3.8. МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ ДОХОДНОСТИ ЦЕННЫХ БУМАГ

Сомик К.В., д.э.н., профессор, кафедра финансовых и экономических расследований

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

[Перейти на Главное МЕНЮ](#)
[Вернуться к СОДЕРЖАНИЮ](#)

В статье на примере Московской фондовой биржи рассмотрены состав, структура и свойства новой компьютерной модели процесса изменения доходности ценных бумаг, позволяющей получать адекватные и достоверные прогнозные оценки.

Для выработки обоснованных инвестиционных решений необходимо применять и развивать математические методы оценки и прогнозирования доходности и риска акций и других ценных бумаг. Поэтому рассмотрим на примере фондовой Московской межбанковской валютной биржи (ММВБ) компьютерный метод представления процесса изменения доходности ценных бумаг с помощью марковской модели, позволяющей получать адекватные и достоверные прогнозные оценки.

Таблица 1

ФРАГМЕНТ ТИКОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕН, ОБЪЕМОВ И ДОХОДНОСТИ СДЕЛОК ПО АКЦИЯМ ОАО «МАГНИТ» ЗА 24 ОКТЯБРЯ 2014 Г.

<DATE>	<TIME>	<LAST>	<VOL>	*R*	*RV+*	*RV-*	*V+*	*V-*
24.10.14	95959	10102,6	7	-	-	-	-	-
24.10.14	95959	10102,6	30	0	0	0	0	0
24.10.14	100016	10078	1	-0,2435	0	-0,2435	0	1
24.10.14	100017	10078	1	0	0	0	0	0
24.10.14	100017	10100	1	0,218297	0,218297	0	1	0
24.10.14	100017	10100,2	3	0,00198	0,005941	0	3	0
24.10.14	100018	10071,1	2	-0,28811	0	-0,57623	0	2
24.10.14	100018	10060	1	-0,11022	0	-0,11022	0	1
24.10.14	100018	10102,5	2	0,422465	0,84493	0	2	0
24.10.14	184526	10180	8	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	738	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	5	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	200	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	4	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	7	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	1	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	1	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	1	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	2	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	433	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	3	0	0	0	0	0
24.10.14	184526	10180	25	0	0	0	0	0
24.10.14	184545	10180	3	0	0	0	0	0
24.10.14	184546	10180	2897	0	0	0	0	0
24.10.14	184546	10180	110	0	0	0	0	0
Сумма	-	-	-	-	854,6335	-1022,77	31806	40061
Вз.сред.	Rw+,Rw-	-	-	-	0,02687	-0,02553	-	-

Текущая активность фондовой биржи имеет своим результатом поток совершаемых сделок (тиков). Каждая сделка, например, покупки / продажи акций, совершается в случайный момент времени t_k и характеризуется конкретной тиковой ценой f_k и объемом v_k в лотах. Тик может быть положительным (up-tick), если цена данной сделки больше предыдущей ($f_k > f_{k-1}$), отрицательным (down-tick) ($f_k < f_{k-1}$) в противном случае, или нулевым, если цена сделки осталась прежней. С каждым последующим тиковым значением мы будем связывать изменение доходности акций, рассчитываемой по формуле: $R_k = \frac{f_k - f_{k-1}}{f_{k-1}} \times 100.$ Подпоследовательность положительных изменений доходности порождает рассчитываемое из условия заданной вероятности значение положительного кванта доходности $Q+$. Аналогично рассчитывается значение отрицательного кванта доходности $Q-$.

В табл. 1 представлен фрагмент тиковых значений цен, объемов и доходности сделок по обыкновенным акциям компании Открытого акционерного общества (ОАО) «Магнит» за 24 октября 2014 г. Средневзвешенное значение положительных изменений тиковой доходности за этот день составило: $Rw+ = 0{,}02687; Rw- = -0{,}02553.$

В табл. 2 представлен временной ряд средневзвешенных положительных и отрицательных изменений тиковой доходности (***Rw+, Rw-***) для этих акций за 20 торговых дней, на основании которого рассчитаны статистически устойчивые положительный ($Q+=0,018$) и отрицательный ($Q-=0,017$) тиковые кванты доходности акций ОАО «Магнит».

Таблица 2

СРЕДНЕВЗВЕШЕННЫЕ ТИКОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДОХОДНОСТИ АКЦИЙ ОАО «МАГНИТ»

<DATE>	*Rw+*	*Rw-*	-
06.11.14	0,02177	0,0203	-
07.11.2014	0,01557	0,01403	-
08.11.2014	0,020096	0,02205	-
09.11.2014	0,01714	0,0169	-
10.11.2014	0,01636	0,01809	-
13.11.2014	0,02083	0,02009	-
14.11.2014	0,01783	0,01647	-
15.11.2014	0,02088	0,01972	-
16.11.2014	0,02068	0,01854	-
17.11.2014	0,01369	0,01564	-
20.11.2014	0,02019	0,01991	-
21.11.2014	0,01499	0,01755	-
22.11.2014	0,02124	0,02037	-
23.11.2014	0,02288	0,01966	-
24.11.2014	0,02687	0,02553	-
27.11.2014	0,01693	0,01402	-
28.11.2014	0,01432	0,01232	-
29.11.2014	0,01668	0,0144	-
30.11.2014	0,02827	0,02842	-
31.11.2014	0,024	0,02038	-
M=СРЗНАЧ	0,019561	0,01872	-
G=СТОТКЛ	0,004014	0,003894	-
D=ДОВЕР	0,001753	0,001709	-
Q+=M-D	0,017808	0,01701	Q-=M-D

В результате процесс изменения доходностей акций и других ценных бумаг, торгуемых на фондовом рынке, можно представить в виде последовательности событий, которые могут находиться в одном из трех состояний: ***S1*** – увеличение (+), если доходность изменилась на величину большую, чем $Q+$; ***S3*** – уменьшение (-), если доходность изменилась на величину меньшую, чем $Q-$; ***S2*** - покой (0), если доходность изменилась на величину между границами отрицательного и положительного квантов, т.е. $Q^- < Q^0 < Q^+$ [8, с. 76]. В произвольный момент времени t_k сумма вероятностей нахождения процесса в указанных состояниях, очевидно, равна единице:

$$p_1(t_k)+p_2(t_k)+p_3(t_k)=1. \quad (1)$$

Случайный процесс изменения тиковых значений доходности в последовательные моменты времени совершения сделок $t_1, t_2, ..., t_k$ можно представить как цепочку пошаговых переходов системы из состояния в состояние [1, с. 186]. При этом могут происходить и задержки в том или ином состоянии в течение нескольких шагов. Например,

$$S^{(1)}{}_1 \to S^{(2)}{}_1 \to S^{(3)}{}_2 \to S^{(4)}{}_2 \to S^{(5)}{}_2 \to$$
$$\to S^{(6)}{}_1 \to S^{(7)}{}_3 \to S^{(8)}{}_3 \to S^{(9)}{}_2 \to ... \to S^{(k)}{}_1.$$

Как известно, случайный процесс называется марковским, если вероятность любого будущего состояния процесса не зависит от того, как развивался процесс в прошлом [6, с. 339]. Этому требованию удовлетворяет рассматриваемый нами процесс изменения доходности ценных бумаг, поскольку основой современной портфельной теории (modern portfolio theory, ***MPT***) является гипотеза эффективности фондового рынка (efficient market hypothesis, ***EMH***). Из этой гипотезы следует постулат о том, что текущие и будущие цены на акции и другие активы (а значит, и их доходность) на финансовом рынке не зависят от их прошлых значений и имеют характер случайных колебаний.

Такая случайная последовательность событий в разработанной модели характеризуется графом состояний (рис. 1), набором вероятностей состояний для k -го шага: $p_1(k), p_2(k), p_3(k)$ и матрицей переходов $\|p_{ij}\|$ из состояние в состояние:

$$\|p_{ij}\| = \begin{Vmatrix} p_{11}p_{12}p_{13} \\ p_{21}p_{22}p_{23} \\ p_{31}p_{32}p_{33} \end{Vmatrix}. \quad (2)$$

Рассмотрим однородный процесс, для которого вероятности перехода в данной матрице не зависят от времени, т.е. номера шага (или тика в последовательности) [5, с. 47]. В этом случае легко можно вывести следующие рекуррентные соотношения для зависимостей вероятностей состояний на шаге k от их значений на шаге $k-1$ [2, с. 176]:

$$p_1(k) = p_1(k-1)\times a_1 + p_3(k-1)\times b_1 + p_{21}; \quad (3)$$

$$p_3(k) = p_1(k-1)\times a_2 + p_3(k-1)\times b_2 + p_{23}; \quad (4)$$

$$a_1 = p_{11} - p_{21};\ b_1 = p_{31} - p_{21}; \quad (5)$$

$$a_2 = p_{13} - p_{23};\ b_2 = p_{33} - p_{23}; \quad (6)$$

$$p_2(k) = 1 - p_1(k) - p_3(k). \quad (7)$$

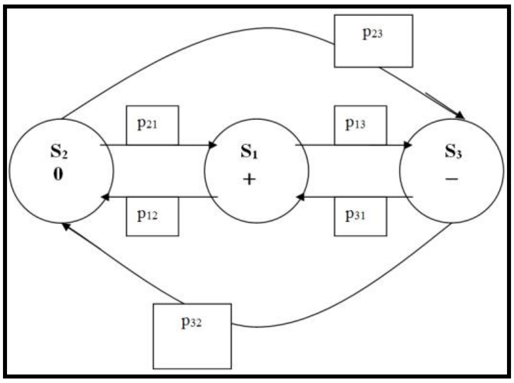

Рис. 1. Граф состояний и переходов процесса изменения доходности фондового рынка в модели TriMark

Для анализа разработанной триарной марковской модели (TriMark) и выведенных рекуррентных соотношений (3) была написана программа с помощью системы Mathematica корпорации Wolfram Research. Рассмотрим результаты обработки модели с помощью данной программы для матрицы переходов, имеющей значения:

p11 = 0,65; p12 = 0,2; p13 = 0,15;

p21 = 0,2; p22 = 0,45;p23 = 0,35;

p31 = 0,25; p32 = 0,25;p33 = 0,5.

В этом случае коэффициенты рекуррентных соотношений равны:

a1 = 0,45; b1 = 0,05; a2 = -0,2; b2 = 0,15.

В табл. 3 представлены результирующие значения вероятностей состояний ***S1*** (***k***) (увеличение доходности), ***S3*** (***k***) (уменьшение доходности) и ***S2*** (***k***) (покой) на ***k***-м шаге.

Таблица 3

ЗНАЧЕНИЯ ПОШАГОВЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ

k	p1(k)	p3(k)	p2(k)
1	1	0	0
2	0,65	0,15	0,2
3	0,5	0,2425	0,2575
4	0,437125	0,286375	0,2765
5	0,411025	0,305531	0,283444
6	0,400238	0,313625	0,286138
7	0,395788	0,316996	0,287216
8	0,393955	0,318392	0,287654
9	0,393199	0,318968	0,287833
10	0,392888	0,319205	0,287907
11	0,39276	0,319303	0,287937
12	0,392707	0,319344	0,287949
13	0,392685	0,31936	0,287955
14	0,392676	0,319367	0,319367
15	0,392673	0,31937	0,287958
16	0,392671	0,319371	0,287958
17	0,392671	0,319371	0,287958
18	0,39267	0,319372	0,287958
19	0,39267	0,319372	0,287958

Из данной таблицы видно, что уже на 18 шаге процесс приходит в стационарный режим, для которого независимо от шага ***p1 = 0,39267***, а ***p3 = = 0,319372***.

Допустим, под воздействием каких-либо внешних событий, например, уменьшения цены на нефть, матрица переходов изменилась и приобрела следующий вид:

p11 = 0,24; p12 = 0,41; p13 = 0,35;

p21 = 0,4 ; p22 = 0,45; p23 = 0,15;

p31 = 0,13; p32 = 0,21; p33 = 0,66.

В этом случае коэффициенты рекуррентных соотношений изменяются так: ***a1 = -0,16; b1 = -0,27***; ***a2 = 0,2***; ***b2 = 0,51***.

Табл. 4 показывает уже другие цепочки значений вероятностей состояний, но на 16-м шаге процесс опять переходит в стационарный режим, характеризуемый значениями: ***p1 =0,249839***, а ***p3=0,408098***.

Таблица 4

ИЗМЕНЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПОШАГОВЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИЗМЕНЕНИЯ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДОВ

k	p1(k)	p3(k)	p2(k)
1	0,39267	0,319372	0,287958
2	0,259424	0,375393	0,365183
3	0,257136	0,393335	0,349529
4	0,252658	0,402028	0,345314
5	0,251027	0,405566	0,343407
6	0,250333	0,407044	0,342623
7	0,250045	0,407659	0,342296
8	0,249925	0,407915	0,34216
9	0,249875	0,408022	0,342103
10	0,249854	0,408066	0,34208
11	0,249846	0,408085	0,34207
12	0,249842	0,408092	0,342066
13	0,24984	0,408095	0,342064
14	0,24984	0,408097	0,342063
15	0,24984	0,408097	0,342063
16	0,249839	0,408098	0,342063
17	0,249839	0,408098	0,342063
18	0,249839	0,408098	0,342063
19	0,249839	0,408098	0,342063

Можно доказать следующее утверждение. Если процесс, отображаемый моделью TriMark, однородный, т.е. переходные вероятности не зависят от времени, то с ростом числа шагов k вероятности состояний $p_1(k), p_2(k), p_3(k)$ стремятся к предельным постоянным значениям, которые вычисляются по следующим формулам:

$$\lim_{k \to \infty} p_1(k) = p_1 = \frac{p_{21} \times (p_{31} + p_{32}) + p_{23} \times p_{31}}{p_{12} \times (p_{31} + p_{32} + p_{23}) + p_{13} \times (p_{32} + p_{23} + p_{21}) + p_{21} \times (p_{31} + p_{32}) + p_{23} \times p_{31}}; \tag{8}$$

$$\lim_{k \to \infty} p_3(k) = p_3 = \frac{p_1 \times (p_{13} - p_{23}) + p_{23}}{(p_{31} + p_{32} + p_{23})}. \tag{9}$$

$$\lim_{k \to \infty} p_2(k) = p_2 = 1 - p_1 - p_3. \tag{10}$$

Доказать это утверждение легко, если в первом уравнении рекуррентного соотношения (3) последовательно выразить значение $p_3(k-1)$ через соответствующие рекурсии младших порядков [3, с. 371]. В результате мы получим:

$$p_1(k) = p_1(k-1) \times a_1 + p_{21} + b_1 \times \{p_1(k-2) \times a_2 + p_{23} + b_2 \times \{p_1(k-3) \times a_2 + p_{23} + b_2 \times \{\ldots + b_2 \times \{p_1(1) \times a_2 + p_{23}\}\ldots\}\}\}. \tag{11}$$

Теперь, если обозначить $\varepsilon_k = p_1(k) - p_1(k-1);\ |\varepsilon_k| < 1$, из (11) следует, что :

$$\varepsilon_{k+1} = a_1 \times \varepsilon_k + b_1 \times a_2 \times \varepsilon_{k-1} + b_1 \times b_2 \times a_2 \times \varepsilon_{k-2} + b_1 \times b^2_2 \times a_2 \times \varepsilon_{k-3} + b_1 \times b^3_2 \times a_2 \times \varepsilon_{k-4} + \ldots + b_1 \times b^{k-3}_2 \times a_2 \times \varepsilon_2. \tag{12}$$

Поскольку $|a_1| < 1$, из (12) следует, что $|\varepsilon_{k+1}| < |\varepsilon_k|$ для любых k. Это доказывает существование предела. Значения этих пределов легко выводятся с помощью записи уравнений стационарности процесса для графа состояний модели TriMark (рис. 1).

Доказанные свойства модели TriMark позволяют оценивать значения ожидаемой доходности ценных бумаг на однородных участках развития процесса. Действительно, если мы определили кванты Q^{+}, Q^{-}, Q^{0}, например, акций ОАО «Магнит» и рассчитали, используя формулы (9), предельные вероятности состояний, то, очевидно, на однородном участке процесса изменения тиковых значений ожидаемую доходность можно оценить по формуле:

$$E = Q^{+} \times p_1 + Q^{0} \times p_2 + Q^{-} \times p_3 . \qquad (13)$$

Разработанная модель позволяет исследовать важные свойства развития не только рассматриваемых, но и любых других процессов, для которых характерны рост и спад, прогресс и регресс и т.п. При этом следует отметить, что предположение о стационарности матрицы вероятностей перехода не сильно ограничивает прогностические возможности модели. Ведь неоднородные процессы при определенных допущениях можно свести к совокупности однородных подпроцессов. Начало каждого такого подпроцесса под влиянием внешних событий порождает изменение значений вероятностей в матрице переходов, которые в течении некоторого интервала времени в k шагов остаются неизменными. Случайный процесс перехода от одной стационарной матрицы к другой можно моделировать с помощью компьютерных реализаций метода Монте-Карло [4, с. 37]. Такое представление, в частности, во многом объясняет принципы волнового движения эффективного рынка, описанные Р. Эллиоттом [7, с. 9]] в 1930-х гг.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций [Текст] / Е.С. Вентцель. – М. : Советское радио, 1972.
2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика [Текст] / Н.Я. Виленкин. – М. : Мир, 1969.
3. Грэхэм Р. Конкретная математика – основание информатики [Текст] / Р. Грэхем. – М. : Мир, 1998.
4. Зорин А.В. Методы Монте-Карло для параллельных вычислений [Текст] / А.В. Зорин, М.А. Федоткин. – М. : Изд-во Московского ун-та, 2013. (Суперкомпьютерное образование).
5. Кельберт М.Я. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения [Текст] / М.Я. Кельберт, Ю.М. Сухов. – М. : МЦНМО, 2009.
6. Марков А.А. Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга [Текст] / А.А. Марков // Изв. физ.-мат. об-ва при Казанском ун-те. – Сер. 2 ; т. 15. – 1906.
7. Пректер Р. Волновой принцип Эллиотта – ключ к пониманию рынка [Текст] / Р. Пректер, А. Фрост. – М. : Альпина Паблишер, 2012.
8. Сомик К.В. Связные структуры экономических событий [Текст] / К.В. Сомик. – М. : Финансы и статистика, 2005.

Ключевые слова

Марковская цепь; доходность; риск; матрица переходных вероятностей; однородный; неоднородный; стационарный процесс.

Сомик Кирилл Васильевич

РЕЦЕНЗИЯ

Актуальность темы статьи обусловлена необходимостью дальнейшего развития математических методов оценки и прогнозирования доходности и риска ценных бумаг для выработки обоснованных инвестиционных решений на современных фондовых рынках.

Научная новизна заключается в том, что автор предложил новую эффективную марковскую модель, позволяющую выявлять и исследовать важные свойства случайных процессов изменения доходности и риска ценных бумаг.

Практическая значимость этих результатов состоит в том, что они представлены в виде компьютерных алгоритмов, которые можно использовать для моделирования инвестиционных характеристик фондового рынка.

Молчанов А.В., д.э.н., профессор, Заслуженный экономист РФ, профессор кафедры, экономических и финансовых расследований Высшей школы государственного аудита Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.