9.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК В РАМКАХ ПОДХОДА ВАСИЧЕКА

Светлов К.В., аспирант, кафедра экономической кибернетики

Санкт-Петербургский государственный университет

В статье описана процедура калибровки параметров модели Васичека, описывающей временную структуру процентных ставок, по наблюдаемым значениям доходностей к погашению бескупонных облигаций.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из характеристик, описывающих степень изменчивости цены финансового актива, является накопленная (интегральная) волатильность. В эконометрике и финансовой математике данное определение относится к функции:

$$t \mapsto \int_0^t \sigma^2(s)ds ,$$

где σ_s – коэффициент волатильности из уравнения, задающего динамику стоимости актива:

$$dX_s = c_s X_s ds + \sigma_s X_s dW_s , X_0 = x_0 . \qquad (1)$$

Здесь c_s и σ_s некоторые случайные функции времени; W_s – стандартный винеровский процесс.

Оценка накопленной волатильности является актуальной задачей – результаты такого оценивания используются, например, в теории управления портфелем ценных бумаг. В рамках подхода представленного в статьях [1, 11], являющегося альтернативой стратегии самофинансирования, знание интегральной волатильности позволяет оценить величину прибыли от управления портфелем, а также решить вопрос об объеме резервируемых средств для реализации дальнейшего управления портфелем. Существует ряд методов оценивания накопленной волатильности (например, робастный подход, основанный на теории некорректных задач, предложенный в статье [2]; также подробный обзор методов сделан в работе [3]), при этом наиболее простым способом является оценка на основе эмпирической волатильности (realised volatility)

$$RV_n(X)(t) = \sum_{i=0}^{[nt]} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 ,$$

где $\{t_i\}$ – разбиение отрезка $[0,1]$.

Имеет место следующая сходимость по вероятности:

$$RV_n(\ln X)(t) = \sum_{i=0}^{[nt]} (\ln \frac{X_{t_{i+1}}}{X_{t_i}})^2 \to \int_0^t \sigma^2(s)ds , \qquad (2)$$

$$n \to +\infty .$$

Отметим, что зависимость вида (1) справедлива как для акций, так и для облигаций, однако существенное отличие состоит в поведении коэффициента волатильности σ_s. Для акций имеет место свойство квазиэргодичности [11] , выражающееся в справедливости следующего приближенного равенства:

$$\int_0^t \sigma^2(s)ds \approx \bar{\sigma}^2 t ,$$

где $\bar{\sigma}$ – постоянная величина.

Возможность усреднять накопленную волатильность таким образом принципиальна важна и используется во многих моделях финансовой математики, в том числе в классической модели Блэка-Шоулза [9]. Кроме того, свойство квазиэргодичности позволяет использовать оценку (2), построенную по историческим данным, для прогноза накопленной волатильности. В то же время для облигаций указанной свойство не выполняется, поскольку в отличие от акций, облигации являются инструментами с фиксированной доходностью и имеют ограниченный срок до погашения. Оценка (2) для облигации даст лишь представление о фактический реализации накопленной волатильности, не указывая на то, каким будет ее дальнейшее поведение. В связи с этим, для построения прогноза накопленной волатильности требуется некоторая модель стоимости облигации. В представленной работе в качестве такой модели рассматривается модель Васичека, предназначенная для описания поведения бескупонных облигаций и связанных с ними процентных ставок. В рамках указанной модели возможно найти аналитическое выражение для величины накопленной волатильности бескупонной облигации, при этом в указанное выражение будут входить параметры модели, которые необходимо оценивать по наблюдаемым значениям цен и доходностей. Таким образом, целью данной работы является построение прогноза накопленной волатильности для бескупонных облигаций (в качестве таковых будут рассмотрены облигации Казначейства США) и проверка адекватности данного прогноза, путем его сопоставления с оценкой (2).

Напомним основные положения модели Васичека, для чего рассмотрим бескупонную облигацию номиналом 1 у.е. с моментом погашения T . Ее стоимость на промежутке времени $[0;T]$ будем обозначать как $B(t,T)$, $t \le T$.

Доходностью к погашению для рассматриваемой облигации будем называть функцию $R(t,T)$, определенную следующим образом:

$$R(t,T) = -\frac{\ln B(t,T)}{T-t} \qquad (3)$$

Иными словами, доходность к погашению – это такая непрерывно начисляемая процентная ставка, что при размещении денежных средств в размере $B(t,T) < 1$ в момент времени t на срок $T-t$, к концу периода мы будем располагать $B(T,T) = 1$ у.е. При фиксированном t функция $\tau \mapsto R(t,t+\tau)$, $\tau > 0$ описывает доходности к погашению облигаций с различными сроками до погашения τ , обращающимися на рынке в момент t . В этом случае говорят, что $\tau \mapsto R(t,t+\tau)$ задает кривую доходности на момент t .

Мгновенной процентной ставкой будем называть следующую величину:

$$r(t) = \lim_{\tau \to 0+} R(t,t+\tau), \quad t \in [0,T]. \qquad (4)$$

Заметим, что в случае, если функция $B(t,T)$ имеет частную производную по своему второму аргументу, то выражение для мгновенной процентной ставки можно переписать так:

$$r(t) = \lim_{T \to 0+}\left(-\frac{\ln B(t,t+\tau)}{\tau}\right) =$$

$$= \lim_{T \to t+0}\left(-\frac{\ln B(t,t+\tau) - \ln B(t,t)}{\tau}\right) =$$

$$= -\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}\Big|_{T=t}.$$

Вывод основных соотношений в модели Васичека

В рассматриваемой модели Васичека [10] предполагается, что цена бескупонной облигации номиналом 1 у.е. определяется ненаблюдаемой *мгновенной процентной ставкой*, являющейся процессом Орнштейна-Уленбека [6] и удовлетворяющей стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt + \rho dW_t, r_0 = x, \qquad (5)$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\rho > 0$ – фиксированные параметры;

W_t – стандартный винеровский процесс.

Полагается, что цена облигации имеет вид:

$$B(t,T) = F(t,r_t,T),$$

где $F(t,r,T)$ – некоторая гладкая функция трех аргументов, при этом $F(T,r,T) = 1$.

Аргумент T будем записывать в виде параметра $F(t,r,T) = F_T(t,r)$. Применим к функции $F_T(t,r_t)$ формулу Ито [8] с целью получить уравнение изменения стоимости бескупонной облигации:

$$dF_T(t,r_t) = \frac{\partial F_T}{\partial t}(t,r_t)dt +$$

$$+\frac{\partial F_T}{\partial r}(t,r_t)dr_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_T}{\partial r^2}(t,r_t)(dr_t)^2 = \qquad (6)$$

$$= F_T(t,r_t)\left(\mu_T(t,r_t)dt + \sigma_T(t,r_t)dW_t\right),$$

где

$$\mu_T = \frac{\frac{\partial F_T}{\partial t} + \alpha(\gamma - r)\frac{\partial F_T}{\partial r} + \frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 F_T}{\partial r^2}}{F_T} \qquad (7)$$

и

$$\sigma_T = \frac{\rho\frac{\partial F_T}{\partial r}}{F_T}. \qquad (8)$$

Рассмотрим портфель, содержащий две облигации со сроками погашения T_1 и T_2 в количестве x_1 и x_2 соответственно. Стоимость каждой описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dB_i = B_i(\mu_i dt + \sigma_i dW_t), \quad i = 1,2.$$

Стоимость портфеля, составленного из указанного числа обеих облигаций, определяется следующим образом:

$$P(t) = x_1B_1(t,T_1) + x_2B_2(t,T_2).$$

Запишем дифференциальное уравнение для стоимости данного портфеля управляемого в рамках стратегии самофинансирования:

$$dP = x_1dB_1 + x_2dB_2 =$$

$$= (x_1B_1\mu_1 + x_2B_2\mu_2)dt + (x_1B_1\sigma_1 + x_2B_2\sigma_2)dW_t$$

Если инвестор ставит перед собой задачу сведения риска портфеля к нулю, то ему необходимо выбрать x_1 и x_2 так, чтобы множитель перед dW_t был равен нулю. Соответственно приходим к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1B_1\sigma_1 + x_2B_2\sigma_2 = 0 \\ x_1B_1 + x_2B_2 = P \end{cases},$$

ее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{P}{B_1}\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ x_2 = \frac{P}{B_2}\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} \end{cases}$$

отрицательное значение одной из величин x_1, x_2 означает, что по соответствующей ценной бумаге должна быть занята короткая позиция. Подставим полученные значения в уравнение для P

$$\frac{dP}{P} = \frac{\mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}dt$$

и заметим, что множитель перед dt должен равняться безрисковой ставке r_t – в противном случае нарушается постулат безарбитражности и появляется возможность для проведения арбитражных операций. Поэтому

$$\frac{\mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = r_t.$$

Последнее выражение можно переписать следующим образом

$$\frac{\mu_1 - r_t}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r_t}{\sigma_2} = q(t,r_t).$$

В данном случае мы сталкиваемся с тем фактом, что полученные величины одинаковы для облигаций с различными сроками погашения. Отметим, что данный коэффициент носит название рыночной цены риска. Важно подчеркнуть, что в рамках модели Васичека данный коэффициент является постоянной величиной:

$$q(t,r_t) \equiv q.$$

Также отметим, что в этом случае коэффициент сноса (7) и коэффициент волатильности (8) связаны соотношением:

$$\mu_T(t,r) = r + q\sigma_B(t,r). \qquad (9)$$

Подставим полученные выражения (7), (8) в (9) и воспользуемся тем, что в момент времени T цена рассматриваемой облигации неслучайна и равна единице. В результате приходим к следующей задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_T}{\partial t}(t,r) + (\alpha(\gamma - r) - q\rho)\frac{\partial F_T}{\partial r}(t,r) + \\ + \frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 F_T}{\partial r^2} = rF_T(t,r) \\ F_T(T,r) = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Заметим, что не уменьшая общности, можно положить коэффициент q равным нулю, переопределив параметр $\gamma := \gamma - \frac{q\rho}{\alpha}$ в уравнении (5). В таком случае говорят, что уравнение мгновенной спот-ставки задано относительно риск-нейтральной меры. Решением задачи (10), т.е. соотношением, связывающем мгновенную спот-ставку r_t и цену бескупонной облигации $B(t,T)$ в рамках модели Васичека является [4] функция:

$$F_T(t,r_t) = e^{A(T-t)-C(T-t)r_t} \quad (11)$$

где

$$C(\tau) = \frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha}, A(\tau) = (C(\tau)-\tau)\left(\gamma - \frac{\rho^2}{2\alpha^2}\right) - \frac{\rho^2}{4\alpha}C^2(\tau).$$

Таким образом, $B(t,T) = F_T(t,r_t)$. Зная непосредственное выражение для цены облигации (11), мы имеем возможность переписать уравнение (6) в явном виде:

$$dB(t,T) = B(t,T)\left(r_t dt + \rho\frac{e^{-\alpha(T-t)}-1}{\alpha}dW_t\right). \quad (12)$$

Таким образом, интегральная волатильность для бескупонной облигации с моментом погашения T в рамках рассматриваемой модели равна:

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int_0^t \sigma^2(s)ds = \int_0^t \left(\frac{\rho^2}{\alpha^2}e^{-\alpha(T-s)} - 1\right)^2 ds = \\ &= \frac{\rho^2 e^{-2\alpha T}\left(e^{2\alpha t} + 2\alpha t e^{2\alpha T} - 4e^{\alpha(t+T)} + 4e^{\alpha T} - 1\right)}{2\alpha^3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из выражения (13) видно, что величина накопленной волатильности зависит только от двух параметров модели: параметра ρ, являющегося коэффициентом волатильности в уравнении мгновенной процентной ставки, и параметра α, характеризующего скорость возврата мгновенной процентной ставки к своему долгосрочному значению γ. Таким образом, для построения оценки накопленной волатильности

$$\begin{aligned} \hat{I}_1(t) &= \frac{\hat{\rho}^2 e^{-2\hat{\alpha}T}\left(e^{2\hat{\alpha}t} + 2\hat{\alpha}te^{2\hat{\alpha}T}\right)}{2\hat{\alpha}^3} - \\ &- \frac{\hat{\rho}^2 e^{-2\hat{\alpha}T}\left(4e^{\hat{\alpha}(t+T)} + 4e^{\hat{\alpha}T} - 1\right)}{2\hat{\alpha}^3} \end{aligned} \quad (14)$$

бескупонной облигации необходимо иметь оценки указанных параметров $\hat{\alpha}$ и $\hat{\rho}$. С другой стороны, как уже было отмечено, накопленная волатильность может быть оценена на основе эмпирической волатильности логарифма цен облигации, т.е.:

$$\hat{I}_2(t) = \sum_{i=0}^{[nt]}\left(\ln\frac{B(t_{i+1},T)}{B(t_i,T)}\right)^2. \quad (15)$$

В данной работе мы сравним оценки $\hat{I}_1$ и $\hat{I}_2$, построенные для облигаций Казначейства США (US Treasuries) и на основании этого сравнения сделаем выводы о способности модели Васичека описывать рассматриваемый рынок облигаций.

Дискретное приближение для процесса мгновенной процентной ставки

Утверждение. Процесс r_t, удовлетворяющий уравнению (5), может быть записан следующим образом:

$$r_t = \gamma + e^{-\alpha(t-s)}(r_s - \gamma) + \rho e^{-\alpha t}\int_s^t e^{\alpha z}dW_z, t \geq s. \quad (16)$$

Доказательство. Вычислим дифференциал произведения $e^{\alpha t}r_t$ при помощи формулы Ито:

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t}r_t) &= \alpha e^{\alpha t}r_t dt + e^{\alpha t}dr_t = \\ &= \alpha e^{\alpha t}r_t dt + \gamma\alpha e^{\alpha t}dt - \alpha e^{\alpha t}r_t dt + \rho e^{\alpha t}dW_t = \\ &= \gamma\alpha e^{\alpha t}dt + \rho e^{\alpha t}dW_t \end{aligned}$$

Интегрируя последнее равенство от s до t, $s < t$ и приводя слагаемые, получим требуемое равенство.

Предположим, что нами рассматривается поведение процесса r_t на отрезке времени $[0;T]$. Разобьем отрезок $[0,T]$ на n частей длины $\Delta_n = \frac{T}{n}$ и выберем на нем $n+1$ точку $\tau_i = i\Delta_n$, $i = 0,1,\ldots,n$. Значение процесса r_t в точке τ_i указанного разбиения будем обозначать как $r_{i,n}$. Подставляя в (16) $t = \tau_{i+1} = (i+1)\Delta_n$ и $s = \tau_i = i\Delta_n$, имеем

$$\begin{aligned} r_{i+1,n} &= \gamma\left(1 - e^{-\alpha\Delta_n}\right) + e^{-\alpha\Delta_n}r_{i,n} + \\ &+ \rho e^{-\alpha(i+1)\Delta_n}\int_{i\Delta_n}^{(i+1)\Delta_n} e^{-\alpha z}dW_z. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим последнее слагаемое, стоящее в правой части полученного выражения, подробнее. В соответствии со свойствами интеграла Ито [8] оно представляет собой случайную величину, имеющую нормальное распределение со средним нулем и дисперсией:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \mathrm{E}\left(\rho e^{-\alpha(i+1)\Delta_n}\int_{i\Delta_n}^{(i+1)\Delta_n} e^{-\alpha z}dW_z\right) = \\ &= \frac{\rho^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha\Delta_n}\right). \end{aligned}$$

Введем еще одно обозначение:

$$\varepsilon_{i+1,n} = \frac{\rho}{\sigma_n}e^{-\alpha(i+1)\Delta_n}\int_{i\Delta_n}^{(i+1)\Delta_n} e^{\alpha z}dW_z.$$

Нормально распределенные случайные величины величины $\varepsilon_{i,n}$ и $\varepsilon_{j,n}$ будут независимыми при любых i и j, не равных друг другу.

Таким образом, построено следующее приближение для процесса Орнштейна-Уленбека, описывающего в модели Васичека поведение мгновенных спот-ставок:

$$r_{i+1,n} = \varphi_{0,n} + \varphi_{1,n} r_{i,n} + \sigma_n \varepsilon_{i+1,n}, r_{0,n} = r_0 \qquad (18)$$

где $\varphi_{0,n} = \gamma\left(1 - e^{-\alpha\Delta_n}\right)$, $\varphi_{1,n} = e^{-\alpha\Delta_n}$ $\sigma_n^2 = \frac{\rho^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha\Delta_n}\right)$,

а $\{\varepsilon_{i,n}\}_{i=0}^{n}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение.

Оценивание параметров

Предположим, что у нас в распоряжении имеются данные о доходности к погашению облигаций некоторого вида на различные моменты времени, при этом срок до погашения полагается фиксированным и равным τ: $R_{k,n}^{\tau} := R(\tau_k, \tau_k + \tau)$, $k = 0, 1, \ldots n$ (период между наблюдениями по-прежнему равен Δ_n). Согласно формуле (11) для цены бескупонной облигации и определением доходности к погашению (3) мы имеем следующую зависимость между доходностью к погашению и мгновенными спот-ставками:

$$R_{k,n}^{\tau} = -\frac{A(\tau)}{\tau} + \frac{C(\tau)}{\tau} r_{k,n},$$

где A и C – функции из формулы (11) для цены облигации.

В соответствии с введенными выше обозначениями $r_{k,n}$ обозначает значение процесса r_t в точке $\tau_k = k\Delta_n$. Подставим в полученное выражение формулу (18). В результате получим:

$$R_{k,n}^{\tau} = -\frac{A(\tau)}{\tau} + \frac{C(\tau)}{\tau} r_{k,n} = \psi_n + \varphi_{1,n} R_{k-1,n} + \delta_n \varepsilon_{k,n}, \qquad (19)$$

где $\psi_n = -\frac{A(\tau)}{\tau}\left(1 - \varphi_{1,n}\right) + \frac{C(\tau)}{\tau}\varphi_{0,n}$ и $\delta_n = \sigma_n \frac{C(\tau)}{\tau}$.

Следовательно, располагая наблюдениями $\tilde{R}_{k,n}^{\tau}$, мы должны оценить параметры регрессионного уравнения:

$$R_{k,n}^{\tau} = \psi_n + \varphi_{1,n} R_{k-1,n}^{\tau} + \nu_{k,n}, \nu_{k,n} : N\left(0, \delta_n^2\right). \qquad (20)$$

Вектор параметров $\theta = \left(\psi_n, \varphi_{1,n}, \delta_n^2\right)$ можно оценить при помощи условного метода максимального правдоподобия. Для этого необходимо максимизировать по параметру θ логарифм функции правдоподобия [7], считая величину $R_{0,n}^{\tau}$ неслучайной.

$$\ln L(\theta) = \ln \prod_{k=1}^{n} f_{R_{k,n}^{\tau} | R_{k-1,n}^{\tau}} (\hat{R}_{k,n}^{\tau} / \hat{R}_{k-1,n}^{\tau}; \theta) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln f_{R_{k,n}^{\tau} | R_{k-1,n}^{\tau}} (\hat{R}_{k,n}^{\tau} / \hat{R}_{k-1,n}^{\tau}; \theta) =$$

$$= -\frac{n}{2}\ln\delta_n^2 - \frac{n}{2}\ln 2\pi -$$

$$- \frac{1}{2\delta_n^2}\sum_{k=1}^{n}(\tilde{R}_{k,n}^{\tau} - \psi_n - \varphi_{1,n}\tilde{R}_{k-1,n}^{\tau})^2,$$

где

$$f_{R_{k,n}^{\tau} | R_{k-1,n}^{\tau}} (\hat{R}_{k,n}^{\tau} | \hat{R}_{k-1,n}^{\tau}; \theta) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_n^2}} \exp\{(\hat{R}_{k,n}^{\tau} - \hat{R}_{k-1,n}^{\tau})^2 / \left(2\delta_n^2\right)\}.$$

Максимум логарифма функции правдоподобия достигается при следующем выборе [7] вектора оценок $\hat{\theta} = \left(\hat{\psi}_n, \hat{\varphi}_{1,n}, \hat{\delta}_n^2\right)$:

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}_n \\ \hat{\varphi}_{1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{k=1}^{n} \tilde{R}_{k-1,n}^{\tau} \\ \sum_{k=1}^{n} \tilde{R}_{k-1,n}^{\tau} & \sum_{k=1}^{n} (\tilde{R}_{k-1,n}^{\tau})^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} \tilde{R}_{k,n}^{\tau} \\ \sum_{k=1}^{n} \tilde{R}_{k-1,n}^{\tau}\tilde{R}_{k,n}^{\tau} \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

$$\hat{\delta}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\tilde{R}_{k,n}^{\tau} - \hat{\psi}_n - \hat{\varphi}_{1,n}\tilde{R}_{k-1,n}^{\tau})^2. \qquad (22)$$

После того, как вектор $\hat{\theta}$ найден, параметры α и ρ могут быть оценены следующим образом

$$\hat{\alpha} = -\frac{\ln\hat{\varphi}_{1,n}}{\Delta_n} \qquad (23)$$

и

$$\hat{\rho} = \hat{\delta}_n \frac{\sqrt{2}\hat{\alpha}^{\frac{3}{2}}\tau}{(1 - e^{-2\hat{\alpha}\Delta_n})^{\frac{1}{2}}\left(1 - e^{-\hat{\alpha}\tau}\right)}. \qquad (24)$$

Проверка оценивания накопленной волатильности

В качестве облигаций для проверки возможности оценивания накопленной волатильности нами будут рассматриваться облигации Казначейства США (US treasuries). Исходные данные представляют собой доходности к погашению $\{y_{k,\tau}\}$ для облигаций со сроком до погашения τ в один, три, шесть месяцев, один, два, три года, пять, семь, десять, тридцать лет, наблюдаемые на еженедельной основе ($\Delta_n = \frac{1}{52}$), начиная с 1 января 2010 г. ($k = 1, \ldots, 278$). Величина $y_{k,\tau}$ является некоторой усредненной доходностью к погашению облигаций со сроком до погашения τ, обращающихся на рынке в день k, при этом первоначальный срок таких облигаций не принципиален. Например, для расчета величины $y_{k,\frac{6}{12}}$ используются как недавно выпущенные полугодовые облигации, так и облигации с большим первоначальным сроком, у которых оставшийся период до погашения равен 6 месяцам. Преобразуем исходные доходности в непрерывно начисляемые по следующему правилу

$$R^{\tau}_{k,n} = R\left(k\Delta_n, k\Delta_n+\tau\right) := \begin{cases} \dfrac{1}{\tau}\ln\left(\tau y_{k,\tau}+1\right), \tau = \dfrac{1}{12}, \dfrac{3}{12}, \dfrac{6}{12} \\ \ln\left(y_{k,\tau}+1\right), \tau = 1,2,3,5,6,10,30. \end{cases}$$

Данное преобразование соответствует тому, что доходности к погашению облигаций Казначейства США сроком до года вычисляются по правилам простых процентов, а при сроке до погашения от года и выше используются формулы сложных процентов. Для того чтобы не ограничиваться рассмотрением доходностей к погашению на сроках представленных выше, воспользуемся схемой Нельсона-Зигеля [5]. Данная схема состоит в построении для доходностей интерполяционной кривой следующего вида:

$$R^{\tau}_{k,n} = \beta_{1,k} + \beta_{2,k}\left(\frac{1-e^{-\lambda_k\tau}}{\lambda_k\tau}\right) + \beta_{3,k}\left(\frac{1-e^{-\lambda_k\tau}}{\lambda_k\tau} - e^{-\lambda_k\tau}\right),$$

где параметры $\beta_{1,k}$, $\beta_{2,k}$, $\beta_{3,k}$ и λ_k подбираются таким образом, чтобы построенная кривая наилучшим образом (в смысле минимальности квадрата остатков) описывала наблюдаемые значения доходностей к погашению на момент времени $t = k\Delta_n$ (рис. 1).

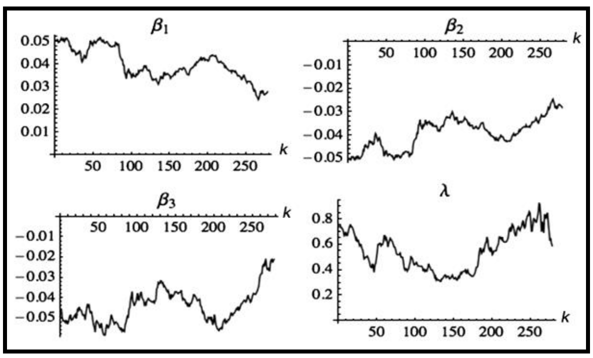

Рис. 1. Оценки параметров модели Нельсона-Зигеля для наблюдаемых данных

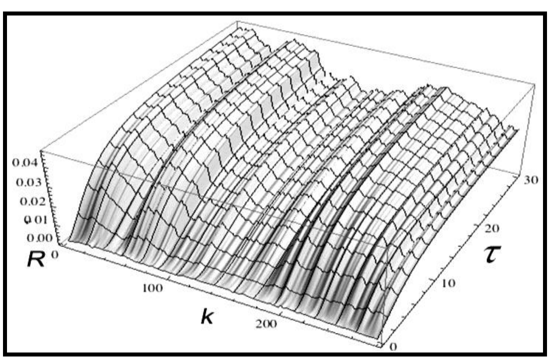

Рис. 2. Результат применения схемы Нельсона-Зигеля

На основе данных, полученных при реализации схемы Нельсона-Зигеля (рис. 2), для каждого срока до погашения τ, $0 < \tau \le 30$ оценим параметры регрессии (20) при помощи соотношений (21), (22). Результаты оценивания представлены на рис. 3.

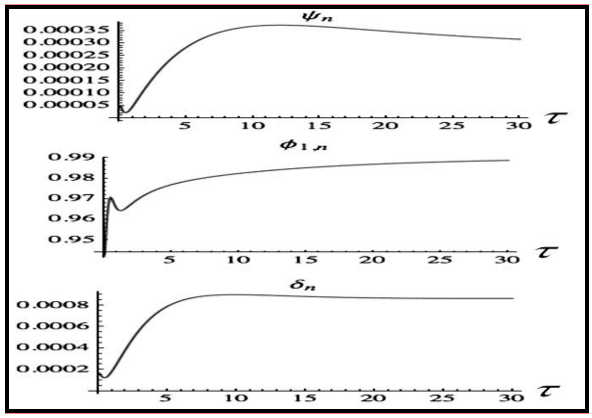

Рис. 3. Параметры модели (20) в зависимости от срока до погашения τ

Далее, при помощи формул (23), (24) получим оценки для параметров α и ρ.

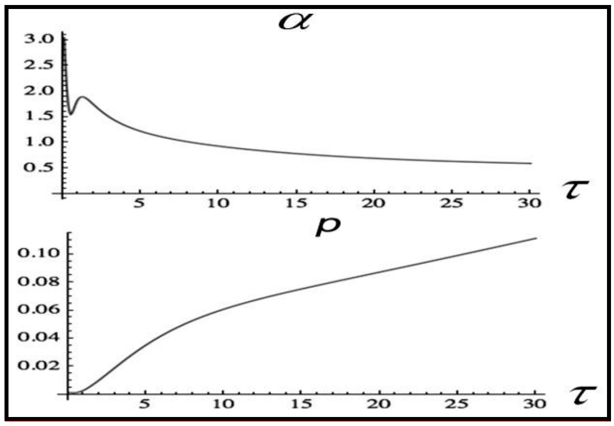

Рис. 4. Оценки для параметров α и ρ в зависимости от срока до погашения τ

Из рис. 4 видно, что параметры модели Васичека, оцененные на основе доходностей к погашению на различных сроках τ отличаются друг от друга. Параметр α изменяется в диапазоне от 3,048 для срока 1/12 года до 0.593 для срока 30 лет. Параметр волатильности ρ для указанных облигаций также не является постоянным и изменяется от значения 0,0014 для срока 1/12 года до 0,11 для срока 30 лет.

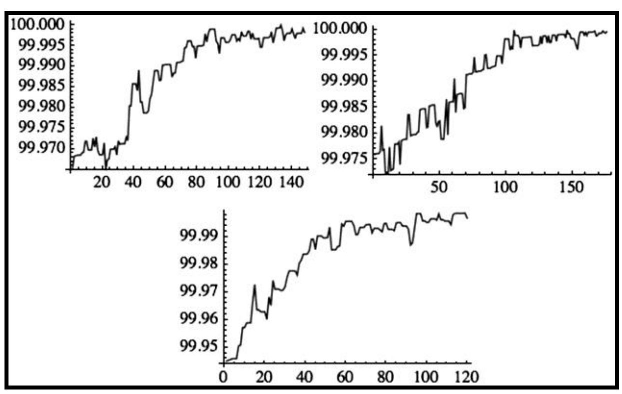

Рис. 5. Графики цен бескупонных облигаций сроком 6 месяцев

Сравним полученные оценки накопленной волатильности по модели Васичека с оценками, полученными на основе эмпирической волатильности (15). В качестве облигаций, рассмотрим следующие выпуски Казначейских векселей США (US Treasury Bills) сроком шесть месяцев: ***T-Bills*** 16apr2015 26w, ***T-Bills*** 21may2015 26w, T-Bills 18jun2015 26w. Графики их цен изображены на рис. 5.

Поскольку оказалось, что выбор оценок параметров α и ρ зависит от срока до погашения τ, а также исходя из формы зависимости данных параметров от срока на рис. 4, для построения оценки (14) накопленной волатильности бескупонной облигации Казначейства США со сроком до погашения τ предлагаем использовать оценки параметров, полученные для сроков τ_1 и τ_2: $\tau_1 < \tau < \tau_2$. Сравнение накопленных волатильностей (точнее, их оценок (15) на основе эмпирической волатильности) для указанных облигаций с оценками, построенными по модели Васичека, проведено на рис. 6. Пунктиром на нем изображены графики функций $\hat{I}_1(t)$ построенные на основе параметров, оцененных для сроков один месяц ($\hat{\alpha} = 3.04781$ и $\hat{\rho} = 0.00139$) и один год ($\hat{\alpha} = 1.85004$ и $\hat{\rho} = 0.003$). Накопленные волатильности для рассматриваемых облигаций со сроком шесть месяцев находятся между графиками накопленных волатильностей в рамках модели Васичека, построенных по параметрам, соответствующим одному месяцу (нижний график) и одному году (верхний график).

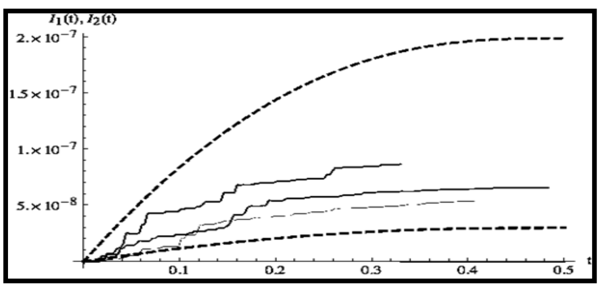

Рис. 6. Сравнение эмпирических накопленных волатильностей с теоретическими

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе рассмотрена задача построения оценок накопленных волатильностей бескупонных облигаций. Ее решение проделано в рамках модели Васичека, позволяющей получить аналитическое выражение для величины накопленной волатильности. На основе параметров, оцененных по доходностям к погашению облигаций Казначейства США, предложен подход к построению верхней и нижней границ для величины накопленной волатильности указанных облигаций. Важно отметить, что вопрос ставится именно об оценках для накопленной волатильности, а не ее точном прогнозе. Наличие указанных оценок помогает понять требуемую величину резерва средств для управления портфелем ценных бумаг в рамках подхода [1, 11], альтернативного самофинансированию, а также позволяет дать прогноз о величие прибыли. Вместе с тем, знание точной величины накопленной волатильности при достаточном объеме средств в управлении обеспечило бы сколь угодно высокую величину прибыли от подобных инвестиций.

Литература

1. Вавилов С.А. Обобщенная задача стохастического управления инвестиционным портфелем [Текст] / С.А. Вавилов, К.Ю. Ермоленко // Вестник СПбГУ ; Сер. 5 : Экономика. – 2007. – Вып. 3. – С. 36-46.
2. Вавилов С.А. Об одном подходе к проблеме непараметрического оценивания в статистике случайных процессов на основе метода некорректной задачи [Текст] / С.А. Вавилов, К.Ю. Ермоленко // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2007. – Т. 351. – С. 117-128.
3. Никитин Я.Ю. Статистические оценки параметров диффузионных процессов [Текст] / Я.Ю. Никитин // Леонид Витальевич Канторович: математика, менеджмент, информатика / под ред. Г.А. Леонова, В.С. Катькало, А.В. Бухвалова. – СПб. : Высшая школа менеджмента, 2009. – С. 159-194.
4. Björk T. Arbitrage theory in continuous time [Text] / T. Björk. – OUP Oxford, 2004. – 496 p.
5. Diebold F.X. Forecasting the term structure of government bond yields [Text] / Diebold F.X., Canlin Li // Journal of econometrics. – 2006. – Vol. 130.2. – Pp. 337-364.
6. Finch S. Ornstein-uhlenbeck process [Text] / S. Finch // Working paper. – 2004. – May. – 13 p.
7. Hamilton J.D. Time series analysis [Text] / James D. Hamilton. – Princeton University Press, 1994.
8. Øksendal B.K. Stochastic differential equations: an introduction with applications [Text] / Øksendal B.K. // Springer – 1998.
9. Shreve S.E. Stochastic calculus for finance II [Text] / Steven E. Shreve // Springer. – 2004. – 532 p.
10. Vasicek O. An equilibrium characterisation of the term structure [Text] / Oldrich Vasicek // Journal of financial economics. – 1977. – Vol. 5. – Pp. 177-188.
11. Vavilov S.A. On the new stochastic approach to control the investment portfolio [Text] / Vavilov S.A., Ermolenko K.Yu. // IAENG international journal of applied mathematics. – 2008. – Vol. 38 ; no. 1. – Pp. 54-62.

Ключевые слова

Временная структура процентных ставок; случайный процесс; модель Васичека.

Светлов Кирилл Владимирович

РЕЦЕНЗИЯ

В статье Светлова К.В. рассматривается модель Васичека, предназначенная для описания поведения бескупонных облигаций и связанных с ними процентных ставок. В работе решается задача оценивания величины накопленной волатильности для бескупонных облигаций в рамках данной модели. Автором излагается подход к калибровке параметров модели Васичека и приводится пример оценок для облигаций Казначейства США. Актуальность работы обусловлена тем, что знание оценок для накопленной волатильности некоторого актива дает возможность прогнозирования величины теоретической прибыли от управления портфелем, содержащим данный актив, а также позволяет понять необходимый размер резерва средств для дальнейшего управления портфелем. Считаю, что данная работа отвечает всем предъявляемым требованиям и может быть опубликована в журнале «Аудит и финансовый анализ».

Ермоленко К.Ю., к.э.н., доцент, кафедра экономической кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета