8.4. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИЙ В ОСНОВНЫЕ И ОБОРОТНЫЕ СРЕДСТВА КОМПАНИИ

Перевозчиков А.Г., д.ф.-м.н., профессор, академик РАЕН, профессор кафедры математики и информатики, Тверской государственной сельскохозяйственной академии;
Лесик И.А., программист отдела инновационных ИТ в обучении, Центр разработки и внедрения технологий управления ОАО «НПО Русбитех», г. Тверь

Перейти на Главное МЕНЮ
Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ

В работе [14] было показано, что линия финансового менеджера является графиком возрастающей, вогнутой и кусочно-линейной функции и получена формула для ее обобщенного дифференциала в смысле [7, 8]. Это позволяет использовать численный метод для ее построения и решает в определенном смысле поставленную задачу в общем случае. В настоящей главе предложенная конструкция обобщенного дифференциала функции финансового менеджера распространяются на общую модель инвестиций в основные и оборотные средства компании с использованием заемного капитала на долгосрочной и краткосрочной основе.

1. Учет ограничений по объему производства и ценам

Добавим ограничения, связывающие предельные объемы P_j, $j = 1,2,...,n$, производства и цены $c_j^1 \le c_j \le c_j^2$, $j = 1,2,...,n$, в линейном приближении, следуя [1], тогда получим в принятых нами обозначениях задачу:

$$\Phi(b,c,d) = \max_x \langle c,x \rangle;$$
$$\begin{cases} Ax \le b; \\ Ex \le d = d(c) = P - diag\,(c - c^1)\gamma'; \end{cases} \qquad (1)$$
$$x \ge 0, c^1 \le c \le c^2.$$

Здесь $P = (P_1,..., P_n)'$, $c = (c_1..., c_n)'$ – n-мерные вектор-столбцы, $\gamma' = (\gamma_1..., \gamma_n)$ – n-мерная вектор-строка соответствующих коэффициентов эластичности, показывающие как увеличение цен от минимально допустимых c^1 уменьшает предельный объем спроса по видам производимой продукции;

$diag\,(c - c^1)\gamma'$ – n-мерный вектор-столбец составленный из элементов диагонали матрицы $(c - c^1)\gamma'$ размерности $n * n$.

Вектор рыночных цен c на продукцию компании может получить приращение Δc со временем, например в результате инфляции [42]:

$$\Delta c = \xi diagc\ \eta'. \qquad (2)$$

Здесь ξ – предполагаемая годовая инфляция за соответствующий период, $\eta = (\eta_1..., \eta_n)$ – n-мерная вектор-строка соответствующих коэффициентов эластичности, показывающие увеличиваются цены под воздействием инфляции.

Соответствующее приращение получит вектор d :

$$\Delta d = -diag\ \Delta c \cdot \gamma'.$$

Двойственная задача к (1) будет иметь вид:

$$\Phi(b,c,s) = \min_{p,r} (\langle b,p \rangle + \langle d,r \rangle);$$
$$A'p + Er \ge c;$$
$$p \ge 0, r \ge 0.$$

При этом функция максимума (1) получит приращение $\Delta\Phi(в,c,d)$, которое в дифференцируемом случае можно представить в форме:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(b,c,d) &= \Phi(b,c+\Delta c,d+\Delta s) - \\ &-\Phi(b,c,d) = \Phi(b,c+\Delta c,d+ds) - \\ &-\Phi(b,c,d+\Delta d) + \Phi(b,c,d+\Delta d) - \\ &-\Phi(b,c,d) \approx \langle x^*(b,c,d+\Delta d), \Delta c \rangle + \\ &+\langle r^*(b,c,d), \Delta d \rangle. \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь $x^* = x^*(b,c,d+\Delta d)$ – единственное в силу предположения о дифференцируемости решение прямой задачи в точке $(b,c,d+\Delta d)$, которое позволяет оценить фактическую точность аппроксимации по значению при данном Δd. Аналогично $p^* = p^*(b,c,d)$, $r^* = r^*(b,c,d)$ – единственное в силу предположения о дифференцируемости решение двойственной задачи в исходной точке (b,c,d).

2. Учет ограничений по ресурсам

Рассмотрим нормированную задачу инвестиций в оборотные средства предприятия с использованием заемного капитала на краткосрочной основе. [1]:

$$q(z) = \Phi(a+z,b) = \max_x \langle c,x \rangle;$$
$$Dx \le a+z, x \ge 0. \qquad (4)$$

Здесь

D – соответствующая производственная матрица;

a – вектор стоимости имеющихся на созданных на предприятии запасов ресурсов;

z – вектор стоимости дополнительных оборотных средств, привлекаемых в форме краткосрочных займов для увеличения запасов ресурсов на период (обычно – год).

Эта форма наиболее удобна для изучения непосредственного влияния краткосрочных инвестиций в оборотные средства на валовую прибыль предприятия, которая отличается от избранного критерия на постоянные расходы c_0 предприятия.

Следуя логике предложенной нами парадигмы, введем функцию доходности:

$$Q(W) = \max_z q(z);$$
$$\langle e_0, z \rangle = W, z \ge 0. \qquad (5)$$

Здесь $e_0 = (1,..., 1)'$ – вектор-столбец соответствующей размерности. Эта функция показывает как валовая прибыль, отличающаяся от избранного критерия на постоянные расходы c_0 предприятия, зависит от объема заемного капитала W на краткосрочной основе, доступного компании для финансирования инвестиций в оборотные средства.

Следуя предыдущей работе, мы можем определить стоимость собственного капитала $X = X(W)$ компании в результате инвестиции заемного капитала z на краткосрочной в оборотные средства. Эта стоимость в простейшем случае может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода [4-6]:

$$X(W) = \frac{Q(W) - C_0 - (1+g_0)W}{i}. \qquad (6)$$

Здесь

g_0 – средняя стоимость капитала на краткосрочной основе;

i – подходящая ставка капитализации валовой прибыли компании.

Замечание 1

При переходе от задач (4, 5) к функции (6) становится неуместным учет исходных запасов ресурсов созданных на предприятии, поскольку формула прямой капитализации (6) предполагает стационарность, что в части оборотных средств означает их полное замещение в течении производственного периода. Поэтому мы должны положить $a = 0$ в (5). Однако мы предпочитаем в аналитических исследованиях сохранить в постановке задачи (5) этот параметр для общности рассуждения.

Замечание 2

Заметим, что в (6) в качестве расходов учитываются не только проценты g_0W , но и основная сумма краткосрочных займов W , которая ежегодно должна возвращаться из прибыли предприятия.

3. Учет всех ограничений вместе

Рассмотрим действие всех ограничений совместно, тогда получим в принятых нами обозначениях исходную задачу:

$$q(y,z) = \Phi(a+z, b+y, c, d) = \max_x \langle c, x\rangle;$$

$$\begin{cases} Ax \le b + y; \\ Dx \le a + z; \\ Ex \le d = d(c) = P - diag\,(c - c^1)\gamma'; \end{cases} \qquad (7)$$

$$x \ge 0.$$

Двойственной к (7) будет задача:

$$\begin{aligned} &\Phi(a+z, b+y, c, d) = \\ &= \min_{p,q,r} \left(\langle b+y, p\rangle + \langle a+z, q\rangle + \langle d, r\rangle\right); \\ &A'p + D'q + Er \ge c; \\ &p, q, r \ge 0. \end{aligned} \qquad (8)$$

В результате ее решения получим в дифференцируемом случае однозначные функции:

$$\begin{aligned} &p^* = p^*(a+z, b+y, c, d), q^* = \\ &= q^*(a+z, b+y, c, d), r^* = r^*(a+z, b+y, c, d). \end{aligned} \qquad (9)$$

Вектор рыночных цен c на продукцию компании может получить приращение $\Delta c = \xi diagc\;\eta'$ со временем в результате инфляции ξ за соответствующий период. Напомним, что здесь $\eta = (\eta_1 ..., \eta_n)$ – n-мерная вектор-строка соответствующих коэффициентов эластичности, показывающие увеличиваются цены под воздействием инфляции. Соответствующее приращение $\Delta d = -diag\;\Delta c\gamma'$ получит величина d .

При этом функция максимума (7) получит приращение $\Delta\Phi(a+z, в+y, c, d)$, которое в дифференцируемом случае можно представить в форме:

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi(a+z, b+y, c, d) = \\ &= \Phi(a+z, b+y, c+\Delta c, d+\Delta d) - \\ &- \Phi(a+z, b+y, c, d, s) = \\ &= \Phi(a+z, b+y, c+\Delta c, d+\Delta d) - \\ &- \Phi(a+z, b+y, c, d+\Delta d) + \\ &+ \Phi(a+z, b+y, c, d+\Delta d) - \Phi(a+z, b+y, c, d) \approx \\ &\approx \langle x^*(a+z, b+y, c, d+\Delta d), \Delta c\rangle + \\ &+ \langle r^*(a+z, b+y, c, d), \Delta s\rangle. \end{aligned} \qquad (10)$$

Здесь $x^* = x^*(a+z, b+y, c, d+\Delta d)$ - единственное в силу предположения о дифференцируемости решение прямой задачи (7) в точке $(a+z, b+y, c, d+\Delta d)$, которое позволяет оценить фактическую точность аппроксимации по значению при данном Δd . Аналогично $r^* = r^*(a+z, b+y, c, d)$ – соответствующая часть единственного в силу предположения о дифференцируемости решение двойственной задачи в исходной точке $(a+z, b+y, c, d)$.

Рассмотрев, как влияет изменение цены на доходность предприятия, предположим теперь, что цены фиксированы, но учитывается результат инвестиции заемных средств на долгосрочной и краткосрочной основе, тогда получим задачу:

$$\begin{aligned} &Q(V, W) = \max_{y,z} q(y, z); \\ &\langle e, y\rangle = V, \langle e_0, z\rangle = W, y \ge 0, z \ge 0. \end{aligned} \qquad (11)$$

Эта функция показывает как валовая прибыль, отличающаяся от избранного критерия на постоянные расходы C_0 предприятия, зависит от объема заемного капитала V, W на долгосрочной и краткосрочной основе, доступного компании для финансирования инвестиций в основные и оборотные средства.

Следуя логике нашей предыдущей работы, мы можем определить стоимость собственного капитала $X = X(V, W)$ компании в результате инвестиции заемного капитала V, W на долгосрочной и краткосрочной основе в основные и оборотные средства. Эта стоимость в простейшем случае может быть получена методом прямой капитализации валовой прибыли в рамках доходного подхода [4-6]:

$$X(V, W) = \frac{Q(V, W) - C_0 - gV - (1+g_0)W}{i}. \qquad (12)$$

Для агрегирования параметров V, W можно использовать общую величину инвестиций:

$$U = V + W. \qquad (13)$$

Соответствующая наибольшая стоимость собственного капитала компании может быть определена по формуле:

$$X(U) = \max_{V, W \ge 0: V+W=U} X(V, W). \qquad (14)$$

4. Аппроксимация обобщенного градиента в общем случае

С учетом дальнейшего применения схемы рандомизации описанной в предыдущей работе ограничимся дифференцируемым случаем. Пусть ресурс U получил приращение $\Delta U = \Delta V + \Delta W, \Delta V \ge 0, \Delta W \ge 0,$ и $y^* + \Delta y^*, z^* + \Delta z^*$ – какие-то соответствующие решения задачи (7) в определении (11) функции $Q(V+\Delta V, W+\Delta W)$. Тогда приращения $\Delta y^*, \Delta Z^*$ можно аппроксимировать приращениями:

$$\Delta y^* \approx \lambda p^*, \Delta z^* \approx \mu q^*, \quad (15)$$

вдоль векторных компонент $p^* = p^*(a+z^*, b+y^*, c, d), q^* = q^*(a+z^*, b+y^*, c, d)$ направления (p^*, q^*, r^*) наибыстрейшего подъема функции $q(y^*, z^*)$, определенной в (25). Поскольку единственный вектор (p^*, q^*, r^*) является в этом случае ее градиентом и справедливо приближенное равенство:

$$q(y^*+\Delta y^*, z^*+\Delta z^*) \approx q(y^*, z^*) + Dq(y^*, z^*) = q(y^*, z^*) + \langle p^*, \Delta y^* \rangle + \langle q^*, \Delta z^* \rangle. \quad (16)$$

Величину шагов λ, μ в (15) вдоль компонент p^*, q^* направления (p^*, q^*, r^*) наибыстрейшего подъема функции $q(y^*, z^*)$ следует определить из ресурсных ограничений:

$$\Delta V = \langle \Delta y^*, p^* \rangle = \lambda \langle e, p^* \rangle, \Delta W = \langle \Delta z^*, q^* \rangle = \mu \langle e_0, q^* \rangle, \quad (17)$$

откуда следуют равенства:

$$\lambda = \frac{\Delta V}{\langle e, p^* \rangle}, \mu = \frac{\Delta W}{\langle e_0, q^* \rangle}. \quad (18)$$

Отсюда с учетом (17) получим цепочку равенств:

$$Q(V+\Delta V, W+\Delta W) = q(y^*+\Delta y^*, z^*+\Delta z^*) \approx q(y^*, z^*) + \frac{\langle p^*, p^* \rangle}{\langle e, p^* \rangle}\Delta V + \frac{\langle q^*, q^* \rangle}{\langle e_0, q^* \rangle} = Q(V, W) + \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle}\Delta V + \frac{\|q^*\|^2}{\langle e_0, q^* \rangle}\Delta W. \quad (19)$$

Откуда получаем приближенное выражение для дифференциала функции доходности:

$$DQ(V, W) \approx \frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle}\Delta V + \frac{\|q^*\|^2}{\langle e_0, q^* \rangle}\Delta W, \Delta V \geq 0, \Delta W \geq 0. \quad (20)$$

Аппроксимация обобщенного дифференциала для функции менеджера $X(V, W)$ может быть получена из аппроксимации обобщенного дифференциала функция доходности $Q(V, W)$ по формуле:

$$DX(V, W) \approx \frac{DQ(V, W) - g\Delta V - (1+g_0)\Delta W}{i}, \Delta V \geq 0, \Delta W \geq 0. \quad (21)$$

Аппроксимация обобщенного дифференциала для функции менеджера $X(U)$ может быть получена из аппроксимации обобщенного дифференциала функция функции менеджера $X(V, W)$ по формуле:

$$DX(U) \approx \max_{\Delta V, \Delta W \geq 0: \Delta V + \Delta W = \Delta U} DX(V, W) = \max_{\Delta V, \Delta W \geq 0: \Delta V + \Delta W = \Delta U} \frac{1}{i}\left(\left[\frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle} - g \right]\Delta V + \left[\frac{\|q^*\|^2}{\langle e_0, q^* \rangle} - (1+g_0) \right]\Delta W \right), \quad (22)$$

$$\Delta V \geq 0, \Delta W \geq 0.$$

Получается линейная задача скалярной оптимизации, если исключить одну из переменных, например, $\Delta W = \Delta U - \Delta V \geq 0$ при ограничении $0 \leq \Delta V \leq \Delta U$, которая легко решается в зависимости от соотношения коэффициентовпри неизвестных $\Delta V, \Delta W$ в (22):

$$DX(U) \approx \frac{\Delta U}{i}\max * \left(\left[\frac{\|p^*\|^2}{\langle e, p^* \rangle} - g \right], \left[\frac{\|q^*\|^2}{\langle e_0, q^* \rangle} - (1+g_0) \right] \right), \Delta U \geq 0. \quad (23)$$

Поэтому аппроксимация функции менеджера $X(U)$ может быть получена и с использованием приближенной формулы для обобщенного дифференциала, если мы будем двигаться по точкам ее дифференцируемости. Это возможно сделать, если условия принадлежности к кускам ее линейности задаются явно в виде линейных неравенств, которые можно будет проверить. Для корректности этой схемы нужно рандомизировать процедуру по схеме, предложенной в [12]:

$$X(U_{s+1}) \approx X(U_s) + DX(U_s + h\rho^s); U_{s+1} = U_s + \Delta U; s = 1, 2, \ldots; U_0 = 0. \quad (24)$$

Здесь $DX(U)$ – аппроксимация дифференциала функции полилинейной функции $X(U)$ в точке U, которая существует для всех U кроме, быть может, конечного множества точек и определяется по формуле (23).

Величина $h > 0$ задает точность аппроксимации функции менеджера $X(U)$ ее осредненной функцией:

$$X_h(U) = \int_{E_1} X(U + h\rho)\omega_1(\|\rho\|_0). \quad (25)$$

Ядро осреднения здесь определяется, например, по формуле [13]:

$$\omega_1(\|\rho\|_0) = \begin{cases} 2^{-1}, \rho \in O; \\ 0, \upsilon \notin O. \end{cases} \quad (26)$$

Здесь

$$\|\rho\|_0 = |\rho|; O = \left\{\rho \in E_n \,\middle|\, \|\rho\|_0 \leq 1\right\}. \quad (27)$$

Известно [41], что осредненная функция от липшицевой функции будет дифференцируемой и

$$|X_h(U) - X(U)| \leq Lh, \quad (28)$$

где L – соответствующая константа Липшица.

Пусть величина ρ^s в (42) есть s-ю независимую реализацию случайной величины ρ, равномерно распределенной на O. Тогда случайный процесс [13] почти наверное определен и в среднем совпадает с осредненной функцией $\{X_h(U_s)\}$ [13], которая аппроксимирует исходную функцию менеджера на дискретной решетке $\{U_s\}$ с точностью $O(h)$ в силу (28).

Заключение

В настоящей работе показано, что линия финансового менеджера в общем случае является графиком неубывающей, вогнутой и кусочно-линейной функции и получена формула для аппроксимации ее обобщенного дифференциала в смысле [7, 8]. Это позволяет использовать рандомизированную процедуру для ее построения в общем случае.

Литература

1. Ашманов С.А. Линейное программирование [Текст] / С.А. Ашманов. – М. : Наука, 1981.
2. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в однопараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2011. – №2. – С. 242-247.
3. Беляков А.В. К вычислению обобщенного дифференциала в двухпараметрической задаче оптимизации инвестиционного проекта [Текст] / А.В. Беляков, А.Г. Перевозчиков // Аудит и финансовый анализ. – 2011. – №3. – С. 76-84.
4. Брейли Р. Принципы корпоративных финансов [Текст] / Р. Брейли, С. Майерс. – М. : ИНФРА-М, 1999.
5. Ван Хорн Дж. К. Основы финансового менеджмента [Текст] / Ван Хорн Дж. К. – М. : Финансы и статистика, 2004.
6. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс [Текст] / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972.
7. Завриев С.К. Стохастический конечно-разностный алгоритм минимизации функции максимина [Текст] / С.К. Завриев, А.Г. Перевозчиков // Ж-л вычислительной математики и математической физики. – 1991. – Т. 30 ; №4. – С. 629-633.
8. Методология и руководство по проведению оценки бизнеса и / или активов ОАО РАО «ЕЭС России» и ДЗО ОАО РАО «ЕЭС России» [Текст] / Deloitte&Touche. Декабрь 2003 – март 2005.
9. Михалевич В.С. и др. Методы невыпуклой оптимизации [Текст] / В.С. Михалевич, А.М. Гупал, В.И. Норкин. – М. : Наука, 1987.
10. Мищенко А.В. Модели управления производственно-финансовой деятельностью предприятия в условиях привлечения заемного капитала [Текст] / А.В. Мищенко, О.А. Артеменко // Финансовая аналитика. – 2012. – №42. – С. 2-13.
11. Оценка бизнеса [Текст] : учеб. / под ред. А.Г. Грязновой, М.А. Федотовой. – М. : Финансы и статистика, 2002.
12. Перевозчиков А.Г. Простейшая модель инвестиций в основные средства компании [Текст] / А.Г. Перевозчиков, И.А. Лесик // Аудит и финансовый анализ.– 2014. – №2. – С. 233-240.
13. Федоров В.В. Численные методы максимина [Текст] / В.В. Федоров. – М. : Наука, 1979.
14. Шарп У. и др. Инвестиции [Текст] : пер. с англ. / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли. – М. : ИНФРА-М, 1998. – 1028 с.

Ключевые слова

Собственный капитал компании, стоимость собственного капитала компании, доходный подход, метод прямой капитализации прибыли, инвестиции в основные средства компании, заемные средства компании на долгосрочной основе, зависимость стоимости от объема инвестиций, линия финансового менеджера, модельный пример построения линии финансового менеджера.

Перевозчиков Александр Геннадьевич

Лесик Илья Александрович

РЕЦЕНЗИЯ

Рассматривается общая модель инвестиций в основные и оборотные средства компании с использованием заемного капитала на долгосрочной и краткосрочной основе. В качестве критерия предлагается использовать прямой критерий стоимости собственного капитала компании, что позволяет поставить задачу исследования стоимости компании от объема заемных средств. Эту зависимость можно назвать линией финансового менеджера и изучать в различных аспектах.

В предыдущей работе авторов на эту тему было показано, что линия финансового менеджера является графиком возрастающей, вогнутой и кусочно-линейной функции и получена формула для ее обобщенного дифференциала. Это позволяет использовать численный метод для ее построения и решает в определенном смысле поставленную задачу в общем случае.

В настоящей работе предложенная конструкция обобщенного дифференциала функции финансового менеджера распространяются на общую модель инвестиций в основные и оборотные средства компании с использованием заемного капитала на долгосрочной и краткосрочной основе.

Вот основные идеи, заложенные в новой работе авторов. Она предназначена для аспирантов и докторантов, специализирующихся в области финансового менеджмента предприятия, а также для действующих профессиональных оценщиков инвестиций и бизнеса.

Все это определяет актуальность, научную новизну и практическую значимость полученных результатов. Все результаты строго доказаны. Считаю, что статья А.Г. Перевозчикова, И.А. Лесика может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Фирсова Е.А., д.э.н, проф., зав. кафедрой бухгалтерского учета и аудита, проректор по научной работе Тверской государственной сельскохозяйственной академии

[Перейти на Главное МЕНЮ](#)
[Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ](#)