots,n-1,$$

являются слабо вогнутыми по (g,r) функциями. Заметим, что слагаемые под знаком суммы в (35) в силу рекуррентного уравнения (36) можно представить в виде:

$$f_{t-1}(g,r) = \min\Big((i - g_{t-1}')S_{t-1},$$
$$(i - g_{t-1}')\frac{Z_t + q_t}{1 + g_t'}, (i - r_{t-1}')\frac{Z_t + q_t}{1 + r_t'}\Big), t = 1,\ldots,n. \quad (37)$$

Доказательство проводится совершенно аналогично формуле (36). Поскольку коэффициенты $i - g_t', i - r_t'$ в выражении (37), представляют положительные дифференцируемые по $g, r \in E_n$ функции, то их можно мысленно внести под знак минимума, если бы мы подставили в (37) выражение для $Z_t = Z_t(g,r)$, представив ее как конечный минимум от дифференцируемых функций, полученное согласно предыдущему утверждению. Тогда функции (37) стали бы представлены в виде конечных минимумов дифференцируемых функций, а критерий (35) стал бы суммой конечных минимумов дифференцируемых функций и, следовательно, сам является слабо вогнутым. Тем самым установлена слабая вогнутость критерия (35), которому всегда можно придать форму:

$$x^* = f(g,r) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k=1,\ldots,2^{n-t+1}-1} f_k^t(g,r), \quad (38)$$

где все функции:

$$f_k^t(g,r), k \in K^t = \{1,\ldots,2^{n-t+1} - 1\}, t = 0,1,\ldots,n-1,$$

являются дифференцируемыми по $g, r \in E_n^+$ в положительном ортанте E_n^+ пространства E_n. Вернее, в прямом произведении $E_n^+ * E_n^+$ ортанта E_n^+ самого на себя. Можно было бы выписать их в явном виде, но для нас важнее показать в данном случае, как строится обобщенный дифференциал.

В соответствии с формулами (43, 44) из [3], которые остаются с соответствующими изменениями справедливыми и для слабо вогнутых функций квазидифференциал функции (38) будет иметь вид:

$$\partial f(g) = \sum_{t=0}^{n-1} conv(\nabla f_k^t(g,r), k \in K^t(g,r)), \qquad (39)$$

где обозначено:

$$K^t(g,r) = \underset{k \in K^t}{Argmin} f_k^t(g,r). \qquad (40)$$

Обобщенный дифференциал функции $f(g,r)$ будет иметь вид:

$$Df(g,r) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k \in K^t(g,r)} (\langle \nabla_g f_k^t(g,r), \Delta g \rangle + \langle \nabla_r f_k^t(g,r), \Delta r \rangle). \qquad (41)$$

Таким образом, и в этом случае задача построения обобщенного дифференциала (28) для двухпараметрической задачи (14, 3, 4, 9, 11) с параметрами g, r, каждый из которых может быть векторным, решена во всей полноте.

Для построенного обобщенного дифференциала слабо вогнутой функции $f(g,r)$ имеет место неравенство (31), которое в данном случае будет иметь вид:

$$-\underset{k \in N(g)}{K_0} * (|\Delta g|^2 + |\Delta r|^2)^{1/2} \le Df(g,r) \le$$

$$\le \underset{k \in N(g)}{K_1} * (|\Delta g|^2 + |\Delta r|^2)^{1/2}.$$

Величины обобщенных коэффициентов эластичности – верхнего и нижнего – по векторному параметру $a = (g,r)$ можно подсчитать по формулам:

$$K_0(g,r) = \sum_{t=0}^{n-1} \max_{k \in K^t(g,r)} (|\nabla_g f_k^t(g,r)|^2 + |\nabla_r f_k^t(g,r)|^2)^{1/2}, \qquad (42)$$

$$K_1(g,r) = \sum_{t=0}^{n-1} \min_{k \in K^t(g,r)} (|\nabla_g f_k^t(g,r)|^2 + |\nabla_r f_k^t(g,r)|^2)^{1/2}. \qquad (43)$$

Здесь ∇_g, ∇_r – обозначает градиенты по переменным g и r, соответственно. Как видим, коэффициенты эластичности и в этом случае не совпадают, что обобщает известный эффект для однопараметрической задачи, отмеченный в литературе, имеющий место в силу возможного несовпадения левой и правой производной по направлению для недифференцируемых функций одной переменной.

4. Построение обобщенного дифференциала: уравнения для функций $f_k^t(g,r)$ и их градиентов

В предыдущем пункте в силу (36-42) было фактически установлено, что:

$$Z_t = \min\left(\bar{f}_k^t(g,r), k = 1,\ldots,2^{n-t+1}-1\right), t = n,\ldots,0, \qquad (44)$$

где все функции:

$$\bar{f}_k^t(g,r), k \in K^t = \{1,\ldots,2^{n-t+1}-1\}, t = 0,1,\ldots,n,$$

являются дифференцируемыми в прямом произведении $E_{n+1}^+ * E_{n+1}^+$ положительного ортанта E_{n+1}^+ пространства E_{n+1} самого на себя.

Подставляя выражение (44) для Z_t последовательно в конечное условие (4) и рекуррентное уравнение (36), получим

$$\bar{f}_1^n(g,r) \equiv Z_n^0; \qquad (45)$$

$$Z_{t-1} = \min\begin{pmatrix} S_{t-1}, \min\limits_{k=1,\ldots,2^{n-t+1}-1} \dfrac{\bar{f}_k^t(g,r)+q_t}{1+g_t'}, \\ \min\limits_{k=2^{n-t+1}-1} \dfrac{\bar{f}_k^t(g,r)+q_t}{1+r_t'} \end{pmatrix} = \qquad (46)$$

$$= \min_{k=1,\ldots,2\cdot(2^{n-t+1}-1)+1} \bar{f}_k^{t-1}(g,r).$$

Это уравнение будет выполняться, если положить, например:

$$\bar{f}_k^{t-1}(g,r) = \begin{cases} \dfrac{\bar{f}_k^t(g,r)+q_t}{1+g_t'}, \\ k = 1,\ldots,2^{n-t+1}-1; \\ \dfrac{\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r)+q_t}{1+r_t'}; \\ k = 2^{n-t+1},\ldots,2^{n-(t-1)+1}-2, \\ S_{t-1}, k = 2^{n-(t-1)+1}-1. \end{cases} \quad t = n,\ldots,1. \qquad (47)$$

Полученное таким образом рекуррентное уравнение позволяет найти последовательно, по крайней мере, в числах, значения всех функций $\bar{f}_k^t(g,r)$ при заданных $g, r \in E_{n+1}^+$, отправляясь от конечного условия (45).

Функции $f_k^t(g,r)$ в (38) в силу (37) связаны с функциями $\bar{f}_k^t(g,r)$ соотношением

$$f_k^{t-1}(g,r) = \begin{cases} (i - g_{t-1}')\bar{f}_k^t(g,r), \\ k = 1,\ldots,2^{n-t+1}-1; \\ (i - r_{t-1}')\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r), \\ k = 2^{n-t+1},\ldots,2^{n-(t-1)+1}-2; \\ (i - g_{t-1}')\bar{f}_k^t(g,r), \\ k = 2^{n-(t-1)+1}-1. \end{cases} \quad t = n,\ldots,1. \qquad (48)$$

Поэтому для получения функций $f_k^t(g,r)$ достаточно уметь строить функции $\bar{f}_k^t(g,r)$, вернее их градиенты $\nabla_g \bar{f}_k^t(g,r), \nabla_r \bar{f}_k^t(g,r)$ по g и r, поскольку в общей формуле (41) для обобщенного дифференциала функции связанного максимума в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционных проектов фигурируют только градиенты $\nabla_g f_k^t(g,r), \nabla_r f_k^t(g,r)$ по g и r функций $f_k^t(g,r)$.

Беря от обеих частей (48) последовательно градиенты по g и r, которые для определенности будем считать вектор-столбцами, и воспользовавшись формулой производная произведения, получим:

$$\nabla_g f_k^{t-1}(g,r)=\begin{cases}-e_{t-1}(1-c)\overline{f}^{t}_{k}(g,r)+\\ +(i-g'_{t-1})\nabla_g\overline{f}^{t}_{k}(g,r),\\ k=1,\dots,2^{n-t+1}-1;\\ (i-r'_{t-1})\nabla_g\overline{f}^{t}_{k-2^{n-t+1}+1}(g,r),\ t=n,\dots,1.\\ k=2^{n-t+1},\dots,2^{n-(t-1)+1}-2;\\ -e_{t-1}(1-c)S_{t-1},\\ k=2^{n-(t-1)+1}-1.\end{cases}\quad(49)$$

$$\nabla_r f_k^{t-1}(g,r)=\begin{cases}(i-g'_{t-1})\nabla_r\overline{f}^{t}_{k}(g,r),\\ k=1,\dots,2^{n-t+1}-1;\\ -e_{t-1}(1-c)\overline{f}^{t}_{k-2^{n-t+1}+1}(g,r)+\\ +(i-r'_{t-1})\nabla_r\overline{f}^{t}_{k-2^{n-t+1}+1}(g,r),\\ k=2^{n-t+1},\dots,2^{n-(t-1)+1}-2;\\ \vec{0},k=2^{n-(t-1)+1}-1;\end{cases}\quad t=n,\dots,1.\quad(50)$$

Здесь e_t – вектор-столбец пространства E_{n+1} у которого все координаты равны нулю, кроме t – й, которая равна единице, $\vec{0}$ – вектор-столбец пространства E_{n+1} у которого все координаты равны нулю. Напомним, что c здесь представляет собой действующую ставку налога на прибыль.

Беря от обеих частей (47) последовательно градиенты по g и r, и воспользовавшись формулой производная произведения, получим рекуррентные уравнения в вариациях для $\nabla_g\overline{f}^{t}_{k}(g,r),\nabla_r\overline{f}^{t}_{k}(g,r)$.

$$\nabla_g\overline{f}^{t-1}_{k}(g,r)=\begin{cases}-e_t(1-c)\dfrac{\overline{f}^{t}_{k}(g,r)+q_t}{(1+g'_t)^2}+\\ +\dfrac{1}{1+g'_t}\nabla_g\overline{f}^{t}_{k}(g,r),\\ k=1,\dots,2^{n-t+1}-1;\\ \dfrac{\nabla_g\overline{f}^{t}_{k-2^{n-t+1}+1}(g,r)}{1+r'_t},\\ k=2^{n-t+1},\dots,2^{n-(t-1)+1}-2;\\ \vec{0},k=2^{n-(t-1)+1}-1.\end{cases}\quad t=n,\dots,1.\quad(51)$$

$$\nabla_r\overline{f}^{t-1}_{k}(g,r)=\begin{cases}\dfrac{\nabla_r\overline{f}^{t}_{k}(g,r)}{1+g'_t},k=1,\dots,2^{n-t+1}-1;\\ -e_t(1-c)\dfrac{\overline{f}^{t}_{k-2^{n-t+1}+1}(g,r)+q_t}{(1+r'_t)^2}+\\ +\dfrac{1}{1+r'_t}\nabla_r\overline{f}^{t}_{k-2^{n-t+1}+1}(g,r),\\ k=2^{n-t+1},\dots,2^{n-(t-1)+1}-2;\\ \vec{0},k=2^{n-(t-1)+1}-1.\end{cases}\quad t=n,\dots,1.\quad(52)$$

Конечное условие для рекуррентных уравнений (51), (52) получается из (45):

$$\nabla_g\overline{f}^{n}_{1}(g,r)\equiv\vec{0};\quad(53)$$

$$\nabla_r\overline{f}^{n}_{1}(g,r)\equiv\vec{0}.\quad(54)$$

Заметим, что уравнения (51, 53) и (52, 54) можно решать независимо друг от друга. Если g,r – скалярные параметры, т.е. все $g_t\equiv g,r_t\equiv r$, то уравнения (51-54) останутся справедливыми, если в них градиенты по g и r заменить на частные производные по g и r.

5. Оптимизация количества точек при вычислении обобщенного дифференциала

В пункте 3 было установлено, что

$$x^*=f(g,r)=\sum_{t=0}^{n-1}f_t(g,r);\quad(55)$$

$$f_t(g,r)=\min_{k=1,\dots,2^{n-t+1}-1}f_k^t(g,r),\quad(56)$$

где функции $f_k^t(g,r)$ в (56) связаны с функциями $\overline{f}^{t}_{k}(g,r)$ в (44):

$$Z_t=\min\left(\overline{f}^{t}_{k}(g,r),k=1,\dots,2^{n-t+1}-1\right),t=n,\dots,0,$$

соотношением (48):

$$f_k^{t-1}(g,r)=\begin{cases}(i-g'_{t-1})\overline{f}^{t}_{k}(g,r),\\ k=1,\dots,2^{n-t+1}-1;\\ (i-r'_{t-1})\overline{f}^{t}_{k-2^{n-t+1}+1}(g,r),\\ k=2^{n-t+1},\dots,2^{n-(t-1)+1}-2;\\ (i-g'_{t-1})\overline{f}^{t}_{k}(g,r),\\ k=2^{n-(t-1)+1}-1;\end{cases}\quad t=n,\dots,1.$$

По аналогии с множеством

$$K^t(g,r)=\underset{k\in K^t}{\mathrm{Argmin}}f_k^t(g,r),$$

введем множество

$$\overline{K}^t(g,r)=\underset{k\in K^t}{\mathrm{Argmin}}\overline{f}^{t}_{k}(g,r).$$

Используя соотношение (47):

$$\overline{f}^{t-1}_{k}(g,r)=\begin{cases}\dfrac{\overline{f}^{t}_{k}(g,r)+q_t}{1+g'_t},\\ k=1,\dots,2^{n-t+1}-1;\\ \dfrac{\overline{f}^{t}_{k-2^{n-t+1}+1}(g,r)+q_t}{1+r'_t},\\ k=2^{n-t+1},\dots,2^{n-(t-1)+1}-2;\\ S_{t-1},k=2^{n-(t-1)+1}-1,\end{cases}\quad t=n,\dots,1.$$

Индукцией по $t=n-1,\dots,0$ нетрудно доказать, что минимум в (44) достигается, либо при:

$k\in K_0^t(g,r)=\{2^{n-t},\dots,2^{n-t+1}-2\}$,

либо при остальных

$t\in K^t(g,r)/K_0^t(g,r)$.

Поскольку $i-g_t'>0, i-r_t'>0$ по условию положительного левереджа и соотношения между кредитной и депозитной ставками, то из сравнения (44) и (56) видно, что эти множества совпадают:

$$K^t(g)\equiv \bar{K}^t(g), t=n,...,1. \qquad (57)$$

Далее, из уравнения (46)

$$Z_{t-1}=\min\left(\begin{matrix} S_{t-1}, \min\limits_{k=1,...,2^{n-t+1}-1}\dfrac{\bar{f}_k^t(g,r)+q_t}{1+g_t'}, \\ \min\limits_{k=2^{n-t+1}-1}\dfrac{\bar{f}_k^t(g,r)}{1+r_t}\end{matrix}\right)=$$

$$=\min_{k=1,...,2\cdot(2^{n-t+1}-1)+1}\bar{f}_k^{t-1}(g,r),$$

в силу монотонности по $\bar{f}_k^t(g)$ функции под знаком второго и третьего минимума отсюда с учетом (47) следует, что

$$K^{t-1}(g)\subseteq K^t(g)\cup\left(2^{n-t+1}-1+K^t(g,r)\right)\cup \\ \cup\{n-(t-1)+1\}, t=n,...,1. \qquad (58)$$

Таким образом, для построения множества $K^{t-1}(g)$ на t-м шаге, $t=n,...,1,$ достаточно проверить только точки множества в правой части включения (58). Соответственно, (47) можно заменить на рекуррентное уравнение, предполагающее сокращенный перебор точек на t-м шаге:

$$\bar{f}_k^{t-1}(g,r)=\begin{cases}\dfrac{\bar{f}_k^t(g,r)+q_t}{1+g_t'}, \\ k\in K^t(g,r); \\ \dfrac{\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r)+q_t}{1+r_t'}, \\ k\in K^t(g,r)+2^{n-t+1}-1; \\ S_{t-1}, k=2^{n-(t-1)+1}-1.\end{cases} \quad t=n,...,1. \qquad (59)$$

В частности, если множества $K^t(g,r)$ состоят из одной точки, то на каждом шаге в (59) остается рассмотреть лишь по три точки.

Полученное таким образом «прореженное» рекуррентное уравнение (59) позволяет найти последовательно, по крайней мере, в числах, значения всех функций:

$$\bar{f}_k^t(g,r), k\in K^t(g,r)$$

при заданных $g,r\in E_n^+$, отправляясь от конечного условия (45)

$$\bar{f}_1^n(g)\equiv Z_n^0.$$

Беря от обеих частей (59) последовательно градиенты по g и r, и воспользовавшись формулой производная произведения, получим рекуррентные уравнения в вариациях для $\nabla_g\bar{f}_k^t(g,r), \nabla_r\bar{f}_k^t(g,r)$:

$$\nabla_g\bar{f}_k^{t-1}(g,r)=\begin{cases}-e_t(1-c)\dfrac{\bar{f}_k^t(g,r)+q_t}{(1+g_t')^2}+ \\ +\dfrac{1}{1+g_t'}\nabla_g\bar{f}_k^t(g,r), \\ k\in K^t(g,r); \\ \dfrac{\nabla_g\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r)}{1+r_t'}, \\ k\in K^t(g,r)+2^{n-t+1}-1; \\ \vec{0}, k=2^{n-(t-1)+1}-1;\end{cases} \quad t=n,...,1. \qquad (60)$$

$$\nabla_r\bar{f}_k^{t-1}(g,r)=\begin{cases}\dfrac{\nabla_r\bar{f}_k^t(g,r)}{1+g_t'}, \\ k\in K^t(g,r); \\ -e_t(1-c)\dfrac{\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r)+q_t}{(1+r_t')^2}+ \\ +\dfrac{1}{1+r_t'}\nabla_r\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r), \\ k\in K^t(g,r)+2^{n-t+1}-1; \\ \vec{0}, k=2^{n-(t-1)+1}-1.\end{cases} \quad t=n,...,1. \qquad (61)$$

Конечное условие для рекуррентных уравнений (60, 61) получается из (45):

$$\nabla_g\bar{f}_1^n(g,r)\equiv\vec{0}, \qquad (62)$$

$$\nabla_r\bar{f}_1^n(g,r)\equiv\vec{0}. \qquad (63)$$

Заметим, что уравнения (60, 62) и (61, 63) можно решать независимо друг от друга. Если g,r – скалярные параметры, т.е. все $g_t\equiv g, r_t\equiv r$, то уравнения (60-63) останутся справедливыми, если в них градиенты по g и r заменить на частные производные по g и r.

Для связи градиентов функций $f_k^t(g)$ с функциями $\bar{f}_k^t(g)$ в формуле для обобщенного градиента (32):

$$Df(g)=\sum_{t=0}^{n-1}\min_{k\in K^t(g)}\langle\nabla f_k^t(g),\Delta g\rangle,$$

остаются условия (49, 50), прореженные соответствующим образом:

$$\nabla_g f_k^{t-1}(g,r)=\begin{cases}-e_{t-1}(1-c)\bar{f}_k^t(g,r)+ \\ +(i-g_{t-1}')\nabla_g\bar{f}_k^t(g,r), \\ k\in K^t(g,r); \\ (i-r_{t-1}')\nabla_g\bar{f}_{k-2^{n-t+1}+1}^t(g,r), t=n,...,1. \\ k\in K^t(g,r)+2^{n-t+1}-1; \\ -e_{t-1}(1-c)S_{t-1}, \\ k=2^{n-(t-1)+1}-1;\end{cases}$$

$$\nabla_r f_k^{t-1}(g,r) = \begin{cases} (i - g'_{t-1})\nabla_r \bar{f}^t_k(g,r), \\ k \in K^t(g,r); \\ -e_{t-1}(1-c)\bar{f}^t_{k-2^{n-t+1}+1}(g,r) + \\ +(i - r'_{t-1})\nabla_r \bar{f}^t_{k-2^{n-t+1}+1}(g,r), \\ k \in K^t(g,r) + 2^{n-t+1} - 1; \\ \vec{0}, k = 2^{n-(t-1)+1} - 1. \end{cases} \quad t = n,\ldots,1.$$

6. Числовой пример

Рассмотрим пример расчета коэффициентов эластичности из [1] для случая $n = 3$ и скалярных параметров g, r по сокращенной, прореженной схеме, предложенной в предыдущем пункте. Исходные данные представлены в следующей табл. 1.

Таблица 1

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Параметр	*c*	*i*	Z_3^0
Значение	0,2	0,4	10
Параметр	Δg	S_0	q_1
Значение	0,01	62,13	50
Параметр	*g*	S_1	q_2
Значение	0,375	40	20
Параметр	*r*	S_2	q_3
Значение	0,25	20	30

Расчет функций $\bar{f}^t_k(g,r), Z_t(g,r)$ по формулам (44, 47) представлен в табл. 2. Здесь для простоты обозначено $\bar{f}^t_k(g,r) = F_{k,t}(g,r)$.

Таблица 2

РАСЧЕТ ФУНКЦИИ $\bar{f}^t_k(g,r), Z_t(g,r)$ ПО ФОРМУЛАМ (44, 47)

k	*t*	3	2	1	0
1	*F1,t(g,r)*	10	-15,38	-	-
2	*F2,t(g,r)*	-	-16,67	2,56	40,43
3	*F3,t(g,r)*	-	20,00	-	-
5	*F5,t(g,r)*	-	-	2,78	-
7	*F7,t(g,r)*	-	-	40,00	-
8	*F8,t(g,r)*	-	-	-	44,63
15	*F15,t(g,r)*	-	-	-	62,13
Kt	*Kt(g,r)*	1	2	2	2
Zt	*Zt(g,r)*	10,00	-16,67	2,56	40,43

Расчет функций $f^t_k(g,r), f_t(g,r), f(g,r)$ по формулам (55, 56, 48) представлен в табл. 3. Здесь для простоты обозначено $f^t_k(g,r) = f_{k,t}(g,r)$.

Таблица 3

РАСЧЕТ ФУНКЦИИ $f^t_k(g,r), f_t(g,r), f(g,r)$ ПО ФОРМУЛАМ (55, 56, 48)

k	*t*	3	2	1	0	*f(g)*
1	*f1,t(g,r)*	1,00	-1,54	-	-	-
2	*f2,t(g,r)*	-	-3,33	0,26	4,04	-
3	*f3,t(g,r)*	-	2,00	-	-	-
5	*f5,t(g,r)*	-	-	0,56	-	-
7	*f7,t(g,r)*	-	-	4,00	-	-
9	*f9,t(g,r)*	-	-	-	8,76	-
15	*f15,t(g,r)*	-	-	-	6,21	-
Kt	*Kt(g,r)*	1	2	2	2	-
ft	*ft(g,r)*	1,00	-3,33	0,26	4,04	1,97

Расчет производных $\partial\bar{f}^t_k(g,r)/\partial g$ по формулам (60, 62) представлен в табл. 4. Здесь для простоты обозначено $\partial\bar{f}^t_k(g,r)/\partial g = F_{gk,t}(g)$.

Таблица 4

РАСЧЕТ ПРОИЗВОДНЫХ $\partial\bar{f}^t_k(g,r)/\partial g$ ПО ФОРМУЛАМ (60), (62)

k	*t*	3	2	1	0
1	*Fg1,t(g,r)*	0	10,24		
2	*Fg2,t(g,r)*	-	0,83	-4,14	-24,69
3	*Fg3,t(g,r)*	-	0,00	-	-
5	*Fg5,t(g,r)*	-	-	-2,78	-
7	*Fg7,t(g,r)*	-	-	0,00	-
9	*Fg9,t(g,r)*	-	-	-	0,21
15	*Fg15,t(g,r)*	-	-	-	0,00
Kt	*Kt(g,r)*	1	2	2	2

Расчет производных $\partial f^t_k(g,r)/\partial g$ по формулам (49) представлен в табл. 5. Здесь для простоты обозначено $\partial f^t_k(g,r)/\partial g = f_{gk,t}(g)$.

Таблица 5

РАСЧЕТ ПРОИЗВОДНЫХ $\partial f^t_k(g,r)/\partial g$ ПО ФОРМУЛАМ (49)

k	*t*	3	2	1	0
1	*fg1,t(g,r)*	-8,00	13,33	-	-
2	*fg2,t(g,r)*	-	0,17	-2,47	-34,82
3	*fg3,t(g,r)*	-	-16,00	-	-
5	*fg5,t(g,r)*	-	-	-	-
7	*fg7,t(g,r)*	-	-	-32,00	-
9	*fg9,t(g,r)*	-	-	-	-39,98
15	*fg15,t(g,r)*	-	-	-	-49,70
Kt	*Kt(g,r)*	1	2	2	2
fg	*fgkt(g,r),k∈ Kt(g,r)*	-8,00	0,17	-2,47	-34,82

Расчет производных $\partial\bar{f}^t_k(g,r)/\partial r$ по формулам (61, 63) представлен в табл. 6. Здесь для простоты обозначено $\partial\bar{f}^t_k(g,r)/\partial g = F_{rk,t}(g,r)$.

Таблица 6

РАСЧЕТ ПРОИЗВОДНЫХ $\partial\bar{f}^t_k(g,r)/\partial r$ ПО ФОРМУЛАМ (61, 63)

k	*t*	3	2	1	0
1	*Fr1,t(g,r)*	0	0,00	-	-
2	*Fr2,t(g,r)*	-	16,67	12,82	9,86
3	*Fr3,t(g,r)*	-	0,00	-	-
5	*Fr5,t(g,r)*	-	-	11,11	-
7	*Fr7,t(g,r)*	-	-	0,00	-
9	*Fr9,t(g,r)*	-	-	-	-33,12
15	*Fr15,t(g,r)*	-	-	-	0,00
Kt	*Kt(g,r)*	1	2	2	2

Расчет производных $\partial f^t_k(g,r)/\partial r$ по формулам (50) представлен в табл. 7. Здесь для простоты обозначено $\partial f^t_k(g,r)/\partial r = f_{rk,t}(g)$.

Таблица 7

РАСЧЕТ ПРОИЗВОДНЫХ $\partial f_k^t(g,r)/\partial r$ ПО ФОРМУЛАМ (50)

k	t	3	2	1	0
1	*fr1,t(g,r)*	0,00	0,00	-	-
2	*fr2,t(g,r)*	-	12,31	1,28	0,99
3	*fr3,t(g,r)*	-	0,00	-	-
5	*fr5,t(g,r)*	-	-	0,51	-
7	*fr7,t(g,r)*	-	-	0,00	-
9	*fr9,t(g,r)*	-	-	-	-30,37
15	*fr15,t(g,r)*	-	-	-	0,00
Kt	*Kt(g,r)*	1	2	2	2
frt	*frt(g,r), k∈ Kt(g,r)*	0,00	12,31	1,28	0,99

Расчет коэффициентов эластичности $K_0(g,r), K_1(g,r)$ по формулам (42, 43) представлен в табл. 8. Здесь для простоты обозначено:

$$\partial f_k^t(g,r)/\partial g = f_{gk,t}(g);$$

$$\partial f_k^t(g,r)/\partial r = f_{rk,t}(g);$$

$$mod f_{gk,t}(g) = \mid f_{gk,t}(g) \mid \; mod f_{rk,t}(g) = \mid f_{rk,t}(g) \mid.$$

Таблица 8

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛАСТИЧНОСТИ $K_0(g,r), K_1(g,r)$ ПО ФОРМУЛАМ (42, 43)

t	2	1	0	$K_m(g,r)$, $m=0,1$	$K_m\sqrt{\Delta g^2+\Delta r^2}$, $m=0,1$	$f(g)+$ $-K_m\sqrt{\Delta g^2+\Delta r^2}$, $m=0,1$
$f_{gk,t}(g,r), k\in K^t(g,r)$	0,17	-2,47	-34,82	-	-	-
$f_{rk,t}(g,r), k\in K^t(g,r)$	12,31	1,28	0,99	-	-	-
$\lvert f_{gk,t}(g,r)\rvert$	0,17	2,47	34,82	-	-	-
$\lvert f_{rk,t}(g,r)\rvert$	12,31	1,28	0,99	-	-	-
$(\lvert f_{gk,t}\rvert^2+\lvert f_{rk,t}\rvert^2)^{1/2}$, $k\in K^t(g,r)$	12,31	2,78	34,83	-	-	-
$max(\lvert f_{gk,t}\rvert^2+\lvert f_{rk,t}\rvert^2)^{1/2}$, $k\in K^t(g,r)$	12,31	2,78	34,83	49,92	0,53	2,50
$min(\lvert f_{gk,t}\rvert^2+\lvert f_{rk,t}\rvert^2)^{1/2}$, $k\in K^t(g,r)$	12,31	2,78	34,83	49,92	0,53	1,44

В последних трех столбцах табл. 8 вычислены соответственно коэффициенты эластичности $K_0(g)=49,92;$ $K_1(g)=49,92$, приращения $K_m\sqrt{\Delta g^2+\Delta r^2}, m=0,1$ при $\Delta g=\Delta r=0,01=1\%$ в левой и правой части неравенства (31), и вытекающий из него диапазон возможных значений функции $f(g+\Delta g, r+\Delta r)$ с точностью до малых порядка $o(\sqrt{\Delta g^2+\Delta r^2})$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что в настоящей работе конструкция обобщенного дифференциала функции связанного максимума в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта доведена до алгоритмов, в которых предварительно отсеяны заведомо лишние точки. Это делает предложенную методику анализа рисков практически значимой и оптимальной в смысле сложности вычислений и может быть полезно практикующим оценщикам и банковским аналитикам, специализирующихся на оценке предлагаемых банку инвестиционных проектов.

Литература

1. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчикова // Аудит и финансовый анализ. – 2010.
2. Беляков А.В. Об оптимизации использования заемных средств в ходе осуществления инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков // Финансы и кредит. – 1999. – №7.
3. Беляков А.В. Об устойчивости инвестиционного проекта относительно возможного изменения кредитных и депозитных ставок [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Финансовая аналитика. – 2010.
4. Беляков А.В. Устойчивость инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег и анализ рисков [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2010.
5. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс [Текст] / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М. : Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1972. – 368 с.
6. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» // Deloitte&Touche. – декабрь 2003-март 2005.
7. Оценка бизнеса [Текст] : учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М. : Финансы и статистика, 2002.
8. Перевозчиков А.Г. Учет структуры капитала в моделях денежного потока для собственного и инвестированного капитала [Текст] / А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2006. – №1. – С. 163-166.

Ключевые слова

Оценка инвестиционных проектов; стоимость собственного капитала; оптимизация финансирования проекта; стоимость денег; анализ рисков; обобщенный дифференциал стоимости собственного капитала как функции рисков; сложность вычислений обобщенного дифференциала; оптимизация сложности.

Беляков Александр Викторович

Перевозчиков Александр Геннадьевич

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается двухпараметрическая задача оптимизации финансирования инвестиционного проекта в форме кредитной линии. Известно, что стоимость собственного капитала проекта в общем случае является не дифференцируемой функцией консолидированного риска, выраженного в возможном изменении рыночной кредитной ставки по сравнению с действующей по договору об открытии кредитной линии. Было показано, что тем не менее указанная функция является дифференцируемой по направлениям, и предложен способ их расчета. Полученные производные интерпретировались авторами как коэффициенты эластичности в предложенной методике анализа рисков. Из них, как было показано ими ранее, также можно сконструировать обобщенный дифференциал в силу равномерной сходимости нормированного остатка. Только он будет уже не линейной функцией приращения, а кусочно-линейной и выпуклой. Если векторный параметр один, то это полностью решает задачу построения обобщенного дифференциала. Если же векторных параметров два, то это гораздо более сложная задача, и она изучалась авторами в предыдущей работе, в которой была выявлена общая структура обобщенного дифференциала в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта. На этой основе в предыдущей работе авторов на эту тему были получены рекуррентные уравнения, позволяющие в явном виде построить обобщенный дифференциал в двухпарметрическом случае.

Однако эта конструкция оказалась довольно громоздкой и в настоящей работе авторы оптимизируют ее в смысле сокращения числа перебираемых точек, также как это было сделано ранее в однопараметрическом случае. Такова суть нашей последней работы, закрывающей в определенном смысле всю тему исследования устойчивости инвестиционного проекта относительно возможного изменения стоимости денег на рынке кредитов и депозитов.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.В.Белякова, А.Г.Перевозчикова может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н, профессор, проректор по научной работе Тверского института экологии и менеджмента, декан факультета экономики и менеджмента